UNIV. OF
TORONTO
LIBRARY

BINDING LIST AUG 1 1923

Digitized by the Internet Archive
in 2010 with funding from
University of Ottawa

http://www.archive.org/details/s2bulletindessci17fran

7330 1

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

COMMISSION DES HAUTES ÉTUDES.

MM. HERMITE, *président*.

BERTRAND.

DARBOUX.

TISSERAND.

J. TANNERY.

N..., *secrétaire*.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

19310 Paris.— Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

Math
B

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

3

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XVII. — ANNÉE 1893.

(TOME XXVII DE LA COLLECTION.)

PREMIÈRE PARTIE.

179861
24/4/23

PARIS,
GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

QA
1
B8
v. 28

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

PREMIÈRE PARTIE.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

P. DUHEM, chargé de Cours à la Faculté des Sciences de Lille. — LEÇONS SUR L'ÉLECTRICITÉ ET LE MAGNÉTISME. 3 vol. in-8. Gauthier-Villars et fils; 1892.

Depuis près d'un siècle que Poisson a inauguré la théorie de l'électricité, les phénomènes électriques et magnétiques ont été l'objet de travaux presque innombrables où se sont unis les efforts des physiciens et des analystes. Parmi ces travaux, les uns peuvent être regardés comme définitifs, en ce sens que leurs résultats et leurs méthodes sont sanctionnés par un acquiescement unanime; d'autres, portant sur des matières plus confuses, sur des théories encore en voie de formation, renferment des parties obscures, des hypothèses peu justifiées sur lesquelles l'accord est loin d'être fait. Distinguer, parmi cet amas de matériaux de toute valeur et de toute provenance, les éléments vraiment acquis à la Science et les fondre en un corps de doctrine, c'est là une entreprise hardie que M. Duhem n'a pas craint de tenter dans les trois Volumes qu'il vient d'ajouter à la liste déjà considérable de ses travaux.

Ce Traité n'est donc pas une *compilation* des théories touchant l'électricité et le magnétisme; comme l'auteur le dit lui-même, c'est un exposé aussi un, aussi logique que possible, où il s'est efforcé de grouper ces théories autour d'un petit nombre de prin-

cipes et d'hypothèses. Les lecteurs qui sont au courant des publications antérieures de M. Duhem prévoient, sans doute, que les principes de la Mécanique généralisés et étendus à la Thermodynamique doivent jouer dans ce groupement un rôle essentiel.

Peut-être s'étonnera-t-on que la description des méthodes expérimentales tienne peu de place dans cet Ouvrage. Il n'en faut pas conclure que l'auteur en méconnaisse l'importance; mais il a jugé inutile que son livre fît double emploi avec les Traités qui sont dans toutes les mains et où l'exposition de ces méthodes ne laisse rien à désirer.

Ajoutons que si l'Analyse mathématique se trouve largement employée, elle n'est jamais qu'un moyen et non une fin : tous les développements mathématiques que renferment le livre contribuent à éclaircir les théories physiques auxquelles ils correspondent.

Nous allons donner successivement une courte analyse des trois Volumes dont se compose l'Ouvrage.

Premier Volume. — *Les corps conducteurs à l'état permanent.* — L'auteur réunit sous ce titre l'étude de l'équilibre électrique et l'étude des conducteurs traversés par des courants permanents. Ce Volume se divise en deux Parties bien distinctes : l'une, presque entièrement analytique, est une *théorie de la fonction potentielle* (Livres I, II et III); l'autre, d'un caractère plus physique, renferme *les applications de la Thermodynamique à l'équilibre électrique et aux courants permanents* (Livres IV, V et VI).

Dans le Livre I (théorie des forces qui agissent en raison inverse du carré de la distance et propriétés de leur potentiel), nous signalerons particulièrement le Chapitre VII, où *l'action électrostatique et la fonction potentielle d'une surface électrisée* sont étudiées d'une manière beaucoup plus complète que dans les Traités classiques.

Le Livre II est consacré à la *distribution électrique*. L'auteur commence par établir les conditions de l'équilibre électrique sur les conducteurs et les théorèmes classiques relatifs à cet équilibre (théorèmes dus à Poisson, Gauss, Green, C. Neumann, etc.); puis il ramène le problème de la distribution électrique au pro-

blème de Dirichlet, et, après un exposé critique de la méthode de Riemann, il forme un tableau des principales méthodes qui permettent de résoudre rigoureusement ce dernier problème pour des classes de corps de plus en plus étendues. L'ordre suivi par l'auteur dans cette importante théorie est le suivant : le problème de Dirichlet est équivalent à la recherche de la fonction de Green, fonction qui se détermine immédiatement pour certains conducteurs et, en particulier, pour la sphère. La transformation de l'équation de Laplace en coordonnées orthogonales quelconques permet de résoudre le problème pour d'autres corps, en particulier pour l'ellipsoïde. La transformation par rayons vecteurs réciproques multiplie infiniment les corps pour lesquels on sait traiter le problème de Dirichlet; mais aucune autre transformation ne jouit de la même propriété. La méthode de M. Carl Neumann, la méthode de M. G. Robin permettent de résoudre ce problème pour la plupart des corps convexes. Le procédé alterné de M. Schwarz en fournit la solution pour une foule de corps non convexes; enfin les méthodes combinatoires de Murphy et de M. C. Neumann permettent de le résoudre pour l'espace extérieur à plusieurs corps lorsqu'on sait le résoudre pour l'espace extérieur à chaque corps.

Au Livre III, M. Duhem a réuni les diverses parties de la théorie des fonctions harmoniques qui trouvent dans l'expérience des vérifications ou des applications : la théorie du plan d'épreuve, les travaux de M. Robin sur les conducteurs ouverts, les propriétés des lignes de force, les théorèmes de Faraday, etc.

Si complète que soit cette première moitié du Tome I, M. Duhem, dans un Traité destiné particulièrement aux physiciens, n'a pu développer certaines méthodes dont l'importance analytique est considérable, telles que, par exemple, la méthode générale de M. Poincaré pour déterminer la fonction de Green. Mais des indications bibliographiques nombreuses et précises permettent aux mathématiciens de compléter aisément toutes les théories qui ont dû être abrégées.

A partir du Livre IV, nous entrons dans la seconde Partie du Volume, dans celle qui traite des applications de la Thermodynamique à l'équilibre électrique et aux courants permanents. Le premier Chapitre du Livre IV est un court résumé de la Théorie

du potentiel thermodynamique; comme on le sait, l'auteur désigne sous ce nom (au signe près) la fonction dont la variation représente le travail des forces intérieures pour tout déplacement virtuel d'un système, fonction dont on admet l'existence. Le second Chapitre, consacré à l'étude spéciale du potentiel thermodynamique d'un système électrisé, doit attirer particulièrement l'attention de ceux qui veulent comprendre la pensée de l'auteur.

Pour les systèmes sans frottement, où toutes les forces intérieures sont des forces de liaison, le potentiel thermodynamique est d'une forme très simple : si dv_1, dv_2, ... désignent les éléments du système, cette fonction est une somme de termes

$$\varphi_1 dv_1 + \varphi_2 dv_2 + \ldots,$$

où φ_1 dépend exclusivement des propriétés intrinsèques du seul élément dv_1 (telles que sa densité, son état physique ou chimique, etc.). C'est cette forme du potentiel thermodynamique que M. Duhem a prise comme point de départ dans son exposé didactique de l'Hydrodynamique et de l'Élasticité [1], comme aussi dans ses théories de la vaporisation, de la dissociation, etc.

Mais, quand il s'exerce, entre les éléments du système non en contact, des forces intérieures dont le travail virtuel n'est pas nul, l'expression précédente du potentiel thermodynamique doit être complétée par l'addition d'un terme de la forme

$$\Sigma \psi_{ij} dv_i dv_j,$$

où ψ_{ij} dépend de l'état de chacun des deux éléments dv_i, dv_j et de leur position relative.

A l'aide de quelques hypothèses et de quelques lois expérimentales, M. Duhem donne au terme $\psi_{ij} dv_i dv_j$ la forme suivante :

$$m_i m_j \left[-\frac{k}{r} + f(r) \right] - q_i q_j \frac{\varepsilon}{r} - (m_i q_j + m_j q_i) g(r),$$

k et ε étant deux constantes absolues et positives;
r la distance des deux éléments dv_i, dv_j;
m_i, m_j leurs masses;
q_i, q_j leurs charges électriques;
enfin $f(r)$ et $g(r)$ deux fonctions qui sont sensiblement nulles lorsque r n'a pas une très petite valeur.

---

[1] *Hydrodynamique, Elasticité, Acoustique.* 2 vol. in-4. Paris, Hermann.

Le premier terme $-\frac{k m_i m_j}{r}$ correspond à la loi de la gravitation universelle; le second terme $m_i m_j f(r)$ correspond aux actions capillaires; le troisième terme $\frac{\varepsilon q_i q_j}{r}$, aux actions électriques telles que les ont définies Coulomb et Poisson; le quatrième terme enfin renferme la loi des actions qui s'exercent à petite distance entre les masses matérielles et l'électricité, actions dont il faut bien admettre l'existence pour rendre compte des phénomènes de contact, ainsi que M. Helmholtz l'a montré le premier.

Le Livre V est l'application des principes précédents *aux conducteurs métalliques*, autrement dit aux conducteurs qui laissent circuler l'électricité sans éprouver de décomposition chimique. Après avoir rattaché à ces principes les lois d'Ohm et de Joule, M. Duhem traite de la différence de niveau potentiel de deux métaux en contact, de l'effet Peltier, des courants thermo-électriques et de l'effet Thomson ; il est un de ceux qui, dans ces dernières années, ont apporté à cette partie de la Science la plus large contribution; aussi l'a-t-il exposée avec beaucoup de généralité et avec un grand souci de la rigueur. M. Poincaré, discutant les premiers essais de M. Duhem sur les couples thermo-électriques, considère sa théorie comme « la moins imparfaite que nous ayons jusqu'ici ». Dans une Note, placée à la fin du troisième Volume, M. Duhem s'est attaché, en dissipant tout malentendu, à lever la principale objection que lui adressait M. Poincaré, et peut-être l'éloge de l'illustre analyste serait-il aujourd'hui moins restrictif.

Le Livre VI renferme les résultats les plus précis auxquels a conduit l'étude des *électrolytes*, résultats qui se trouvent renfermés dans la théorie de la pile voltaïque donnée par Gibbs et développée par M. Helmholtz. Il convient de rappeler que, dans ce domaine, on doit à M. Duhem la relation explicite qui lie les variations de la force électromotrice d'une pile aux variations de la pression qu'elle supporte, relation à laquelle les expériences récentes de M. H. Gilbault apportent une complète confirmation.

Deuxième Volume. — *Les aimants et les corps diélectriques.* — Ce rapprochement n'implique nullement, dans l'idée de l'auteur, que ces deux espèces de corps présentent des analogies de

nature; il est suffisamment justifié par l'identité presque complète des calculs qui servent à l'étude des milieux magnétiques et diélectriques.

Le plan du deuxième Volume rappelle celui du premier. Pour ne pas rompre avec la tradition, M. Duhem consacre les deux Livres VII et VIII à la théorie classique du Magnétisme ; le Livre VII traite *des forces magnétiques,* le Livre VIII, *de l'aimantation par influence selon la théorie de Poisson.* Quoique ces deux Livres renferment bien des nouveautés de détail, la partie vraiment personnelle de l'Ouvrage ne commence qu'au Livre IX, dans lequel M. Duhem développe *la théorie de l'aimantation par influence fondée sur la Thermodynamique* telle qu'il l'avait indiquée dans sa Thèse.

L'auteur commence par établir les conditions de l'équilibre magnétique en reprenant la méthode employée au Livre IV pour l'équilibre électrique, puis il aborde la discussion de la stabilité de cet équilibre. Cette discussion le conduit à une conséquence bien remarquable : l'état d'équilibre de l'aimantation est un état stable sur les corps dont la fonction magnétisante est positive, mais, au contraire, ce serait, en général, un état instable sur les corps ayant une fonction magnétisante négative; on doit donc rejeter l'existence de corps doués d'une fonction magnétisante négative, c'est-à-dire de corps proprement diamagnétiques au sens que Faraday et Sir W. Thomson donnent à ce mot. Telle est la conséquence à laquelle M. Beltrami, M. Parker et M. Duhem sont parvenus simultanément dans des recherches indépendantes.

Mais s'il n'existe pas de corps diamagnétiques proprement dits, comment expliquer que certains corps soient, en apparence, diamagnétiques? On est contraint de reprendre une ancienne hypothèse d'Edm. Becquerel que les physiciens avaient peu à peu abandonnée : l'éther dans lequel tous les corps sont plongés est magnétique, et un corps semble magnétique ou diamagnétique selon qu'il est plus ou moins magnétique que l'éther qui l'environne.

La discussion de cette hypothèse amène M. Duhem à développer plus complètement qu'on ne l'a fait jusqu'ici l'étude des fluides aimantés et des corps qui y sont plongés. Il montre, en particulier, que certaines expériences amènent à regarder l'éther comme

un corps non seulement magnétique, mais doué de force coërcitive.

Signalons encore dans ce Livre la démonstration générale de ce beau théorème, énoncé par M. Thomson, qu'*une masse magnétique, placée en présence d'aimants permanents, ne peut être en équilibre stable*.

Le Livre X est consacré à l'étude de l'*aimantation des corps cristallisés*. Ce problème important s'y trouve traité en détail, et bien des formules qui serviront dans l'étude des cristaux pyro-électriques et piézo-électriques y sont établies.

Les calculs auxquels conduit la théorie des corps diélectriques ont des relations si étroites avec les calculs de la théorie des corps magnétiques qu'un seul Livre, le Livre XI, suffit à M. Duhem pour développer la théorie la plus complète dont les diélectriques aient fait l'objet jusqu'ici. Il montre, en particulier, comment, dans certains milieux cristallisés pour lesquels deux directions, inverses l'une de l'autre, n'ont pas des propriétés physiques identiques; les propriétés diélectriques sont modifiées et donnent lieu aux phénomènes pyro-électriques et piézo-électriques. Il rattache ainsi, d'une manière rationnelle, aux propriétés générales des corps diélectriques les lois des phénomènes pyro-électriques et piézo-électriques. Les formules qui expriment ces lois sont identiques à celles qu'ont admises M. Voigt et, après lui, MM. Riecke, Pockels et B. Élie.

Le Livre XII, consacré *aux déformations des corps polarisés*, est un de ceux qui attirèrent le plus vivement l'attention des physiciens par la nouveauté des théories qui y sont exposées. Il s'agit d'étudier les lois de l'équilibre intérieur d'un fluide ou d'un solide polarisé. Maxwell a donné, au sujet de cet équilibre, une théorie célèbre. D'après lui, à l'intérieur d'un fluide polarisé, les lois classiques de l'Hydrostatique sont profondément modifiées ; la pression hydrostatique n'est plus, en toute circonstance, normale à l'élément sur lequel elle s'exerce, ni indépendante en grandeur de l'orientation de cet élément; elle varie en grandeur et en direction avec l'orientation de l'élément au point de donner une pression pour les éléments tangents aux lignes de force, et une tension pour les éléments normaux aux lignes de force.

Cette théorie a fait l'objet de controverses nombreuses. Tandis

que MM. Helmholtz, Kirchhoff, etc. cherchaient à étendre les formules de Maxwell aux fluides compressibles et aux solides isotropes, M. Beltrami et M. Brillouin cherchaient à définir un système de déformations compatibles avec de telles pressions ; mais ils aboutissaient à cette conclusion qu'un tel système n'existe pas.

Les contradictions auxquelles étaient parvenus ces deux auteurs étaient-elles apparentes ou réelles? La plupart des auteurs n'hésitaient pas à les regarder comme des paradoxes qui seraient un jour expliqués. Pour résoudre la difficulté, M. Duhem reprend, dès ses débuts, l'étude des pressions au sein des milieux polarisés, en suivant la rigoureuse méthode de Lagrange qu'il a développée dans son cours déjà cité d'Hydrodynamique. Il obtient ainsi, pour définir la pression à l'intérieur d'un fluide ou d'un solide polarisé, des lois très simples entièrement différentes de celles qu'a indiquées Maxwell. Ainsi, à l'intérieur d'un fluide polarisé, la pression est en tout point normale à l'élément sur lequel elle agit et indépendante, en grandeur, de l'orientation de cet élément. M. Duhem établit ensuite les relations qui existent entre les déformations d'un milieu polarisé et la pression à l'intérieur de ce milieu, *relations qui n'ont pas la même forme qu'au sein d'un milieu non polarisé*. Enfin, reprenant la démonstration des équations de Maxwell sous la forme donnée par M. Helmholtz, il marque le point précis où cette démonstration cesse d'être exacte. Ce Chapitre remarquable de l'Ouvrage de M. Duhem ne sera pas sans soulever des discussions parmi les admirateurs de Maxwell.

Dans un dernier Chapitre, l'auteur fait voir comment la théorie de la déformation électrique s'étend aux corps cristallisés et comment, en particulier, dans l'étude des cristaux hémièdres, interviennent certains termes qui rendent compte des phénomènes prévus par M. Lippmann et observés par MM. Curie. Les formules auxquelles il parvient concordent avec celles qu'ont admises M. Pockels et M. B. Élie.

Troisième Volume. — *Les courants linéaires.* — Dans les démonstrations de l'Électrodynamique, on fait un continuel usage des théorèmes relatifs aux intégrales curvilignes. Pour éviter toute confusion entre les difficultés d'ordre mathématique et d'ordre physique, M. Duhem consacre d'abord quatre Chapitres

très nourris aux propriétés essentielles des intégrales curvilignes.

Le Livre XIII traite de l'*Induction électrodynamique* qui s'exerce entre des courants linéaires quelconques. Pour des raisons de fond qu'il développe dans un Chapitre spécial, l'auteur a jugé nécessaire de renverser l'ordre classique et d'étudier l'induction avant d'aborder la théorie des forces électrodynamiques. Un petit nombre d'hypothèses très simples et qui se présentent en quelque sorte d'elles-mêmes lui permettent d'établir la loi élémentaire de l'induction, qui se trouve coïncider avec celle d'Helmholtz. Après avoir appliqué cette loi aux divers problèmes qui se présentent dans l'étude des courants uniformes, M. Duhem, dans un Appendice, fait une critique comparée des nombreuses lois d'induction qu'ont proposées les divers auteurs.

La loi de l'Induction électrodynamique, jointe à une autre loi qui peut être regardée comme une généralisation de la loi de Joule, fournissent l'expression de l'énergie interne d'un système où circulent des courants et la loi des actions électrodynamiques. Ici se présente une proposition paradoxale qui, bien que souvent entrevue, n'avait peut-être jamais été mise en pleine lumière. Les actions électrodynamiques, qui s'exercent entre les éléments d'un système, admettent un potentiel, comme les actions de gravité, les forces capillaires, électriques, etc. Mais, tandis que le potentiel relatif à toutes ces forces entre avec son signe dans la somme de termes qui compose l'énergie interne du système, le potentiel électrodynamique figure, lui aussi, dans cette énergie, mais *changé de signe*. Dans le Livre XIV (*Forces électrodynamiques*), M. Duhem discute en détail les raisons thermodynamiques qui rendent compte de ce paradoxe et justifie ainsi le plan suivant lequel il a construit son troisième Volume; puis il développe les lois des actions électrodynamiques qui s'exercent soit entre des courants quelconques, soit, ce qui constitue un cas particulier, mais le seul accessible à l'expérience, entre des courants uniformes.

Dans l'enseignement traditionnel, les lois des forces électrodynamiques font l'objet d'une démonstration directe. Pour ne pas laisser ignorées du lecteur ces questions classiques, M. Duhem leur consacre un Appendice où il discute les démonstrations de la loi d'Ampère données par Ampère et M. Bertrand.

Les *actions mutuelles des courants uniformes et des aimants*

comptent parmi celles dont l'exposé, tel qu'on le présente d'ordinaire dans les traités, prête le plus à la critique. Cet exposé est calqué presque toujours sur l'historique où l'électrodynamique et l'électromagnétisme s'enchevêtrent perpétuellement. M. Duhem, au contraire, et c'est l'objet du Livre XV, traite directement l'électromagnétisme indépendamment de l'électrodynamique. Les rapports qui apparaissent entre les résultats de ces deux sciences prennent ainsi une signification plus claire et plus précise.

Au Livre XV est joint un Appendice substantiel, où M. Duhem indique les idées fondamentales qui ont présidé au choix des divers systèmes d'unités électriques. Les physiciens liront avec grand intérêt ces quelques pages à la fois très élémentaires et très rigoureuses.

Le Livre XVI et dernier est rempli par l'étude des *actions qui s'exercent entre les courants non uniformes et les aimants*. Il débute par la démonstration directe de cette proposition qui domine le reste du Livre : Tandis que, dans les autres parties de la Physique, un élément magnétique peut toujours être regardé comme équivalent à deux masses magnétiques égales et de signe contraire placées en deux de ses points, cette conception conduirait à des résultats inadmissibles lorsque des courants *non uniformes* sont en présence d'aimants. Force est donc de rejeter ce mode de représentation des éléments magnétiques pour les définir seulement par la grandeur et la direction de leur aimantation.

L'analogie d'un élément magnétique et d'un petit courant fermé qui se présentait, au Livre XV, comme une conséquence des théories développées dans ce Livre, devient alors l'hypothèse fondamentale sur laquelle reposent les théories développées au Livre XVI.

Dans sa Préface, l'auteur annonce que la méthode suivie dans ce troisième Volume sera étendue ultérieurement à l'étude de la propagation de l'électricité dans les milieux d'étendue finie en toute dimension, qu'ils soient conducteurs magnétiques ou diélectriques. Un travail de classification et de sélection dans cette partie de la Physique encore en pleine formation serait, à coup sûr, d'une haute utilité, et le quatrième Volume que nous promet M. Duhem ne peut qu'ajouter à son Ouvrage un nouvel et grand élément d'intérêt.

Nous nous sommes efforcé, dans cette analyse, de traduire aussi fidèlement que possible les idées générales de l'auteur. Il est certain qu'une œuvre de cette importance et d'une conception si originale est appelée à soulever certaines objections. Les esprits qui aiment à se sentir près de l'expérience, ceux aussi qu'intéressent surtout les *vues* sur la nature même des choses, reprocheront aux hypothèses de l'auteur leur caractère trop général et trop conventionnel, à ses groupements, leur apparence artificielle qui les fait ressembler à des classifications plutôt qu'à des associations *nécessaires*. Il est clair que, dans la pensée de M. Duhem, certaines lois élémentaires qu'on regarde comme établies directement par l'expérience ne sont, au contraire, vérifiées que dans leurs conséquences assez éloignées, et que, par suite, une hypothèse abstraite, sur le potentiel thermodynamique par exemple, est aussi admissible, *a priori*, qu'une telle loi pourvu qu'elle entraîne les mêmes conséquences. Il est clair encore que M. Duhem réserve un grand fond de scepticisme aux hypothèses d'ordre métaphysique. Mais bien que ces tendances percent par endroits, l'Ouvrage, dans son ensemble, en est tout à fait indépendant : le but que s'est proposé précisément M. Duhem, et qu'il a atteint, c'est de construire une théorie générale qui *pût* être admise par tous les esprits quelles que fussent leurs tendances; il n'a pas naturellement la prétention d'avoir construit celle qu'ils auraient préférée à toute autre.

Pour ce qui est de la *forme* même du Livre, tous les lecteurs seront frappés par le développement naturel des propositions et des théories, par la marche uniforme des raisonnements. Ces procédés systématiques de démonstration entraînent, en même temps que des avantages essentiels, certains défauts (longueurs, introduction de formules intermédiaires sans application, etc.), et ces défauts choqueront quelquefois ceux qui mettent au-dessus de tout l'élégance et la brièveté. Mais ces qualités n'étaient pas celles qui importaient le plus ici, et la méthode invariablement *analytique* à laquelle M. Duhem s'est tenu donne à son Livre un véritable caractère de puissance et d'unité.

Les lecteurs ne seront pas sans admirer aussi l'érudition peu ordinaire de l'auteur. Les renvois bibliographiques qui accompagnent le texte permettent de compléter sans peine la « littérature »

de toutes les questions traitées. Mais, quel que soit l'intérêt que présente en elle-même chacune des théories partielles, le fait de les avoir rassemblées d'une manière logique constitue le principal mérite du nouveau Traité. Dans un amas de connaissances aussi confus que celui de la science électrique, c'est un précieux avantage que de pouvoir étudier les choses « en ordre », lors même que cet ordre, comme le dit l'auteur, ne serait pas le seul possible, lors même qu'on devrait plus tard en préférer un autre. Pour toutes ces raisons, l'Ouvrage de M. Duhem a sa place marquée dans la bibliothèque de tous ceux qu'intéressent, à un point de vue quelconque, les théories de l'électricité.

P. Painlevé.

GREENHILL. — The applications of Elliptic functions.
1 vol. in-8°, xi-357 p. Londres, Macmillan; 1892.

Le Livre que publie M. Greenhill est de ceux qui peuvent rendre de grands services aux étudiants. On ne connaît bien une théorie que lorsqu'on en a fait des applications diverses. Un recueil de questions relatives aux fonctions elliptiques, dont les unes sont traitées, les autres simplement énoncées, ne peut manquer d'être bien accueilli par ceux qui sont au courant des éléments de la théorie de ces fonctions, et s'il tombe entre les mains de quelques-uns de ceux qui ignorent cette théorie, il leur inspirera peut-être le désir de l'étudier, en leur montrant de combien d'applications diverses, et dans les directions de la Science les plus divergentes, ces fonctions sont susceptibles.

Un Livre comme celui de M. Greenhill ne peut guère être analysé longuement : il serait naturellement difficile d'en exposer le plan, et de montrer comment se rattachent les divers problèmes que la pagination du Livre a rapprochés. Nous nous contenterons de l'énumération de la plupart des questions traitées, dans l'ordre où elles se trouvent, sans parler de nombreux *exemples* signalés par l'auteur : cette énumération, si sèche qu'elle soit, suffira assurément à faire comprendre l'intérêt du Livre de M. Greenhill.

Pendule simple. — Surface de M. Schwarz ayant pour équation

$\operatorname{cn} x + \operatorname{cn} y + \operatorname{cn} z + \operatorname{cn} x \operatorname{cn} y \operatorname{cn} z = 0$. — Intégrales elliptiques de première espèce. — Dégénérescence. — Fonctions de M. Weierstrass. — Graphique des fonctions elliptiques. — Applications dynamiques diverses. — Formes de potentiel conduisant à des trajectoires ou à des courbes funiculaires où les fonctions elliptiques interviennent simplement. — Parallélogramme de Watt. — Pendule composé. — Courbe élastique plane. — Lignes de Sumner sur les Cartes de Mercator. — Courbe funiculaire d'égale résistance. — Lignes géodésiques sur la surface caténoïde. — Rotation d'un corps solide autour d'un point fixe. — Surfaces de révolution applicables sur la sphère. — Théorème d'addition. — Polygones de Poncelet. — Forme algébrique du théorème d'addition. — Théorème d'Abel. — Intégrales elliptiques de deuxième espèce; théorème d'addition. — Théorème de Fagnano. — Intégrales elliptiques de troisième espèce. — Pendule d'Euler. — Intégrales elliptiques en général. — Chaîne qui tourne autour d'un axe. — Élastique gauche. — Pendule sphérique. — Représentation géométrique du mouvement d'un corps solide d'après Mac-Cullagh, Siacci, Gebbia, Sylvester, Darboux, Mannheim. — Addition des intégrales elliptiques de troisième espèce. — Intégrales pseudo-elliptiques. — Points d'inflexion de l'herpolodie. — Gyroscopes. — Trajectoire d'un projectile pour une loi cubique de la résistance. — Double périodicité. — Ovales de Descartes. — Surfaces homofocales. — Équation de Lamé. — Décomposition en produits infinis et en séries de fractions; interprétation physique. — Influence de deux sphères électrisées. — Mouvements vorticellaires. — Kaléidoscopes. — Transformation des fonctions elliptiques; interprétation physique. — Transformation de Landen. — Transformation des fonctions ϑ. — Équations modulaires. — Multiplication, multiplication complexe.

Ces diverses matières, et d'autres encore, sont répandues dans dix Chapitres. Enfin un Appendice est consacré, pour la plus grande partie, à l'étude du mouvement d'un corps solide dans un liquide indéfini et sans frottement. J. T.

BACHMANN. — Die Elemente der Zahlentheorie. 1 vol. in-8°; XII-264 p. Leipzig. Teubner; 1892.

M. Bachmann, bien connu par le Livre qu'il a publié il y a vingt ans sur la division du cercle, nous donne aujourd'hui des éléments de la théorie des nombres qui ne peuvent manquer d'être bien accueillis. Assurément, les admirables leçons de Lejeune-Dirichlet qu'a publiées M. Dedekind n'ont pas vieilli et il ne peut être question de les remplacer; mais on peut, sur quelques points, faire autrement que n'ont fait l'illustre maître et son éminent disciple; en outre, même dans un livre élémentaire, il y a lieu de tenir compte de quelques progrès récents, dus en grande partie à Kronecker. C'est ce qu'a fait M. Bachmann, et sans doute on lui en saura gré.

Son Livre comprend une Introduction et quatre Chapitres.

L'Introduction est relative à la notion de nombre entier positif ou négatif et aux opérations d'addition, de soustraction et de multiplication.

Le premier Chapitre concerne la divisibilité. L'auteur reproduit la démonstration qu'a donnée Poinsot, dans ses *Réflexions sur les principes fondamentaux de la théorie des nombres* (*Liouville*, t. X, p. 1), des propositions fondamentales de cette théorie. Cette démonstration, fondée uniquement sur la périodicité des restes de la division par n des termes de la suite $0, a, 2a, 3a, \ldots$, et qui permet d'établir directement le fait qu'un nombre qui divise un produit de deux facteurs et qui est premier avec l'un d'eux divise l'autre, ainsi que la relation entre le plus petit commun multiple de deux nombres et leur plus grand commun diviseur, mérite à coup sûr de n'être pas aussi oubliée dans l'enseignement qu'elle paraît l'être. M. Bachmann suit d'ailleurs l'exposition de Poinsot qui est liée à la considération des polygones réguliers. Signalons encore quelques remarques intéressantes sur la recherche de la plus haute puissance d'un nombre premier p par laquelle on puisse diviser le produit des n premiers entiers, la démonstration du théorème de M. Catalan, d'après lequel le rapport

$$\frac{2a!\,2b!}{a!\,b!\,(a+b)!}$$

est entier, enfin la démonstration très simple de cette proposition : Lorsque les deux fonctions numériques $f(n)$, $\varphi(n)$ jouissent de la propriété

$$f(n) = \Sigma\varphi(d),$$

où d est un diviseur quelconque de n, on a

$$\varphi(n) = f(n) - \sum f\left(\frac{n}{p}\right) + \sum f\left(\frac{n}{pp'}\right) - \sum f\left(\frac{n}{pp'p''}\right) + \ldots,$$

en désignant par $p, p', p'', \ldots$ les facteurs premiers *distincts* de n.

La seconde section se rapporte aux congruences. On y trouvera la notion généralisée de module et de congruence, d'après M. Dedekind : un module est un ensemble de nombres tel que la somme ou la différence de deux nombres quelconques de l'ensemble appartienne encore à l'ensemble ; une congruence entre deux éléments μ et μ' exprime que la différence de ces éléments appartient audit ensemble. Cette notion sert à l'auteur pour établir les propriétés fondamentales d'une congruence (au sens ordinaire) de degré quelconque. On y remarquera aussi l'exposition très clairement faite, malgré le haut degré d'abstraction que comporte le sujet, de la façon dont M. Kronecker (*Monatsberichte,* 1870) a montré qu'on pouvait représenter, au moyen d'éléments fondamentaux, tous les éléments d'un groupe fini, lorsque la multiplication est commutative. La notion et l'existence des racines primitives d'un nombre premier p sont une conséquence immédiate du théorème de M. Kronecker, dont le lecteur trouve ainsi immédiatement une application simple et importante.

Le troisième Chapitre est consacré à la théorie des restes quadratiques et en particulier à la loi de réciprocité. On y trouvera un intéressant résumé des recherches historiques (Kronecker, *Monatsberichte,* 1875), d'après lesquelles il semble bien que, malgré les affirmations de Gauss, ce soit à Euler, plutôt qu'à Legendre, qu'on doive reporter la gloire d'avoir énoncé le premier cette loi célèbre. Kronecker insinuait même volontiers quelques doutes sur la bonne foi de Legendre et de Gauss. Quoi qu'il en soit, il reste toujours à Legendre un essai de démonstration, incomplète à la vérité, qui n'en était pas moins un effort considérable. Après avoir donné quelques indications sur la façon dont on peut classer les diverses preuves de la loi de réciprocité, l'auteur expose celle de M. Zeller

(*Monatsberichte*, 1875) qui résulte très simplement du lemme de Gauss, l'extension si naturelle de ce lemme au symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ généralisé, que l'on doit à M. Schering et à Kronecker (*Monatsberichte*, 1876), ainsi que les démonstrations que ces auteurs ont tirées de cette généralisation (*Acta mathematica*, t. I; *Sitzungsberichte*, 1884); la loi de réciprocité était pour Kronecker un sujet de prédilection, sur lequel il est revenu souvent pour y porter chaque fois une lumière plus complète. On trouvera dans le Livre de M. Bachmann une bonne partie de ses recherches. Signalons encore la règle d'Eisenstein pour la détermination du symbole $\left(\frac{p}{q}\right)$ au moyen de l'algorithme des fractions continues.

Le quatrième Chapitre se rapporte aux formes quadratiques binaires proprement primitives. C'est au point de vue exclusif de la représentation d'un nombre par une telle forme que se place l'auteur, qui ne traite des formes équivalentes que comme conséquence des recherches sur la représentation. L'autre marche, qui consiste à partir de la substitution aux indéterminées de la forme d'autres indéterminées qui leur soient liées linéairement, lui paraît trop algébrique. C'est se montrer bien scrupuleux, d'autant que, à vrai dire, la distinction entre l'Algèbre et l'Arithmétique n'est pas ici bien nette, et que, malgré tout, l'identité qui rattache chaque représentation d'un nombre m par une forme (a, b, c) à une racine de la congruence

$$z^2 \equiv b^2 - ac \pmod{m}$$

tire son origine de la transformation des formes. Cette observation ne comporte d'ailleurs aucune critique de la marche adoptée par M. Bachmann qui est aussi simple que naturelle : elle consiste à ramener le problème de la transformation à la résolution de l'équation de Pell (qu'il conviendrait, comme il l'observe, d'appeler plutôt équation de Fermat); le problème est alors entièrement résolu pour les formes à déterminant négatif. Pour les formes à déterminant positif, la belle étude que Dirichlet a faite de cette équation donne la solution du problème. La notion d'équivalence de deux formes de même déterminant s'introduit alors comme résultant de la propriété de représenter les mêmes nombres, par des représentations attachées à la même racine de la congruence précédente. La notion

de forme réduite, d'ailleurs toute différente de celle qu'ont donnée Gauss et Dirichlet, se rapprochant au contraire du point de vue adopté par M. Hermite (*Crelle*, t. 40), permet d'arriver à cette proposition : Le nombre de classes de formes équivalentes de déterminant donné est limité. L'auteur traite ensuite de la composition des formes : cette composition pouvant être regardée comme une multiplication commutative lui permet de donner une nouvelle application du théorème de M. Kronecker sur les groupes finis à multiplication commutative.

Enfin M. Bachmann termine son Livre en exposant une des démonstrations de la loi de réciprocité que l'on doit à M. Kummer.

J. T.

ARNAUDEAU (A.), ancien Élève de l'École Polytechnique, membre agrégé de l'Institut des Actuaires français, chef du Bureau de Statistique de la Compagnie générale transatlantique, membre de la Société de Statistique de Paris. — GUIDE DES EMPRUNTS. TABLES DES VALEURS INTRINSÈQUES ET DURÉES PROBABLES DES OBLIGATIONS DE 500^{fr} POUR TOUTES LES ÉPOQUES DE L'EMPRUNT ET A TOUS LES TAUX USUELS, suivies des *Tables logarithmiques pour le calcul de l'intérêt composé, des annuités et des amortissements*, et précédées d'un *texte explicatif*. In-4, avec figures et 2 Tableaux graphiques. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1892. Prix : 9^{fr}.

EXTRAIT DU RAPPORT

PRÉSENTÉ A L'INSTITUT DES ACTUAIRES FRANÇAIS SUR LE PRÉSENT OUVRAGE

(Séance du 18 février 1892.)

Le Livre de M. Arnaudeau comprend deux Parties d'inégal développement : le texte préliminaire explicatif et les Tables proprement dites.

Dans la première Partie, l'auteur rappelle très brièvement les formules qu'il a prises pour base de la construction de ses Tables. En outre, il explique l'usage pratique et les applications de ces dernières. M. Arnaudeau se trouve ainsi amené à exposer les principes fondamentaux du calcul des intérêts composés, des annuités, de l'amortissement et de la parité des obligations, et il a su résumer, en quelques pages substantielles et concises, cet exposé classique, mais indispensable.

La seconde Partie du volume renferme douze Tables extrêmement utiles. Je me contenterai de signaler en passant les trois dernières (Tables VIII, IX et X), qui sont la reproduction textuelle des excellentes Tables logarithmiques de M. Eugène Pereire pour les calculs d'intérêts composés et d'annuités. L'éloge de ces Tables n'est plus à faire depuis longtemps; elles jouissent aujourd'hui d'une réputation presque universelle. En les reproduisant, M. Arnaudeau contribuera certainement encore à leur vulgarisation et, par cela même, il aura rendu un signalé service aux calculateurs financiers.

La Table A fournit la *vie probable* des titres d'un emprunt, en fonction du taux et du nombre total d'années réservées à l'amortissement. Cette Table est employée quelquefois dans les estimations approximatives. Mais les pages les plus importantes, celles qui donnent à l'Ouvrage son cachet d'originalité, son utilité incontestable, ce sont, à mon avis, celles qui renferment les huit Tables relatives aux parités d'obligations (Tables I, II, II *bis*, III, IV, V, VI et VII). Elles présentent les valeurs actuelles d'une obligation de 500^{fr} dont le taux nominal varie de 2 $^1/_2$ à 6 pour 100, pour des taux réels croissant par $^1/_8$ de 2 $^1/_2$ à 7 pour 100. Dans les Tables I à VII, les intérêts sont supposés payables par année. Dans la Table II *bis*, au contraire, l'auteur a évalué les intérêts payables par semestre, à raison de 1 $^1/_2$ pour 100 pour chaque coupon, soit 3 pour 100 par an.

L'idée de construire des Tables de parités pour les obligations n'est pas absolument nouvelle. Le savant actuaire Hippolyte Charlon a placé deux de ces Tables à la fin de chacun des Ouvrages intitulés *Théorie mathématique des opérations financières* et *Théorie élémentaire des opérations financières*. Mais elles n'ont été calculées qu'au seul taux nominal 3 pour 100, avec coupons annuels ou semestriels. Elles ne correspondaient donc qu'aux Tables II et II *bis* de M. Arnaudeau. En outre, le nombre des taux réels était moins élevés. Ces taux variaient seulement de 3 $^1/_8$ à 6 pour 100 dans le cas des coupons semestriels, et de 4 $^7/_8$ à 6 pour 100 dans le cas des coupons annuels. Le mérite incontestable de M. Arnaudeau est d'avoir donné à ses calculs un tel développement que tous les cas pratiques soient aujourd'hui prévus, au moins pour les obligations à coupon

annuel. C'est là certainement un résultat d'une importance extrême.

Il faudrait à présent établir les valeurs réelles des obligations, déduction faite des impôts qui frappent en France les titres mobiliers. Une simple lecture fournirait alors le taux réel correspondant à un cours donné, et réciproquement. Aujourd'hui la solution de ces deux problèmes exige encore un calcul préalable. Mais il est juste de rappeler combien les Tables de M. Arnaudeau facilitent ce calcul. Espérons que notre collègue ne reculera pas devant un nouveau labeur et qu'il nous donnera quelque jour des Tables complètes de la valeur corrigée des obligations ([1]).

Le volume de M. Arnaudeau se termine par deux Planches fort intéressantes. La première est un Abaque qui reproduit graphiquement les résultats contenus dans la Table II. Les diverses courbes forment une gerbe d'un aspect original et présentent avec une grande clarté l'effet des variations du taux dans les évaluations mobilières.

L'autre figure la décomposition d'une même annuité, effectuée de deux manières différentes, suivant que l'on applique le taux nominal au capital nominal ou le taux d'émission au capital effectivement emprunté. Des courbes indiquent, dans ces deux cas, la répartition de l'annuité entre les intérêts et les amortissements. La zone comprise entre les deux courbes représente donc le montant des primes de remboursement. Ce graphique montre d'une façon saisissante comment les primes de remboursement constituent en réalité un supplément d'intérêt capitalisé jusqu'à l'époque de l'amortissement.

Les Tables de notre collègue, qui permettent d'économiser le temps et la peine des calculateurs financiers, seront d'ici peu entre les mains de tous ceux qui s'occupent des opérations de Bourse et des emprunts publics. Les banquiers, les capitalistes, les grandes sociétés financières les utiliseront pour les évaluations

---

([1]) Pour répondre au désir exprimé par M. Léon Marie dans son Rapport, nous avons donné une Table supplémentaire indiquant les coefficients par lesquels il faut multiplier les valeurs intrinsèques des obligations de 500^{fr} 3 pour 100, pour avoir ces mêmes valeurs, déduction faite de l'impôt 4 pour 100 sur le revenu. Ces coefficients sont indépendants du taux adopté et peuvent être appliqués à toutes les valeurs des Tables II et IIbis.

de titres, la recherche des taux de placement et l'établissement des parités de valeurs. Pour nous autres actuaires, l'Ouvrage de M. Arnaudeau est un livre indispensable; il prendra place sur notre table, à côté des ouvrages classiques de Pereire et de Violeine.

LÉON MARIE.

MÉLANGES.

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE;

PAR M. H. MINKOWSKI.

Veuillez bien permettre, Monsieur, que je vous donne un rapide résumé de mon Ouvrage. La plus grande partie du livre traite des fonctions φ à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui, comme la racine carrée d'une forme quadratique positive, satisfont aux conditions

$$(\mathrm{A})\quad \begin{cases} \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) > 0, \quad \text{si l'on n'a pas} \quad x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \quad \ldots, \quad x_n = 0, \\ \varphi(0, 0, \ldots, 0) = 0, \\ \varphi(tx_1, tx_2, \ldots, tx_n) = t\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n), \qquad \text{si} \qquad t > 0, \end{cases}$$

$$(\mathrm{B})\quad \varphi(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_n+y_n) \leqq \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_n),$$

$$(\mathrm{C})\quad \varphi(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n) = \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Soient $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$ un nombre fini de formes linéaires à coefficients réels et aux variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$, et parmi ces formes soient n formes à déterminant différent de zéro. Soit

$$\Phi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

le maximum parmi les valeurs absolues de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_\nu$. Une telle fonction Φ satisfera évidemment aux conditions d'une fonction φ.

J'établis d'abord ce théorème :

φ étant une solution quelconque de (A), (B), (C), et δ une quantité positive choisie à volonté, on peut toujours trouver des fonctions Φ comme je viens de les caractériser, de sorte que, pour toutes

les valeurs possibles de $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on ait

$$1 \leqq \frac{\varphi}{\Phi} < 1 + \delta.$$

Il en résulte que l'intégrale $\int\int \ldots \int dx_1\, dx_2 \ldots dx_n$ étendue sur le domaine $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) < 1$ aura toujours une valeur déterminée. Soit I cette valeur. Je démontre alors que *l'on peut toujours trouver des nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$ pour lesquels on ait*

$$(1) \qquad 0 < \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) \leqq \frac{2}{\sqrt[n]{I}}.$$

J'ajoute ce théorème supplémentaire :

Le cas qu'il n'existe pas de nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$, pour lesquels on ait

$$0 < \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n) < \frac{2}{\sqrt[n]{I}},$$

ne peut se présenter que chez des fonctions Φ provenant d'un nombre ν de formes linéaires $\leqq 2^n - 1$.

La plus simple application du théorème (1) est la suivante :

$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ étant n formes linéaires à coefficients réels quelconques et à déterminant égal à ± 1, on peut toujours donner à $x_1, x_2, \ldots, x_n$ des valeurs entières qui ne s'évanouissent pas toutes et de sorte que les valeurs absolues de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ soient toutes $\leqq 1$.

L'énoncé plus exact de ce théorème est que l'on peut trouver des nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_n$, qui ne s'évanouissent pas tous, et de sorte que les valeurs absolues de $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ soient toutes < 1, excepté le cas où les formes $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, par une substitution linéaire à coefficients entiers et à déterminant ± 1, peuvent être transformées de manière que, abstraction faite de l'ordre, elles deviennent

$$x_1, \quad a_{21}x_1 + x_2, \quad \ldots, \quad a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + x_n.$$

Ainsi, par exemple, $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$ étant des quantités réelles quelconques et T une quantité > 1, il y aura des nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, parmi lesquels x_n est différent de zéro, de

sorte que les valeurs absolues de

$$x_1 - a_1 x_n, \quad x_2 - a_2 x_n, \quad \ldots, \quad x_{n-1} - a_{n-1} x_n, \quad \frac{x_n}{T^n}$$

soient toutes $< \frac{1}{T}$, excepté le cas où T est un nombre entier, et $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, abstraction faite de l'ordre, ont des expressions $\frac{T_1}{T}, \frac{T_2}{T^2}, \ldots, \frac{T_{n-1}}{T^{n-1}}$, dans lesquelles $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ sont des nombres entiers premiers à T.

En appliquant le théorème (I) à la fonction Φ qui est définie à l'aide des $2n - 2$ formes

$$x_1 - a_1 x_n \pm \frac{x_n}{S}, \quad x_2 - a_2 x_n \pm \frac{x_n}{S}, \quad \ldots, \quad x_{n-1} - a_{n-1} x_n \pm \frac{x_n}{S},$$

on conclut que l'on peut toujours trouver des nombres entiers $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n$, sans diviseur commun et parmi lesquels x_n est positif, de sorte que les valeurs absolues de

$$\frac{x_1}{x_n} - a_1, \quad \frac{x_2}{x_n} - a_2, \quad \ldots, \quad \frac{x_{n-1}}{x_n} - a_{n-1}$$

soient plus petites qu'une quantité positive ε choisie à volonté, et en même temps

$$< \frac{n-1}{n x_n^{\frac{n}{n-1}}}.$$

A l'aide de certaines autres fonctions φ, on obtient les théorèmes analogues pour les quantités complexes.

Les théorèmes que j'ai exposés dans ma dernière lettre sont aussi des conséquences spéciales du théorème (I). De ce théorème découlent enfin les théorèmes de Dirichlet sur les unités complexes.

Ensuite j'établis cette généralisation du théorème (I) :

Pour toute fonction φ, satisfaisant aux conditions (A), (B), (C), on peut trouver n^2 nombres entiers l_{hk} à déterminant différent de zéro, de sorte que l'on ait

$$\varphi(l_{11}, l_{21}, \ldots, l_{n1})\, \varphi(l_{12}, l_{22}, \ldots, l_{n2}) \ldots \varphi(l_{1n}, l_{2n}, \ldots, l_{nn}) \leqq \frac{2^n}{1}.$$

Le déterminant $|l_{hk}|$ sera alors toujours $\leqq 1 . 2 \ldots n$.

Je fais aussi quelques remarques sur les cas extrêmes de cette relation. Des applications de ce théorème, je ne cite ici que ces deux :

Soient $a_{hk}(h, k = 1, 2, \ldots, n)$, n^2 quantités réelles à déterminant différent de zéro, et soit D la valeur absolue de ce déterminant. Il y aura ou n^2 nombres entiers l_{hk} à déterminant différent de zéro, de sorte que le système composé

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} l_{11} & \ldots & l_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ l_{1n} & \ldots & l_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & \ldots & b_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ b_{n1} & \ldots & b_{nn} \end{vmatrix}$$

satisfasse à toutes les n^n inégalités

$$\pm b_{h_1 1} b_{h_2 2} \ldots b_{h_n n} < \mathrm{D}, \qquad (h_1 = 1, 2, \ldots, n;\ h_2 = 1, 2, \ldots, n;\ h_n = 1, 2, \ldots, n),$$

ou n^2 nombres entiers l_{hk} à déterminant ± 1, de sorte que ce système composé, après une permutation convenable des lignes, prenne une forme

$$\begin{vmatrix} c_{11} & \ldots & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & \ldots & c_{nn} \end{vmatrix},$$

satisfaisant aux conditions

$$c_{hk} = 0, \qquad h > k,$$
$$0 < c_{11} \leqq c_{22} \leqq \ldots \leqq c_{nn},$$
$$0 \leqq c_{hk} < c_{hh}, \qquad h < k.$$

Une forme quadratique positive à n variables et à déterminant D peut toujours, par une substitution à coefficients entiers et à déterminant différent de zéro $\left[\text{dont la valeur absolue est } < 2^n \dfrac{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}{\left(\Gamma \frac{1}{2}\right)^n}\right]$, être transformée en une forme $\Sigma b_{hk} y_h y_k$, satisfaisant aux conditions

$$0 < b_{11} \leqq b_{22} \leqq \ldots \leqq b_{nn}, \qquad \pm 2 b_{hk} \leqq b_{hh}, \qquad (h < k),$$

$$b_{11} b_{22} \ldots b_{nn} < \left[\frac{2^n \Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)}{\left(\Gamma \frac{1}{2}\right)^n}\right]^2 \mathrm{D}.$$

Dans un autre Chapitre, je donne une nouvelle démonstration

des théorèmes que Kronecker a établis dans son Mémoire *Näherungsweise ganzzahlige Auflösung linearer Gleichungen.*

Enfin je procède à la méthode de réduction des formes quadratiques positives que vous avez donnée en dernier lieu dans vos lettres à Jacobi. Il résulte de vos développements que l'on peut transformer toute forme quadratique positive f à n variables par une substitution à coefficients entiers et à déterminant ± 1 en une forme $\Sigma b_{hk} y_h y_k$, qui satisfait à toutes les inégalités

$$\Sigma b_{hk} p_h p_k \geqq b_{mm},$$

où m est un des nombres $1, 2, \ldots, n$ et où $p_1, p_2, \ldots, p_n$ sont des nombres entiers quelconques, pour lesquels le plus grand diviseur commun de $p_m, p_{m+1}, \ldots, p_n$ est égal à 1.

Je démontre que parmi ces inégalités on trouve un nombre fini d'où dérivent toutes les autres.

Pour une forme donnée f, il y aura, en général, 2^{n-1} formes satisfaisant à ces inégalités, et qui se déduiront d'une seule par les 2^n substitutions

$$y_1 = \pm z_1, \qquad y_2 = \pm z_2, \qquad \ldots, \qquad y_n = \pm z_n.$$

Ces inégalités étant linéaires dans les coefficients b_{hk}, on en conclut que, pour la somme

$$\chi(D+1) + \chi(D+2) + \ldots + \chi(D+d),$$

$\chi(\Delta)$ désignant le nombre des classes de formes à coefficients entiers et à déterminant Δ, il existe une expression asymptotique

$$\gamma D^{\frac{n-1}{2}} d.$$

Je démontre que l'on a

$$\gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{2}{2}\right)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\cdots\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^{2+3+\ldots+n}} S_2 S_3 \ldots S_n,$$

S_h désignant la somme

$$1 + \frac{1}{2^h} + \frac{1}{3^h} + \frac{1}{4^h} + \ldots.$$

A l'aide de ce résultat, j'arrive enfin au théorème suivant :

$\psi(x_1, \ldots, x_n)$ *étant une fonction quelconque, continue aux*

variables $x_1, \ldots, x_n$ et satisfaisant aux conditions (A) *des fonctions* φ [*ou aux conditions* (A) *et* (C)], *et* I *désignant la valeur de l'intégrale* $\int \ldots \int dx_1 \ldots dx_n$ *étendue sur le domaine* $\psi(x_1, \ldots, x_n) \leqq 1$, *on peut toujours trouver* n^2 *quantités réelles* a_{hk} *à déterminant* 1, *de sorte que la relation*

$$0 < \psi(a_{11}y_1 + \ldots + a_{1n}y_n, \ldots, a_{n1}y_1 + \ldots + a_{nn}y_n) \leqq \sqrt[n]{\frac{S_n}{I}} \left(\text{ou} \leqq \sqrt[n]{\frac{2S_n}{I}}\right)$$

ne soit vérifiée par aucun système de nombres entiers $y_1, \ldots, y_n$.

En appliquant ce théorème à la fonction $\psi = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}$, il résulte une certaine limite inférieure de la limite précise du minimum des formes quadratiques positives, et cette limite donne lieu à l'observation suivante :

$\beta_n \sqrt[n]{D}$ désignant la limite précise du minimum des formes quadratiques positives à n variables et à déterminant D, on a

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{\log \beta_n}{\log n}\right) = 1.$$

EXTRAIT D'UNE LETTRE ADRESSÉE A M. HERMITE;

PAR M. F.-GOMES TEIXEIRA.

Permettez, Monsieur, que je vous présente une manière bien simple de former des fonctions analytiques qui admettent pour espace lacunaire un cercle. Je m'appuierai sur le théorème suivant, dont on trouve une démonstration bien simple dans le *Traité d'Analyse* de M. Picard (t. II, p. 138).

Si les fonctions $f_1(z), f_2(z), f_3(z), \ldots$ peuvent être représentées par les développements suivants, dans les environs du point z_0,

$$\begin{aligned} f_1(z) &= a'_0 + a'_1(z - z_0) + a'_2(z - z_0)^2 + \ldots, \\ f_2(z) &= a''_0 + a''_1(z - z_0) + a''_2(z - z_0)^2 + \ldots, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

et si la série suivante, que l'on obtient en remplaçant chaque terme des précédentes par son module et en additionnant ensuite

les résultats,

$$\begin{aligned}&|a'_0| + |a'_1|\,|z - z_0| + |a'_2|\,|z - z_0|^2 + \ldots\\ &+ |a''_0| + |a''_1|\,|z - z_0| + |a''_2|\,|z - z_0|^2 + \ldots\\ &+ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

est convergente dans les environs du même point, le produit

$$\prod_{n=1}^{\infty} [1 + f_n(z)]$$

représente une fonction holomorphe de z dans les environs du point z_0.

Cela posé, je considère le produit

$$(1) \qquad \prod_{n=2}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n}\right],$$

et je remarque premièrement que ce produit est convergent quand $|z| > 1$, parce qu'il est alors

$$\lim_{n=\infty} \frac{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n}{\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} |z|^{n+1}} = \frac{1}{|z|} < 1.$$

Soit donc $|z_0| > 1$. Nous avons, dans les environs de ce point,

$$\frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z^n} = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n z_0^n}\left[1 - n\frac{z - z_0}{z_0} + \frac{n(n+1)}{2}\frac{(z - z_0)^2}{z_0^2} + \ldots\right],$$

et le théorème précédent fait voir que le produit (1) représente une fonction de z holomorphe dans les environs de z_0 quand la série

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n |z_0|^n}\left[1 + n\frac{|z - z_0|}{|z_0|} + \frac{n(n+2)}{2}\frac{|z - z_0|^2}{|z_0|^2} + \ldots\right]$$

est convergente.

Mais cette série est équivalente à la suivante :

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n |z_0|^n} \left(1-\frac{|z-z_0|}{|z_0|}\right)^{-n},$$

qui est convergente quand

$$|z-z_0| < |z_0| - 1,$$

parce qu'alors le rapport d'un terme précédent tend vers la limite, inférieure à l'unité,

$$\frac{1}{|z_0|\left(1-\frac{|z-z_0|}{|z_0|}\right)}.$$

Donc la série précédente est convergente dans le cercle dont le centre est le point d'affixe z_0 et dont le rayon est égal à la quantité positive $|z_0| - 1$, et le produit (1) représente une fonction holomorphe dans les environs du point z_0.

Le point z_0 est d'ailleurs un point quelconque tel que l'on ait $|z_0| > 1$. Le produit (1) représente donc une fonction holomorphe à l'extérieur du cercle de rayon égal à l'unité.

Je remarquerai maintenant que les racines de la fonction (1) sont données par l'équation

$$\frac{1}{\left(1-\frac{1}{n}\right)^n z^n} = 1,$$

en attribuant à n les valeurs 2, 3, 4, ..., et que cette équation donne

$$z = \frac{e^{\frac{2ki\pi}{n}}}{1-\frac{1}{n}} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Donc les racines qui correspondent à chaque valeur de n peuvent être représentées par des points d'une circonférence de rayon égal à $\frac{1}{1-\frac{1}{n}}$ et ces points divisent la circonférence en n parties égales.

Quand n tend vers l'infini, le rayon de la circonférence précédente tend vers l'unité et les points qui représentent les racines de

la fonction (1) augmentent d'une telle manière que, dans le voisinage de chaque point de la circonférence de rayon égal à l'unité, il y a une infinité de points qui représentent des racines de la fonction (1). Comme les racines des fonctions holomorphes doivent être séparées par des intervalles finis, il n'existe donc qu'une fonction holomorphe qui soit la continuation, à l'intérieur du cercle de rayon égal à l'unité, de la fonction (1).

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

EMANUEL CZUBER. — THEORIE DER BEOBACHTUNGSFEHLER. Leipzig. Teubner. 1891.

Le titre de l'Ouvrage de M. E. Czuber en indique nettement la portée. C'est un Livre purement théorique. L'auteur s'est proposé « d'exposer de la façon la plus complète et la plus méthodique qu'il lui serait possible de le faire les fondements scientifiques et les développements de la théorie des erreurs. Il n'est pas entré dans le domaine si étendu et si varié des applications de cette théorie et ne s'est pas occupé de la pratique des calculs. Il a cherché à faire un Livre utile à ceux qui veulent connaître la métaphysique de cette théorie et les questions mathématiques qu'elle soulève et aussi à ceux qui, ayant à l'appliquer, veulent en connaître les bases d'une manière approfondie ».

L'auteur a eu le courage d'entreprendre un travail des plus difficiles à mener à bonne fin. Tous ceux qui liront son Ouvrage admireront avec quel talent et quelle clarté il a su ordonner et exposer les nombreux travaux auxquels la théorie des erreurs a donné lieu. Mansfield Merriman, qui a publié une liste de ces travaux en 1877, dans les *Connecticut Transactions*, t. IV, a reproduit les titres de 408 Ouvrages, et cette liste s'est notablement allongée depuis. La lecture des 410 pages du Livre de M. Czuber dispensera sans doute le lecteur le plus scrupuleux de celle d'un grand nombre de ces écrits et rendra toujours facile celle des autres.

L'Ouvrage est divisé en trois parties, consacrées, la première aux erreurs linéaires d'observation, c'est-à-dire aux erreurs que peuvent offrir diverses mesures d'une même grandeur, erreurs auxquelles correspondent divers points d'une droite si l'on porte sur cette droite, à partir d'un même point, les valeurs fournies par les mesures; la seconde à la méthode des moindres carrés employée pour obtenir le système le plus avantageux de valeurs d'inconnues liées linéairement à des quantités mesurées, en supposant que le nombre des mesures surpasse celui des inconnues; la

troisième à la théorie des erreurs de position d'un point dans le plan et dans l'espace.

I. La première Partie, qui compte 231 pages, est divisée en 11 Chapitres. Après avoir donné les définitions ordinaires, entre autres celle de la loi d'erreur $\varphi(\varepsilon)$, l'auteur passe en revue les principes généraux relatifs au meilleur choix à faire pour la valeur de la quantité mesurée. Il indique successivement le premier point de vue de Gauss consistant à rendre maximum le produit $\varphi(x-l_1)\varphi(x-l_2)\ldots\varphi(x-l_n)$, celui de Laplace conduisant à une valeur x telle qu'il y ait même probabilité pour une valeur plus grande et pour une valeur plus petite, et le second point de vue de Gauss rendant minimum l'erreur moyenne, c'est-à-dire la somme des produits des carrés des erreurs par leurs probabilités. Dans le troisième Chapitre, M. Czuber étudie le principe de la moyenne arithmétique. Il rappelle les travaux de Lagrange et reproduit deux des problèmes traités par lui, donne la démonstration de Laplace de la probabilité que la somme des erreurs des mesures d'une grandeur donnée ait une valeur donnée, reproduit les critiques d'Ellis et Tait contre le principe de la moyenne, la remarque de Glaisher que les diverses règles que l'on peut adopter coïncident si les erreurs sont très petites. D'autres recherches, entre autres celles de Encke, Schiaparelli, Stone, de Morgan Ferrero, ont pour objet de déduire la règle de la moyenne arithmétique d'hypothèses conformes à la nature des choses. L'auteur expose en terminant ce Chapitre les idées de Estienne qui propose de ranger les résultats des mesures par ordre de grandeur et de prendre celui qui occupera le milieu de la série ou, si leur nombre est pair, une valeur quelconque choisie entre les deux qui occupent le milieu. L'auteur critique avec sûreté et avec la plus parfaite netteté ces divers travaux.

Le quatrième Chapitre est consacré à la recherche de la loi d'erreur qui résulte de l'axiome de la moyenne arithmétique. L'auteur donne la première méthode de Gauss, reproduit cette remarque de M. J. Bertrand qu'il y a des cas où la moyenne arithmétique est sûrement la valeur la plus probable, tandis que la loi d'erreur n'a que le caractère de loi approchée ou limite, et la recherche du même auteur sur la forme générale de la loi d'erreur

en supposant seulement que la probabilité d'une erreur dépend de cette erreur. Il rattache le résultat à l'un des postulats de Schiaparelli, indique des applications de Reuschle à des formes particulières et termine en remarquant que, si toute loi d'erreur conduit à un mode le plus avantageux de combiner les observations, la réciproque n'est pas vraie, et qu'en particulier il n'y a pas de loi d'erreur conduisant à prendre comme valeur la plus probable la moyenne géométrique des résultats des mesures.

Le cinquième Chapitre, intitulé : *La loi d'erreur fondée sur l'hypothèse des erreurs élémentaires,* renferme des recherches des plus importantes et difficiles. Une erreur x est une fonction donnée $f(\xi)$ d'une quantité ξ qui peut avoir toutes les valeurs entre $-\alpha$ et $+\alpha$. On donne la loi $g(\xi)$ de probabilité des valeurs de ξ. La loi $\varphi(x)$ de l'erreur x est égale à $\frac{g(\xi)}{f'(\xi)}$. Le problème est simple et la solution aisée. Une erreur x provient de deux causes produisant des erreurs élémentaires x_1, x_2 dont les lois de probabilité sont $\varphi_1(x_1)$, $\varphi_2(x_2)$. La loi $\varphi(z)$ de probabilité de z est représentée par $\int \varphi_1(x_1)\, \varphi_2(z - x_1)\, dx_1$, l'intégrale étant étendue à toutes les valeurs de x, compatibles avec la valeur z. L'auteur expose la marche donnée d'abord par Schols, dans les *Ann. de l'École Polyt. de Delft,* donne une formule de M. Crofton, rappelle les recherches de Bessel, d'autres plus récentes de Kummel et Schols, puis étudie trois hypothèses élémentaires : la première limitée à ce que des erreurs élémentaires égales, provenant de causes différentes, aient même probabilité, a donné lieu aux recherches de Laplace, et, dans des cas particuliers, de von Hagen et de Tait; la deuxième, qui est la base des recherches de Bessel est relative à des erreurs produites par un grand nombre de causes agissant suivant des lois et entre des limites arbitraires, de telle façon, seulement, que des erreurs positives ou négatives numériquement égales soient également fréquentes, et que les valeurs probables des carrés des erreurs élémentaires soient de même ordre; la troisième, qui sert de base à une théorie de M. Crofton, est que l'erreur d'observation soit produite par un très grand nombre de causes indépendantes dont chacune agissant seule produirait une erreur peu importante par rapport à celle qui résulte de l'ensemble des autres. Dans le

sixième Chapitre, l'auteur examine diverses démonstrations de la loi d'erreur, notamment une démonstration donnée par Adrain, à New-Brunswick, antérieure au *Theoria motus*, d'autres de Herschel, de Donkin et termine par une notice historique.

Le septième Chapitre traite de la *discussion d'une série d'observations d'après les erreurs vraies*. Il débute par certains développements en séries ou en fractions continues de la loi d'erreur et l'indication des tables de Kramp et de Bessel. Après avoir défini la mesure de la précision et les poids des observations et recherché pour quelles lois d'erreurs ces définitions ont un sens, l'auteur exprime la valeur probable de la mesure de la précision au moyen des sommes de puissances des erreurs. Généralisant une analyse de Laplace, il détermine la probabilité que la somme des valeurs absolues de $m^{\text{ièmes}}$ puissances des erreurs soit comprise entre des limites données et fait application à la loi de Gauss. Il donne une méthode de M. J. Bertrand pour déterminer la mesure de la précision, une méthode de Gauss pour calculer l'erreur probable d'après une seule erreur de la série et termine en cherchant la probabilité que la somme de n erreurs ait une valeur donnée, et de même la somme de leurs carrés.

Le huitième Chapitre : *Discussion d'une série d'observations d'après les erreurs apparentes,* contient les résultats les plus appliqués. La démonstration ordinaire de la formule connue pour l'erreur moyenne suppose nulle une somme qui peut ne pas l'être. Helmert a donné une démonstration rigoureuse. Après l'avoir reproduite, l'auteur en donne une autre qui lui est propre, fondée sur la recherche de la loi des erreurs apparentes d'après la loi des erreurs vraies. Il reproduit la démonstration de Peters fondée sur l'hypothèse que les erreurs apparentes obéissent à la loi de probabilité; Helmert a amélioré cette démonstration. Jordan a eu l'idée d'introduire les différences des mesures au lieu de leurs écarts à la moyenne arithmétique; et après lui Andrae et Helmert. L'auteur termine en examinant, d'après M. J. Bertrand, le cas où la constante qui caractérise la précision d'un système d'observation étant connue d'avance, on demande quelle influence doit avoir l'accord plus ou moins grand des mesures.

Dans le neuvième Chapitre : *Comparaison de la loi d'erreur à la réalité*, l'auteur applique de nombreuses vérifications à

diverses séries d'observations de Bradley ou de Bessel, aux erreurs de 2238 triangles mesurés à Modène par l'ingénieur Guarducci sous la direction du général Ferrero, à quarante déterminations microscopiques de la position d'un trait sur une règle faites en Angleterre. Il donne la vérification de Laurent fondée sur la comparaison de 1444 mesures d'un même angle au moyen d'un théodolite. Il termine en donnant d'autres vérifications fondées sur certaines combinaisons des erreurs, en particulier, le théorème trouvé empiriquement par le commandant Delauney que si l'on groupe les mesures deux à deux au hasard et que dans chaque groupe on choisisse la plus grande des deux erreurs, la valeur probable de cette erreur égale le produit par $\sqrt{2}$ de la valeur probable d'une erreur prise au hasard; M. J. Bertrand a démontré ce théorème et trouvé aussi la valeur probable du carré de la plus grande.

Le dixième Chapitre se rapporte à l'étude de la plus petite et de la plus grande erreur d'une série d'observations. La plus petite erreur est étudiée d'après M. J. Bertrand. La loi de Gauss ne se prête pas, au sens mathématique strict, à l'étude de la plus grande erreur puisqu'elle ne donne jamais une probabilité nulle d'une erreur si grande qu'elle soit. Jordan a remplacé l'exponentielle de Gauss par une fonction rationnelle entière convenablement déterminée.

Dans le onzième Chapitre, M. Czuber critique avec finesse et netteté les recherches relatives à la suppression des observations douteuses. Il reproduit les études faites sur ce sujet par MM. Bertrand, Peirce, Chauvenet, Stone, Airy, Faye, de Morgan et Glaisher.

II. La deuxième Partie de l'Ouvrage (111 pages) est consacrée à l'étude de la méthode des moindres carrés. Elle est divisée en neuf Chapitres. Dans les trois premiers, l'auteur, après avoir ramené un système d'équation à un système linéaire, rappelle que la méthode fut proposée sans démonstration en 1805 par Legendre et indépendamment par Adrain en 1808. Il expose la première démonstration de Gauss donnée dans le *Theoria motus* et fondée sur la loi d'erreur déduite du principe de la moyenne arithmétique et sur l'idée d'adopter les valeurs des inconnues conduisant à un système d'erreurs dont la coexistence ait la plus grande probabilité.

Le quatrième Chapitre est consacré aux recherches de Laplace qui, d'après M. Czuber, que personne ne contredira, sont incontestablement l'une des parties les plus difficiles de sa *Théorie des probabilités*. Les démonstrations de Laplace sont exposées au moyen des notations universellement adoptées aujourd'hui. Elles se rapportent d'abord aux équations à une inconnue et sont fondées sur la recherche soit de la valeur pour laquelle il y a la plus grande probabilité que son erreur soit comprise entre des limites données, soit de la valeur pour laquelle il y a la *plus petite valeur moyenne de l'erreur à craindre en plus*. Ensuite sont étudiées, d'après Laplace, les équations à deux inconnues. L'analyse de Laplace suppose une même loi d'erreurs rendant également probables des erreurs égales et de signes contraires.

Poisson, se limitant d'ailleurs au cas d'une seule inconnue, suppose seulement que toutes les erreurs possibles sont des multiples de l'une d'elles. Ellis et Glaisher ont étendu la démonstration de Laplace à un nombre quelconque d'inconnues et l'ont simplifiée en introduisant, le premier une intégrale double de Fourier, le second une intégrale simple de Lejeune-Dirichlet; Ellis suppose encore la loi d'erreur paire; Glaisher ne le suppose pas, et sa démonstration est aussi générale que celle de Poisson. M. Czuber donne une démonstration fondée sur les travaux de ces trois auteurs. Le Chapitre se termine par une démonstration de Todhunter fondée sur l'emploi de deux intégrales définies multiples, démonstration fort intéressante et qui conduit à un résultat remarquable énoncé par Laplace dans le premier supplément à la Théorie analytique des probabilités et relatif à la probabilité que les déterminations $x, y, z, \ldots$ les plus avantageuses des inconnues admettent des erreurs $x', y', z', \ldots$.

Dans le cinquième Chapitre est exposée la seconde démonstration de Gauss. Celle de Laplace a le double inconvénient de supposer très grand le nombre des observations, et l'on ne sait jamais s'il l'est assez, et de reposer sur une analyse très difficile. Gauss s'est affranchi de ces deux inconvénients de la façon la plus heureuse; sa méthode suppose seulement qu'il n'y a pas d'erreurs systématiques de telle sorte que des erreurs égales et de signes contraires soient également fréquentes. Elle est fondée sur la considération des carrés des erreurs. L'exposé de la méthode est suivi d'une recherche de Glaisher sur la valeur moyenne d'une

fonction de l'erreur d'observation, qui conduit à un rapprochement entre l'analyse de Laplace et celle de Gauss. Le Chapitre se termine par une comparaison des deux démonstrations de Gauss. M. Bertrand a démontré que l'hypothèse introduite dans la seconde démonstration, que les carrés et les produits des erreurs soient négligeables, rend toutes les lois équivalentes.

Dans le sixième Chapitre, M. Czuber expose trois démonstrations d'Ivory, fondées sur des considérations étrangères à la théorie des probabilités. Dans la première Ivory remarque que l'influence de ε_t dans l'équation $\varepsilon = -l + ax$ diminue quand a augmente et inversement, de sorte que le cas est comparable à celui d'un levier soumis à une force donnée. La seconde est aussi fondée sur l'analyse. De même que de plusieurs séries d'observations on regarde comme la meilleure celle qui rend minimum le moyen carré d'erreur, de même de divers systèmes de valeurs d'inconnues on adoptera celui qui rendra minimum la somme des carrés des erreurs restantes. Dans sa troisième méthode, Ivory cherche à montrer que la méthode des moindres carrés est la seule qui s'accorde avec l'indépendance mutuelle des erreurs.

Le septième Chapitre est consacré à l'étude, d'après Gauss, de la précision des observations et des valeurs déduites des inconnues. L'auteur reproduit une critique de M. Bertrand relative au calcul de l'erreur moyenne et termine en cherchant si, en supposant connue la précision des observations, leur discordance peut influer sur la confiance que l'on a dans le résultat.

Dans le huitième Chapitre, l'auteur expose, d'après les travaux de Van Geer et Glaisher, la détermination au moyen de déterminants des valeurs des inconnues, de leurs poids et de leurs valeurs moyennes, et dans le neuvième il s'occupe de la précision d'une fonction de grandeurs directement mesurées ou calculées d'après des observations.

III. La troisième Partie (68 pages) est divisée en trois Chapitres.

Dans le premier, après avoir rappelé que c'est Adrain qui le premier a considéré les erreurs dans le plan, et qu'il en a tiré une démonstration de la loi des erreurs linéaires, l'auteur expose les remarquables travaux de Bravais sur les probabilités des erreurs

de situation d'un point, travaux qui renferment presque tous les résultats importants connus aujourd'hui sur ce sujet. Le principal est que les points d'égale probabilité dans un plan soient situés sur des ellipses concentriques et homothétiques et dans l'espace sur des ellipsoïdes également concentriques et homothétiques.

Il reprend ensuite les mêmes questions au point de vue de Bien-Aymé, en suivant une analyse de Todhunter. Il mentionne les travaux de Andrae et de Helmert sur la précision de la détermination d'un point dans le plan et expose une théorie récente de Schols, où la recherche de la loi d'erreurs dans le plan ou dans l'espace est rattachée à la théorie des moments d'inertie. Ce Chapitre se termine par une recherche de Schols, fondant l'étude des erreurs d'un point dans le plan et dans l'espace sur le principe énoncé dès 1709 par Cotes, que la position la plus probable d'un point dont on a plusieurs déterminations également probables est le centre de gravité des points ainsi déterminés.

Les deux autres Chapitres sont consacrés à l'étude de la précision de la détermination d'un point dans le plan et dans l'espace.

Le compte rendu qui précède indique assez quelle est la richesse du Livre de M. Czuber, où se trouvent réunis, dans l'ordre le plus méthodique, à peu près tous les travaux importants faits sur toutes les questions qui se rattachent à la théorie des erreurs. La lecture seule de l'Ouvrage peut faire apprécier à toute leur valeur la clarté et la sûreté de la critique, qualités maîtresses d'un pareil Livre. B. B.

Dr P. MANSION, Professor an der Universität Gent, Mitglied der Königl. Belgischen Akademie. — THEORIE DER PARTIELLEN DIFFERENTIALGLEICHUNGEN ERSTER ORDNUNG. Vom Verfasser durchgesehene und Vermehrte deutsche Ausgabe. Herausgegeben von *H. Maser*. 489 p. in-8°. Berlin, 1892.

M. Paul Mansion avait publié, il y a seize ans, une *Théorie des équations aux dérivées partielles du premier ordre* qui avait été couronnée, en 1873, par l'Académie de Belgique et qui, comme telle, parut dans les *Mémoires* de cette Académie. Ce fut le premier Livre complet sur ce sujet, et le mérite de M. Mansion ne fut pas petit d'avoir réuni, rapproché et ordonné les nombreux

travaux faits jusqu'à cette époque sur les équations du premier ordre. Les auteurs qui, depuis, ont traité la question se sont certainement largement servis de ce précieux travail.

A cause de la manière même dont il fut publié, le Livre de M. Mansion n'eut pas toute la publicité qu'il méritait et, depuis longtemps, il était devenu *très rare*. L'auteur s'est enfin décidé à en donner une seconde édition qu'il a revue et augmentée et dont il a confié la publication, en langue allemande, à M. H. Maser.

Depuis la première édition, de nombreux travaux de divers auteurs, en particulier les travaux de Lie et de son école, ont paru. Pour faire rentrer toutes ces nouvelles recherches dans son Volume, M. Mansion aurait été obligé d'en augmenter considérablement le cadre et, par suite, moitié pour éviter de profondes modifications, moitié parce que MM. Lie, Goursat et Forsythe ont récemment publié des Ouvrages sur le sujet, il s'est contenté d'y faire quelques petites additions et quelques changements d'exposition.

Le Livre dont je vais parler n'est donc pas nouveau, mais comme il est, à mon avis, trop peu connu, je me permettrai d'en faire un Compte rendu complet.

L'Ouvrage n'est pas fait pour des étudiants, pour des débutants : comme le dit l'auteur lui-même, il s'adresse « aux géomètres qui voudront s'initier à l'ensemble des travaux dont la théorie des équations aux dérivées partielles a été l'objet depuis Lagrange jusqu'à Lie ». Comme ce n'est pas un Livre pédagogique, M. Mansion a cru devoir conserver l'ordre historique, et il a fort bien fait. Il se trouve, d'ailleurs, que, par la nature même des choses, cet ordre procède du simple au composé, du facile au difficile, et qu'à mesure qu'on avance dans la lecture du travail on entre plus avant dans le sujet. Les démonstrations originales ne sont modifiées que juste ce qu'il fallait pour les rendre plus brèves et plus rigoureuses, sans leur enlever leur cachet spécial et sans masquer l'idée fondamentale de l'inventeur.

Au début, une introduction pour expliquer la formation des équations et définir l'intégrale. Tout de suite, après avoir donné la définition de l'intégrale complète de Lagrange, on passe à la généralisation de Lie. On apprend ce qu'il faut entendre par *intégrer* au sens attaché à ce mot par Lie : c'est trouver de la façon

la plus générale une multiplicité M_n, à n dimensions, d'éléments $z, x_1, x_2, \ldots, x_n, p_1, p_2, \ldots, p_n$ qui satisfasse, à la fois, à l'équation donnée

$$f(z, x_1, x_2, \ldots, x_n; p_1, p_2, \ldots, p_n) = 0$$

et à la relation différentielle

$$dz = p_1\,dx_1 + p_2\,dx_2 + \ldots + p_n\,dx_n.$$

Puis apparaît la classification des équations, par Lie, en équations linéaires, semi-linéaires et ordinaires suivant leur origine. Le problème est ainsi, dès l'entrée, posé dans toute sa généralité et l'on devine du même coup l'importance du rôle des intégrales complètes dans toute cette théorie.

L'introduction se termine par un premier Appendice qui est une longue Note historique sur les travaux parus sur l'existence de l'intégrale générale et sur les solutions singulières.

L'Ouvrage, proprement dit, est divisé en trois Livres.

Un Livre pour les travaux de Lagrange et Pfaff, un second pour la méthode de Jacobi, le troisième pour la méthode des caractéristiques de Cauchy généralisée par Sophus Lie. Chacun de ces Livres forme un tout bien homogène et chacun sert, pour ainsi dire, de Préface au suivant.

Le Livre I contient d'abord l'intégration d'une seule équation linéaire à une seule inconnue et un nombre quelconque de variables indépendantes.

Les équations simultanées n'y sont pas traitées et l'auteur les a laissées, à leur place, à la suite de l'exposition de la méthode de Jacobi, où elles se présentent naturellement.

Vient ensuite l'exposition de la méthode classique de Lagrange pour la détermination de l'intégrale complète d'une équation en x, y, z, p, q et une extension de Jacobi de cette méthode. Le Livre se termine par une exposition rapide du problème classique de Pfaff, l'extension de la méthode de Pfaff, par Gauss, au cas où le nombre des variables est impair, et l'application de la méthode de Pfaff à l'intégration des équations du premier ordre. Pfaff fut, ainsi, le premier à donner une méthode générale pour ramener l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre à celle d'équations différentielles ordinaires.

J'insisterai sur un point spécial très intéressant de ce premier Livre. Au § 7 du Chapitre I, l'auteur reproduit un Mémoire très intéressant de Jacobi (*Journal de Crelle*, t. II, p. 321-323) qui montre comment on ramène l'intégration du système spécial

$$Z_i = X_1 \frac{\partial z_i}{\partial x_1} + \ldots + X_n \frac{\partial z_i}{\partial x_n} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

d'équations linéaires simultanées, à m fonctions inconnues et n variables, à celle du système différentiel

$$\frac{dz_1}{Z_1} = \ldots = \frac{dz_m}{Z_m} = \frac{dx_1}{X_1} = \ldots = \frac{dx_n}{X_n}.$$

Cette proposition fournit à Jacobi un moyen pour faire l'extension de la méthode de Lagrange, vainement cherchée jusque-là. Jacobi montre comment, en désignant par $f = 0$ l'équation proposée et $f = 0$, $u_1 = c_1, \ldots, u_{2n-1} = c_{2n-1}$ les intégrales du système différentiel

$$\frac{dx_1}{\frac{\partial f}{\partial p_1}} = \ldots = \frac{dx_n}{\frac{\partial f}{\partial p_n}} = \frac{dz}{\sum_1^n p_k \frac{\partial f}{\partial p_k}} = \frac{dp_1}{-\frac{\partial f}{\partial x_1} - p_1 \frac{\partial f}{\partial z}} = \ldots = \frac{dp_n}{-\frac{\partial f}{\partial x_n} - p_n \frac{\partial f}{\partial z}},$$

on ramène l'intégration à celle de l'équation

$$U_1\, du_1 + \ldots + U_{2n-1}\, du_{2n-1} = 0,$$

traitée par Pfaff.

Dans cette nouvelle édition, l'auteur a ajouté deux Appendices à ce Livre. Dans l'un il donne une démonstration personnelle de la proposition de Jacobi dont nous venons de parler, exposée au § 7 du Chapitre I; dans l'autre il donne l'intégration *complète* de l'équation aux dérivées partielles des surfaces réglées en la ramenant à celle d'équations linéaires.

Nous entrons avec le second Livre dans la belle méthode de Jacobi. M. Mansion réunit d'abord, dans une sorte d'Introduction, toutes les propriétés des parenthèses de Poisson et de parenthèses analogues, qu'il définit, et donne immédiatement huit formes sous lesquelles on peut écrire la condition pour que les valeurs de p_1, $p_2, \ldots, p_n$ tirées de n équations

$$H_1(z, x_k, p_k) = a_1, \quad \ldots \quad H_n(z, x_k, p_k) = a_n,$$

vérifient la relation différentielle

$$dz = p_1\,dx_1 + \ldots + p_n\,dx_n.$$

C'est ce qu'il appelle les *conditions d'intégrabilité*.

Vient alors l'exposition de la méthode originale de Jacobi pour une seule équation $H_1 = a_1$ qui ramène le problème à l'intégration d'équations linéaires simultanées. La méthode est exposée dans tous ses détails, d'abord sous sa forme la plus générale, ensuite dans le cas où l'on résout les équations par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_n$ et dans ce dernier cas l'exposition originale a été modifiée de façon à la mettre à l'abri des objections de Gilbert que l'auteur reproduit, d'ailleurs, dans un Appendice placé à la fin du second Chapitre. La méthode de Jacobi s'étend alors, sans difficulté, comme l'avait fait remarquer Bour, à un système d'équations aux dérivées partielles simultanées. Bour, en faisant cette extension, avait fait une erreur qui fut relevée en 1871 par Mayer et la méthode ainsi rectifiée ne souffre aucune difficulté.

Toutes les autres méthodes qui, comme celle de Jacobi, consistent à chercher une intégrale complète ne diffèrent de celle de Jacobi, sauf la méthode de Korkine, que par le procédé employé pour intégrer les équations linéaires simultanées auxquelles conduit la méthode de Jacobi.

Clebsch remplace les équations linéaires par un système équivalent qui est *jacobien*, c'est-à-dire pour lequel toutes les parenthèses de Poisson des premiers membres, pris deux à deux, sont identiquement nulles, et tel, en outre, que chaque équation admette $n-1$ intégrales connues à l'avance. En appliquant à ce nouveau système la méthode de Jacobi, il simplifie considérablement l'intégration.

La méthode de Boole consiste à faire un changement de variables qui diminue le nombre des équations du système d'une unité. Étant donné un système complet de m équations aux dérivées partielles du premier ordre entre z et $m+n$ variables $x_1, x_2, \ldots, x_m$, $y_1, \ldots, y_n$, Boole remplace les n variables $y_1, y_2, \ldots, y_n$ par n fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_n$ de ces n variables qui sont des intégrales de l'une des équations de ce système qui, au préalable, ont été résolues par rapport aux dérivées $\frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_m}$. Il obtient ainsi un

nouveau système dans lequel une des équations s'intègre d'elle-même et les $(m-1)$ autres ne contiennent plus que $(m+n-1)$ variables indépendantes. En continuant de la sorte il est ramené finalement à intégrer une seule équation linéaire à m variables.

La plus élégante de toutes les méthodes est celle de Mayer. L'auteur, d'après une idée de Cauchy, introduit les valeurs initiales des variables indépendantes et arrive, d'un seul coup, par un changement de variables imaginé par P. du Bois-Reymond, à former le système différentiel dont l'intégration fournit celle du système linéaire jacobien aux dérivées partielles.

Enfin, au Chapitre V, M. Mansion a exposé brièvement la méthode de Korkine. Voici, en quelques mots, comment Korkine procède : Soient $f_1 = a_1, \ldots, f_m = a_m$ un système en involution, de m équations du premier ordre, *quelconques,* entre z et les n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$. On forme, d'abord, une intégrale complète

$$z + u + F(x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

de l'une des équations, $f_m = a_m$ par exemple, $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ étant des constantes et u la constante additive. On cherche alors à déterminer u en fonction de $y_1, \ldots, y_{n-1}$ de façon que l'intégrale z vérifie les $(m-1)$ autres équations. On prend pour variables nouvelles $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}, x_n$ dans ces $(m-1)$ équations et l'on obtient un système de $(m-1)$ équations entre $y_1, \ldots, y_{n-1}$, $q_1 = \frac{\partial u}{\partial y_1}, \ldots, q_{n-1} = \frac{\partial u}{\partial y_{n-1}}$ *qui ne contiennent plus* x_n et qui satisfont aux conditions d'intégrabilité. En continuant de la sorte, on arrive finalement à une seule équation à $(n-m)$ variables.

Le troisième et dernier Livre nous initie à la belle méthode des caractéristiques de Cauchy, magistralement généralisée par M. Lie. La méthode même de Cauchy pour trois variables x, y, z, p, q, complétée par la remarque de M. Bertrand, sert de début. Puis, vient la généralisation de cette méthode et l'exposition de Serret avec l'examen minutieux du cas critique signalé par M. Bertrand. Je ne parlerai pas ici de la méthode bien connue de Cauchy. M. Darboux, dans ses nombreux et remarquables travaux sur les équations aux dérivées partielles, a donné à cette méthode une forme géométrique qui en facilite singulièrement la compréhension et conduit naturellement à son extension. M. Mansion, tenant à rester

dans le domaine purement analytique, devait nécessairement passer ces considérations géométriques sous silence; il s'est simplement contenté de les indiquer.

La dernière méthode étudiée est celle de M. Lie. La démonstration est celle que Mayer a donnée pour montrer que la méthode de Lie pouvait être établie, comme généralisation de la méthode des caractéristiques, indépendamment de la théorie des groupes de transformations.

Enfin, ce troisième Livre se termine par un exposé succinct de la méthode générale de Lie qui est, pour ainsi dire, une synthèse des méthodes de Cauchy et Jacobi. Le procédé de Lie montre comment on peut, après avoir commencé l'application de la méthode de Jacobi, abandonner cette méthode pour terminer l'intégration par celle de Cauchy ou inversement.

Le but de l'auteur était d'exposer, dans ce Volume, les méthodes pour l'intégration *directe* des équations aux dérivées partielles du premier ordre avec une seule fonction inconnue; on voit, d'après ce Compte rendu détaillé, que ce but a été atteint dans toute la mesure du possible. M. Mansion, étant donné le cadre bien déterminé dans lequel il s'était confiné, n'avait donc à parler ni de l'existence des intégrales, ni des solutions singulières, ni de la théorie des groupes de transformations; cependant, pour rendre service aux chercheurs, il a reproduit à la fin de son Livre trois Mémoires de la plus haute importance. D'abord, la belle démonstration de Sophie de Kowalewski de l'existence des intégrales d'un système de m équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires à m fonctions inconnues, résolubles par rapport aux dérivées de ces m fonctions par rapport à une même variable. Ce théorème fournit la démonstration de l'existence de l'intégrale d'une équation aux dérivées partielles, *d'un ordre quelconque*, à une fonction inconnue.

Puis, deux Mémoires sur les équations aux dérivées partielles du second ordre. Le premier : *Recherches sur les méthodes d'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à une fonction inconnue et deux variables indépendantes* de V.-G. Imschenetsky, avait été tiré à très peu d'exemplaires et M. Mansion rend un véritable service aux mathématiciens en le publiant à nouveau. Le second, qui est la traduction d'un Mémoire

de M. Darboux : *Sur les équations aux dérivées partielles du second ordre*, paru dans les *Annales scientifiques de l'École Normale supérieure* en 1870, est, comme tous les travaux de ce géomètre, éminemment suggestif et l'on peut s'étonner, à bon droit, qu'il n'ait pas encore provoqué autant de travaux nouveaux qu'il aurait pu le faire. Espérons que la nouvelle publicité donnée à ce Mémoire par M. Mansion engagera les mathématiciens à étudier les équations du second ordre, qui ont peut-être été un peu délaissées.

C. Bourlet.

H. WEISSENBORN. — Zur Geschichte der Einfuehrung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert. 123 p. in-8. Berlin, Mayer and Müller, 1892.

Dans sa précédente étude sur Gerbert, dont le *Bulletin* a rendu compte en 1888 (t. XII, p. 283-288), M. Weissenborn, tout en concluant à l'emprunt direct de nos chiffres modernes aux Arabes d'Espagne, avait réservé la question des rapports personnels que le futur pape Sylvestre II aurait pu avoir avec des arithméticiens mahométans. C'est sur ce point que revient le nouveau travail du professeur d'Eisenach.

Il est parfaitement établi, par le récit de Richer, élève de Gerbert, que ce dernier acquit surtout ses connaissances mathématiques pendant le séjour de trois ans qu'il fit dans la Marche espagnole (967-970), alors que le comte Borel de Barcelone l'emmena d'Aurillac et le confia aux soins de l'évêque de Vich d'Osona. D'autre part, dans son *Algèbre* de 1685, Wallis signalait déjà deux lettres écrites vers 984 par Gerbert, alors à Reims; dans l'une, il réclame à l'abbé du monastère d'Aurillac un exemplaire qui avait été laissé chez lui d'un *Libellus de multiplicatione et divisione numerorum*, publié par *Joseph Hispanus;* dans l'autre, il demande à l'évêque de Gironc, de la part de l'archevêque de Reims, l'envoi du même *libellus,* dont, cette fois, il appelle l'auteur *Joseph Sapiens*.

On a naturellement pensé que ce traité arithmétique avait servi de modèle à Gerbert pour celui qu'il composa plus tard, vers 996,

sur le même sujet. Il convient toutefois de faire quelques réserves à cet égard; on doit, en effet, conclure de ces lettres que si Gerbert avait jamais vu ce livre de Joseph en Espagne, il ne l'avait pas emporté; peut-être l'ouvrage n'avait-il été composé qu'après 970, et Gerbert n'en avait-il appris l'existence que par les relations qu'il avait conservées avec les ecclésiastiques de la Marche espagnole, par exemple, l'abbé Garin, qui semble être celui qui laissa le livre à Aurillac. D'autre part, il n'est nullement prouvé que l'ouvrage en question soit parvenu à Reims; si Gerbert l'a réclamé en Espagne, cela peut indiquer que l'exemplaire d'Aurillac était perdu; son correspondant de Girone a pu également se trouver dans l'impossibilité de le satisfaire, car, vers cette époque (en 985), la ville de Barcelone fut saccagée par les Arabes.

Une autre lettre de Gerbert, écrite également vers 984 et adressée à un Lupitus, de Barcelone, demande à ce dernier la traduction qu'il avait faite d'un ouvrage astronomique (évidemment arabe). Ces diverses lettres suffisent à prouver qu'il y avait alors dans la Marche espagnole des gens capables soit de rédiger en latin, soit de traduire de l'arabe des écrits mathématiques. Si, pendant son séjour dans ce pays, Gerbert n'a connu personnellement ni Lupitus, ni Joseph, ce qui est possible, il est clair que l'enseignement qu'il y a reçu a mis à profit une circonstance qu'il eût été difficile de rencontrer à la même époque dans un autre pays de langue latine. Tout au contraire, il n'y a aucun indice sérieux que Gerbert ait jamais lui-même appris l'arabe, ni qu'il ait été en rapport personnel avec les Maures de l'Espagne.

M. Weissenborn a concentré ses efforts sur la détermination de la personnalité du *Joseph Sapiens Hispanus* des lettres de Gerbert. Il a institué dans ce but de minutieuses recherches méthodiques, qui lui ont révélé nombre de faits accessoires et qui, par là même, sont intéressantes à suivre. Je me contenterai d'en signaler les résultats :

1° *Joseph* n'était pas chrétien ni, en particulier, membre du clergé, comme on l'a supposé; dans ce cas, Gerbert aurait écrit *Josephus*.

2° L'épithète de *Sapiens*, dans la lettre à l'évêque de Girone, paraît être la transcription latine du mot hébraïque « chacham », surnom fréquent chez les Juifs. On comprend aisément, dans

cette hypothèse, pourquoi, dans la lettre à l'abbé d'Aurillac, à cette épithète se trouve substituée celle d'*Hispanus* (l'Espagnol).

3° Il y avait alors à Barcelone une colonie très importante de Juifs, s'occupant surtout de commerce, et en particulier du trafic des esclaves, en relation, par conséquent, avec leurs coreligionnaires des pays mahométans. D'autre part, le comte de Barcelone avait à son service des Juifs, pour son fisc ou pour ses monnaies, et il leur était nécessaire de savoir le latin.

La conclusion que *Joseph Sapiens* ait été un Juif de Barcelone (suffisamment lettré, sans être un savant de profession) n'est nullement établie avec certitude. Mais M. Weissenborn a su l'élever à un haut degré de probabilité.

Je signalerai, d'autre part, dans son étude, la remarque qu'au moins deux titres d'écrits mathématiques orientaux antérieurs au XIe siècle semblent, tels que Casiri les a conservés, indiquer chez les Arabes l'existence de l'abacus, qui a été généralement niée. L'un de ces titres : *De numeris per lineas et grana hordacea multiplicandis*, d'Alkindi (813-873), ne semble, en effet, pouvoir s'expliquer que d'un calcul sur l'abaque, avec des grains d'orge au lieu de jetons. Le second : *Tractatus fusior de indica numerorum arte, tabula ratiocinatoria inscriptus* d'Ali-ben-Ahmed Aboulcassem Almogetabi (mort en 986) est moins décisif, si l'on compare les autres titres d'ouvrages du même auteur : *De arte in tabulis sine litura numerandi*, ou *De arte calculatoria, manu et sine tabula exercenda*. Cette fois, il s'agit incontestablement de l'emploi de chiffres; mais il semble bien que, suivant la pratique des Hindous, ils étaient réellement tracés sur une tablette saupoudrée de sable, et que l'auteur enseignait à faire les calculs soit en corrigeant successivement les chiffres du résultat déjà obtenus (ce qui est la vraie méthode sur cette tablette, afin d'épargner la place), soit en procédant comme nous faisons, c'est-à-dire en écrivant séparément les produits partiels dans la multiplication, par exemple, donc sans correction de chiffre déjà posé, *sine litura*.

En tout cas, quand même aucun auteur arabe ancien n'aurait traité de l'abacus, on ne pourrait nullement en conclure que la pratique en était ignorée. Nous ne connaissons l'abaque des anciens que par quelques monuments et de rares allusions des litté-

rateurs, et cet abaque s'est perpétué pendant tout le moyen âge (tandis que celui de Gerbert n'a eu qu'une existence éphémère), sans que l'on écrivît sur le calcul avec les jetons avant l'invention de l'imprimerie. C'est que le papyrus ou le parchemin étaient trop coûteux pour être consacrés à un enseignement qui devait d'autant plus se transmettre oralement qu'il était destiné à apprendre à calculer sans écrire. L'abaque à jetons-unités est un instrument d'illettré; celui de Gerbert est fait pour qui sait lire, mais ne sait pas écrire ou écrit difficilement; les chiffres modernes ont successivement gagné à mesure que l'habitude d'écrire s'est répandue dans un cercle plus étendu. Voilà le point essentiel de l'histoire des procédés de calcul, et M. Weissenborn a eu le mérite d'être le premier à le mettre pleinement en lumière.

PAUL TANNERY.

FONTENÉ (G.). — L'HYPERESPACE A n — 1 DIMENSIONS. 1 vol. in-8°: XIII-132 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1892.

Le travail de M. Fontené est relatif à un hyperespace plus général que l'espace ou hyperespace non-euclidien, dans le sens habituel du mot : c'est-à-dire que l'auteur n'impose pas cette condition que le mouvement soit possible dans un hyperespace. La distance y est définie au moyen d'une *conclusion métrique générale,* et c'est les propriétés métriques de l'hyperespace ainsi défini que recherche l'auteur; nous signalerons en particulier les notions, fondamentales pour lui, du paramètre d'un rayon, et du paramètre d'un axe, qui caractérisent un espace doué d'une corrélation métrique générale.

J. T.

PETERSEN (J.). — MÉTHODES ET THÉORIES POUR LA RÉSOLUTION DES PROBLÈMES DE CONSTRUCTIONS GÉOMÉTRIQUES AVEC APPLICATION A PLUS DE QUATRE CENTS PROBLÈMES. Traduit par *O. Chemin.* 1 vol. petit in-8°: 110 p. 2e éd. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1892.

Nous sommes heureux d'annoncer la seconde édition de cet

excellent petit Livre, qui devrait se trouver entre les mains de tous ceux qui enseignent ou qui apprennent la Géométrie élémentaire (¹). J. T.

LAISANT. — Recueil de problèmes de Mathématiques. *Géométrie analytique à deux dimensions et Géométrie supérieure à l'usage des classes de Mathématiques spéciales.*

Notre collaborateur, M. Laisant, a eu l'heureuse idée de réunir et de classer les questions dont les énoncés ont été donnés, depuis cinquante ans, dans les divers Journaux mathématiques qui se rapportent à l'enseignement élémentaire (²). Son Livre rendra évidemment de grands services aux professeurs et aux élèves, à qui l'on ne peut demander de posséder ou de consulter les collections de ces divers Journaux.

MÉLANGES.

ESQUISSE D'UNE MÉTHODE POUR DÉTERMINER LE GENRE ET LES COURBES ADJOINTES D'UNE COURBE ALGÉBRIQUE DONNÉE AU MOYEN DES OPÉRATIONS RATIONNELLES;

Par M. TIKHOMANDRITZKY.

Par la méthode du plus grand commun diviseur on peut, d'après le théorème de Labatie (*voir* Serret, *Cours d'Algèbre supérieure*, 3e édition, p. 198), arriver à représenter les solutions communes du système composé de l'équation donnée de la courbe fondamen-

(¹) Voir *Bulletin*, t. V_1, p. 266.

(²) *Nouvelles Annales de Mathématiques. Nouvelle Correspondance mathématique* de M. Catalan. *Journal de Mathématiques élémentaires et spéciales* de Bourget. *Journal de Mathématiques élémentaires* de M. de Longchamps. *Journal de Mathématiques spéciales* de M. de Longchamps. *Mathesis.*

tale

$$(1) \qquad F(x, y) = 0,$$

et de quelques-unes des dérivées partielles de son premier membre par rapport à x et à y, égalées à zéro, par une série de paires d'équations de la forme

$$(2) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ \psi(x) = 0. \end{cases}$$

Pour chaque solution d'une telle paire d'équations, soit $x = a$, $y = b$, sans connaître ces valeurs, on saura les termes du développement de $F(a + \xi, b + \eta)$ qui s'évanouiront identiquement; on pourra donc écrire l'équation (2) de Briot (*Théorie des fonctions abéliennes*, p. 2)

$$(3) \qquad \Sigma A_{\alpha, \beta} \eta^{\alpha} \xi^{\beta} = 0,$$

où les exposants α et β seront parfaitement connus. On pourra donc construire la ligne polygonale P de Briot et pour le côté C_i de cette ligne l'équation

$$(4) \qquad L_i = A_{\alpha_i, \beta_i} \lambda^{k_i} + \Sigma A_{\alpha, \beta} \lambda^{k_i - k} + A_{\alpha_{i+1}, \beta_{i+1}} = 0,$$

où $\nu = \frac{\eta}{\xi^{\mu}}$, $\nu^p = \lambda$ (Briot, § 33). Maintenant il faut chercher pour lesquelles des solutions de la paire d'équations (2), l'équation (4) en λ n'a que des racines simples, et pour lesquelles elle a des racines multiples. Pour cela on cherche, au moyen de la méthode du plus grand commun diviseur, les solutions de (2) pour lesquelles les équations $L_i = 0$ et $\frac{dL_i}{d\lambda} = 0$ ont des solutions communes, et l'on aura ces solutions de (2) représentées par les paires d'équations de la forme

$$(5) \qquad \begin{cases} \varphi_i(x, y) = 0, \\ \psi_i(x) = 0; \end{cases}$$

alors, pour les solutions des paires d'équations

$$(6) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y) = 0, \\ \psi(x) : \Im(x) = 0, \end{cases}$$

et

$$(7) \qquad \begin{cases} \varphi(x, y) : \varphi_i(x, y) = 0, \\ \psi_i(x) = 0 \end{cases}$$

[où $\mathfrak{S}(x)$ est le plus petit commun multiple des $\psi_i(x)$], l'équation (4) n'aura que des racines simples, et la distribution des valeurs de y devenant égales à b pour $x = a$ en systèmes circulaires s'effectuera tout de suite (Briot), tandis que pour les valeurs représentées par (5) on aura besoin de la seconde transformation de Briot. On pourra arriver par la même méthode à représenter par les séries de systèmes de trois équations de la forme

$$(8) \qquad \begin{cases} f(x, y, \lambda) = 0, \\ \varphi(x, y) = 0, \\ \psi(x) = 0, \end{cases}$$

les valeurs de λ de multiplicité n', en cherchant les solutions communes de

$$(9) \qquad L_i = 0, \qquad \frac{dL_i}{d\lambda} = 0, \qquad \ldots, \qquad \frac{d^{n'-1}L_i}{d\lambda^{n'-1}} = 0.$$

En désignant par v_1 une des valeurs quelconques de $\sqrt[p]{\lambda}$, on posera $\xi = \xi'^p$, $\eta = (v_1 + \eta')\xi'^q$ dans l'équation (3) et en développant on aura l'équation

$$(10) \qquad \Sigma A'_{\alpha', \beta'} \eta'^{\alpha'} \xi'^{\beta'} = 0$$

(Briot, p. 10), où les $A'_{\alpha', \beta'}$, seront les polynômes en v_1 avec les coefficients fonctions linéaires des $A_{\alpha, \beta}$. On cherchera pour lesquelles des solutions de (8) (après y avoir remplacé λ par v_1^p) quelques-uns des $A'_{\alpha', \beta'}$ s'annuleront identiquement; on saura donc pour ces solutions, qui seront représentées de même par les équations de la forme (8), tous les $A'_{\alpha', \beta'}$, qui restent dans (10) et l'on pourra construire la ligne polygonale P' (Briot, p. 10) et l'équation

$$(11) \qquad L'_i = 0,$$

pour son côté C'_i. Pour les racines simples de cette équation, la *seconde transformation* suffira; les valeurs de x, y, v correspondantes seront représentées par les systèmes de trois équations de trois formes analogues à (6) et à (7). Pour les solutions multiples on passera à la *troisième transformation*, en posant $\xi' = \xi''^{p'}$, $\eta' = (v'_1 + \eta'')\xi''^{q'}$ (Briot) et l'on arrivera à représenter par les sys-

têmes de quatre équations de la forme

$$(12)\qquad \left\{\begin{aligned} F(x, y, v_1, v_1') &= 0,\\ f(x, y, v_1) &= 0,\\ \varphi(x, y) &= 0,\\ \psi(x) &= 0 \end{aligned}\right.$$

les valeurs de v_1' qui annulent quelques-uns des $A''_{\alpha'', \beta''}$ dans l'équation transformée

$$(13)\qquad \Sigma A''_{\alpha'', \beta''} \eta''^{\alpha''} \xi''^{\beta''} = 0.$$

Ainsi, par la seule méthode du plus grand commun diviseur, on parviendra à connaître tous les $\alpha, \beta, \ldots, \alpha', \beta', \ldots, \alpha'', \beta'', \ldots$ par lesquels sont exprimées chez Briot les $A_{a,b}$, les $D_{a,b}$, les $N_{a,b}$, enfin le genre p de la courbe.

2. Les courbes adjointes de *Nöther* se comportant aux points singuliers comme le polynôme $Q(x, y)$ de Briot, on peut se borner à ne considérer que ce polynôme. Par la substitution $x = a + \xi$, $y = b + \eta$, on l'amènera à la forme

$$(14)\qquad \Sigma B_{\gamma,\delta} \eta^{\gamma-1} \xi^{\delta-1},$$

où $B_{\gamma,\delta}$ sont les fonctions entières de a et de b avec les coefficients fonctions linéaires des coefficients indéterminés de $Q(x, y)$. Pour les γ et δ qui se rapportent aux points situés au-dessous de la ligne polygonale P, on doit avoir

$$(15)\qquad B_{\gamma,\delta} = 0.$$

Mais les valeurs de a et b qui y entrent ne sont que définies par les équations (6) et (7); en supposant toujours ces dernières amenées à ne pas contenir de facteurs multiples, on divisera donc $B_{\gamma,\delta}$ (après y avoir changé a et b en x et y) par $\varphi(x, y)$: le reste devant être identiquement nul pour les valeurs considérées de x, on divisera chacun de ses coefficients par $\psi(x) : \mathfrak{I}(x)$ et l'on égalera à zéro les coefficients des restes que l'on aura reçus : ce seront les équations linéaires en coefficients de $Q(x, y)$ pour

les déterminer. On fera de même avec les paires d'équations (7) en faisant la première division d'après les règles des fractions, et l'on aura de nouvelles conditions linéaires en coefficients indéterminés de $Q(x, y)$. Pour les valeurs de x et de y, pour lesquels l'équation en λ a des racines égales, on fera dans (14) la substitution $\xi = \xi'^p$, $\eta = (v_1 + \eta')\xi'^q$ et l'on aura

$$(16) \qquad \Sigma B'_{\gamma,\delta}\eta'^{\gamma-1}\xi'^{\delta-1},$$

où pour les valeurs de γ' et δ' se rapportant aux points situés au-dessous de la ligne polygonale P' on aura

$$(17) \qquad B'_{\gamma',\delta'} = 0,$$

les $B'_{\gamma',\delta'}$ étant des polynômes en v_1 avec les coefficients fonctions linéaires de $B_{\gamma,\delta}$, par suite aussi fonctions linéaires des coefficients de $Q(x, y)$. Ces équations devant être satisfaites par toutes les valeurs de v_1 déterminées par les systèmes d'équations de la forme

$$(18) \qquad \left\{ \begin{aligned} f(x, y, v_1) &= 0, \\ \varphi(x, y) &= 0, \\ \psi(x) &= 0, \end{aligned} \right.$$

on divisera $B'_{\gamma',\delta'}$ par $f(x, y, v_1)$ après l'avoir disposé suivant les puissances descendantes de v_1; les coefficients du reste de la division par $\varphi(x, y)$; les coefficients du reste de cette seconde division par $\psi(x)$ et les coefficients du reste de cette dernière division on égalera à zéro : on aura ainsi les conditions linéaires en coefficients indéterminés de $Q(x, y)$. Ainsi de suite. Toutes les équations que l'on aura reçues de cette manière étant linéaires en coefficients indéterminés de $Q(x, y)$, on les aura au moyen d'opérations rationnelles.

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Ohm (G.-S.). — *Gesammelte Abhandlungen. Herausgegeben und eingeleitet von E. Lommel.* Gr. 8°, xx-855 S. m. Fig. und Bildniss in Heliograv. Leipzig, Barth. Geb. 20 M.

Violle (J.). — *Lehrbuch der Physik. Deutsche Ausgabe von E. Gumlich, L. Holborn u. A.* 1. *Thl. Mechanik.* 2. *Bd. Mechanik der flüssigen und gasförm. Körper.* Gr. 8°, xi u. S. 497-992 m. 309 Fig. Berlin, Springer. 10 M.; geb. 11 m. 20 Pf.

Weber (H.). — *Wilhelm Weber. Eine Lebensskizze.* Mit Bildnis aus d. J 1884. Gr. 8°, iii-111 S. Breslau, Trewendt. 2 M.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CANTOR (MORITZ). — VORLESUNGEN UEBER GESCHICHTE DER MATHEMATIK. Zweiter Band, zweiter Theil. x-363 p. in-8°. Leipzig, Teubner; 1892.

Dans le numéro d'août 1892 du *Bulletin*, j'ai rendu compte de la première Partie du nouveau Volume qui conduit l'histoire des Mathématiques jusqu'en 1668, c'est-à-dire jusqu'au moment où apparaissent Leibniz et Newton.

La seconde Partie, dont l'impression avait été retardée par une grève, ne s'est fait attendre que quelques mois, et nous avons ainsi dès maintenant l'occasion de répéter les éloges dus à une œuvre aussi remarquable par la justesse de la critique que par l'abondance des renseignements.

Cette seconde Partie (de 1550 à 1668) se distingue au reste de la première en ce que l'auteur, tout en conservant une division approximative par demi-siècles, a dû renoncer à la subdivision géographique et lui substituer un classement par ordre de matières. Voici au reste le sommaire des Chapitres :

DE 1550 A 1600. — 67. Histoire de la Mathématique. Éditions des classiques. Géométrie. Mécanique. — 68. Suite de la Géométrie et de la Mécanique. Cyclométrie et Trigonométrie. — 69. Calcul et Algèbre.

DE 1600 A 1668. — 70. Histoire de la Mathématique. Éditions des classiques. — 71. Géométrie. — 72. Mécanique pratique et théorique. — 73. Trigonométrie et Cyclométrie. — 74. Calcul. Logarithmes. — 75. Invention de méthodes. Calcul des probabilités. Fractions continues. Recueils de problèmes. — 76. Théorie des nombres. Algèbre. — 77. Solutions géométriques des équations. Géométrie analytique. — 78. Considérations infinitésimales. Kepler. Cavalieri. — 79. Descartes. Fermat. — 80. Roberval. Torricelli. — 81. Grégoire de Saint-Vincent. Wallis. Pascal. De Sluse. Hudde. Van Heuraet.

Comme le reconnaît l'auteur, cet ordre de matières n'est pas sans inconvénient; mais entre deux maux il faut bien choisir le

moindre; mieux vaut encore trouver l'œuvre d'un mathématicien découpée dans les fragments de divers Chapitres, mais pouvoir suivre, sans interruption, le développement historique d'une même théorie pendant un intervalle de temps suffisamment étendu. Seulement la conclusion à tirer de là, c'est que pour continuer l'histoire des Mathématiques après 1668 (pourquoi M. Cantor n'a-t-il pas voulu nous promettre de le faire?) il serait préférable d'adopter un plan général tout à fait différent, en abandonnant complètement la division chronologique et en traitant séparément de chaque branche de la Science. A partir du moment où les Académies scientifiques fonctionnent et où la matière historique augmente démesurément, l'ensemble de la Science ne peut plus être considéré que dans des aperçus sommaires, auxquels se prêteraient d'ailleurs peut-être mieux des monographies détaillées de grands mathématiciens convenablement choisis. Mais vouloir continuer à décrire pas à pas le progrès sur tous les points, ce serait se condamner à ne mettre au jour qu'un fouillis aussi incommode pour les recherches spéciales que peu instructif pour une lecture suivie.

M. Cantor s'est arrêté juste à temps pour éviter cet écueil. L'intéressante période qu'il a étudiée en dernier lieu lui a fourni ample matière pour déployer son rare talent d'exposition, et si je signale en particulier les pages qui concernent l'invention des logarithmes ou celles qui sont consacrées tant à la *Doliométrie* de Kepler qu'aux *indivisibles* de Cavalieri, ce n'est pas que les autres sujets soient moins heureusement traités, c'est que ceux-là sont généralement plus mal connus ou même ont été jusqu'à présent exposés d'une façon singulièrement inexacte.

Je ne pense pas, en somme, qu'il soit possible d'adresser à l'œuvre de M. Cantor une critique sérieuse ayant quelque gravité. La minutie des remarques que je vais consigner ci-après fera peut-être mieux ressortir la portée de cette déclaration.

P. 509. — Dans la traduction de Diophante par Xylander, se trouve un signe d'égalité consistant en deux barres parallèles, mais verticales. Comme aucun précédent n'est connu, M. Cantor demande si dans le manuscrit grec dont Xylander s'est servi, le mot ἴσοι n'était pas abrégé en deux ι. Je crois avoir assez étudié

de manuscrits de Diophante pour pouvoir répondre négativement. Toutefois on y trouve fréquemment une abréviation ayant la forme suivante ϙ, et qui est remarquable en ce qu'elle se confond presque avec celle d'ἀριθμός, c'est-à-dire de la première puissance de l'inconnue.

P. 510. — En transcrivant en français le nom de l'évêque d'Aire qui, au XVIe siècle, édita les Éléments d'Euclide en 1566 et 1578 à Paris (*Authore Francisco Flussate Candalla*), M. Cantor conserve à tort la forme *Candalla*. La branche *Candale*, cadette de la seconde maison de *Foix* (*Flussas*), avait d'ailleurs emprunté son titre à un comté anglais (Kendal) dont avait été gratifié son chef, un Grailly, captal de Buch. Ce titre de Candale devait plus tard passer dans la maison d'Épernon et devenir duché-pairie.

P. 582. — Dans l'édition Elzevier de Viète, pour les traités *de Recognitione* et *de Emendatione æquationum*, il me semble qu'on doit attribuer à Anderson les démonstrations *en petit texte*, mais à Viète les exemples *en italique*. Sur ce dernier point, je suis donc d'accord avec M. Cantor, ainsi que sur les conclusions qu'il en tire.

P. 605. — Libri a avancé que le père de Fermat était marchand de cuirs. Le fait n'est rien moins que prouvé; car, si Dominique Fermat avait à Toulouse des parents portant son nom et exerçant ce commerce, on sait seulement de lui qu'il était bourgeois et second consul de Beaumont-de-Lomagne, où Pierre Fermat naquit et fut élevé. Au reste, dans l'anecdote empruntée à l'*Histoire générale du Languedoc* (XIII, p. 149) et citée par M. Ch. Henry dans ses *Recherches sur les manuscrits de Fermat* (p. 72), s'il est parlé d'une boutique de la maison Fermat, il faut entendre simplement que dans la maison habitée par le géomètre conseiller au Parlement, il y avait des boutiques au rez-de-chaussée.

P. 606. — Chasles (*Aperçu*, p. 65) parle d'une lettre à Roberval où Fermat aurait annoncé avoir trouvé beaucoup d'autres *lieux plans* « très beaux et dignes de remarque » que ceux d'Apollonius. Cette lettre est celle du 20 avril 1637 (*Varia op.*,

p. 154). En réalité Fermat y parle de ses découvertes sur les lieux en général « et particulièrement les lieux solides et *ad superficiem* ». A cette date, il n'avait pas encore communiqué à Roberval son *Isagoge ad locos planos et solidos,* ni rédigé son *Isagoge ad locos ad superficiem,* envoyé à Carcavi en 1643 seulement.

P. 610. — Albert Girard, en distinguant les différentes formes possibles des polygones, a énoncé qu'il y a quatre sortes de pentagones dont les côtés ne se coupent pas. Günther (*Vermischte Untersuchungen,* p. 19) a remarqué qu'on ne peut concevoir que les cas de 0, 1, 2 angles rentrants, et a conclu que Girard s'était trompé. Mais on doit distinguer, dans le cas de deux angles rentrants, celui où les deux sommets sont voisins et celui où ils ne le sont pas. Il y a donc bien en réalité quatre sortes de pentagones, au sens d'Albert Girard.

P. 623. — Il est dit par inadvertance qu'en 1654 la Société de mathématiciens à laquelle Pascal adressa son placard : *Celeberrimæ Matheseos Academiæ Parisiensi,* se réunissait chez Mersenne. Celui-ci était mort en 1648.

P. 624. — Le récit que Descartes, en lisant l'*Essai pour les coniques* de Pascal (1640), aurait déclaré que ce ne pouvait être l'œuvre d'un jeune homme de seize ans, et qu'il devait avoir été composé soit par Desargues, soit par le père de Pascal, est rejeté comme sans fondement. Il provient en réalité d'un passage d'une lettre de Descartes à Mersenne (éd. Clerselier, II, 38), écrite en avril 1640. « J'ay receu aussi l'Essay touchant les Coniques du fils de M. Pascal, et auant que d'en auoir lû la moitié, j'ay jugé *qu'il auoit apris de Monsieur Desargues :* ce qui m'a esté confirmé incontinent après, par la confession qu'il en fit luy-mesme. » Ramené à cette forme authentique, le jugement porté par Descartes ne peut soulever aucune contradiction. M. Cantor a reproduit lui-même (p. 622) les termes dans lesquels Pascal s'exprime sur l'aide qu'il a tirée des écrits de Desargues, et noté l'emploi, dans l'*Essai sur les coniques,* d'expressions techniques, introduites par l'auteur du *Brouillon-projet.*

La citation de Descartes « *Je pense, donc je suis* », dans le fragment de Pascal *De l'esprit géométrique,* ne peut servir à

dater cet écrit après 1644, puisqu'elle est tirée du *Discours de la méthode*, qui est de 1637.

P. 672. — Il est imprimé que la base théorique des logarithmes calculée par Neper est $\left(\frac{10}{e^{0,1}}\right)^7$. Il faut lire $\frac{10^7}{e^{0,17}}$.

P. 692. — Dès 1636, Carcavi avait quitté le Parlement de Toulouse et était à Paris, conseiller au Grand Conseil; ce fut cette dernière charge qu'il vendit à la fin de 1647. Dès le commencement de 1648, il était attaché au duc de Liancourt.

P. 702. — Ce que dit Schooten dans ses *Exercitationes* de 1657 sur les nombres amiables doit lui avoir été fourni par Descartes dont la règle a été publiée par Clerselier (III, p. 379).

P. 706 *suiv.* — M. Cantor a emprunté diverses indications à l'article que j'ai publié ici même en 1883, *Sur la date des principales découvertes de Fermat*. A la suite des recherches plus approfondies que j'ai dû faire, afin de classer chronologiquement, dans l'édition de la correspondance de Fermat, les lettres non datées, j'ai reconnu que certaines de mes déterminations antérieures étaient inexactes. J'ai donc à les rectifier ici.

J'avais provisoirement daté de 1637 la lettre inédite dans laquelle Fermat a proposé à Sainte-Croix les problèmes impossibles qu'il devait plus tard reprendre pour Wallis et Brouncker. Je crois maintenant devoir la faire remonter à septembre ou octobre 1636.

Pour les lettres à Mersenne dans les *Varia*, p. 173 et 176, j'avais admis avec M. Ch. Henry la fin de 1635 ou le commencement de 1636. Une copie ancienne, où un extrait de la première est daté, la fixe au 1er avril 1640; la seconde doit être de juin.

Cette détermination a une grande importance pour l'histoire des travaux de Fermat sur la théorie des nombres.

P. 708. — La lettre de Fermat du 18 octobre 1640, dont le destinataire n'est pas nommé dans les *Varia* (p. 163), est certainement adressée à Frenicle.

P. 711. — La *Relation des découvertes en la Science des nombres* fut envoyée par Fermat à Carcavi peu de temps avant le

14 août 1659, date à laquelle elle fut communiquée par Carcavi à Huygens. A cette date Descartes était donc mort, aussi bien que Bachet.

P. 734. — La citation de la lettre à Mersenne du 26 décembre 1638, publiée par M. Ch. Henry (*Recherches*, p. 178), doit être corrigée d'après les manuscrits. Fermat dit que sa méthode pour les tangentes s'applique quand même l'expression de l'ordonnée contiendrait des irrationnelles, fût-elle *composée de centinomies ou* (non pas *antinomies en*) *plus grand nombre de termes*. Ce mot de *centinomie* rappelle celui de *multimodie algébrique*, introduit par Stevin. Mais Fermat l'a probablement forgé sur les expressions *solinomia, binomia*, etc., employées par Adrien Romain et par Viète dans sa réponse à ce dernier.

P. 736. — Si Beaugrand se procura un exemplaire de la *Dioptrique* de Descartes avant l'achevé d'imprimer, ce ne fut point en se faisant envoyer les feuilles de Leyde; il ressort des lettres de Descartes que celui-ci avait envoyé dès le commencement de 1637 un exemplaire en France pour l'obtention du privilège, qui est daté du 4 mai. Sous le prétexte de la demande de ce privilège, Beaugrand obtint de Mersenne la communication du livre et le garda.

P. 790. — Dans le premier Volume de l'édition nouvelle des *Œuvres de Fermat*, est publiée une *Réponse à des questions de Cavalieri* dont je n'avais pu indiquer la date que comme antérieure à 1644. J'ai depuis découvert la lettre de Cavalieri à Mersenne où sont posées ces questions; elle est du 23 novembre 1641; la lettre de Fermat est donc probablement du commencement de 1642. Il est à remarquer que dans ses *Exercitationes* de 1647, Cavalieri s'est abstenu d'utiliser les énoncés du géomètre de Toulouse, quoique Mersenne les eût reproduits déjà dans ses *Cogitata* de 1644, et qu'une application de la méthode des indivisibles à des propositions de quadrature avancées sans démonstration n'eût pu, ce semble, aucunement froisser Fermat. Le mathématicien italien crut sans doute se montrer plus galant homme en laissant à l'auteur de ces propositions l'occasion d'exposer sa propre méthode en donnant les démonstrations, ce que Fermat fit effecti-

vement dans son grand Traité (*Œuvres*, I, p. 255), composé vers 1660. Si Torricelli eût agi aussi loyalement avec Roberval, il eût évité les récriminations plus ou moins justifiées de ce dernier.

P. 300. — Le nom roturier de Roberval est plutôt *Personnier*, comme il est imprimé dans les *Mém. de l'Acad.*, que *Persone*, forme pour laquelle les autorités sont plus nombreuses, mais moins graves.

P. 302 *suiv.* — L'histoire des découvertes de Roberval a été embrouillée, quant aux dates, par suite des confusions de mémoire, involontaires ou non, commises par l'auteur dans le récit qu'il en a donné.

En ce qui concerne la quadrature de la cycloïde, elle est énoncée (ainsi que des cas particuliers pour la quadrature des cycloïdes allongées et raccourcies) dans le cahier des *Nouvelles observations physiques et mathématiques* (XIe observ., p. 24) de Mersenne, cahier qui fait suite à la *seconde partie de l'Harmonie universelle,* imprimée en 1637. Mais il manque la preuve que ce cahier soit bien de la même année, et il est remarquable que jamais Roberval, Pascal ou Carcavi n'ont indiqué, comme ancien témoignage imprimé, que celui de Desargues de 1640. En tout cas, Roberval, dans une lettre du 1er juin 1638, envoyait à Fermat un énoncé encore moins complet que celui qui se trouve dans l'imprimé de Mersenne. A la vérité celui-ci, au commencement de l'année, avait annoncé à Fermat la découverte de Roberval, mais en termes assez peu précis pour que le géomètre de Toulouse se soit contenté de douter de la réalité de la quadrature (lettre inédite de février 1638). Quant à Descartes, il reçut l'énoncé pour la cycloïde ordinaire dans une lettre de Mersenne du 28 avril ou du 1er mai 1638 (éd. Clerselier, III, 67); il donna la démonstration le 27 mai (III, 68) et la compléta le 27 juillet (III, 66). C'est donc en 1638, et non en 1635 comme le dit Pascal dans son *Histoire de la roulette,* que la quadrature de la cycloïde devint publique en France. Roberval n'était d'ailleurs entré en relations avec Fermat qu'en juillet 1636, à l'occasion de la géostatique.

P. 810-811. — Il est bien certain, comme le conjecture M. Cantor, que, lorsque Pascal parle d'une lettre où Torricelli

aurait cédé à Roberval l'invention de la cycloïde, il n'en peut entendre une autre que celle du 7 juillet 1646, partiellement publiée par Carlo Dati en 1663, lettre où, en réalité, tout en se refusant à discuter la question de priorité, le géomètre italien maintient l'indépendance de ses recherches. Si d'ailleurs cette lettre n'a pas été imprimée dans le Recueil des Œuvres de Roberval (*Mém. Acad. Sciences*) après la mort de ce dernier, c'est précisément à cause de la publication antérieure. La Hire, que ce procès n'intéressait probablement pas beaucoup, s'est contenté de tirer des papiers de Roberval les pièces encore inconnues. Parmi ces pièces figure la longue lettre non datée de Roberval à Torricelli, qui est d'une importance capitale au point de vue historique par les détails personnels que Roberval donne sur ses propres travaux. M. Cantor croit devoir la dater de 1647, année de la mort de Torricelli, tout en remarquant que le 24 août, ce dernier, à qui elle était annoncée par Mersenne, ne l'avait pas encore reçue. J'estime, pour ma part, que cette lettre est fictive, en ce sens qu'elle ne fut jamais envoyée par Roberval.

P. 814. — M. Cantor a repris très heureusement la thèse de Jacobi, à savoir que la méthode dite de Roberval n'est pas antérieure à 1639, et qu'auparavant il ne possédait pour résoudre les problèmes des tangentes que des procédés analytiques. Mais la conclusion tirée de cette thèse pour réfuter l'accusation de plagiat lancée par Pascal dans l'*Histoire de la roulette* me paraît mal établie.

Cette accusation énonce en effet une circonstance précise, que Beaugrand aurait en 1638 envoyé à Galilée, sans nom d'auteur et comme de lui-même, *des solutions du plan de la roulette*, c'est-à-dire une démonstration de la quadrature de la cycloïde. C'est sur ce point que porte l'accusation et nullement sur la méthode des tangentes.

Or cette histoire de Beaugrand est racontée dans une lettre de Roberval à Torricelli, du 1er janvier 1646, publiée par Carlo Dati. Il y est précisé que la démonstration envoyée à Galilée par Beaugrand est celle de Descartes, et qu'elle est la même qu'une des trois qu'a récemment envoyées de Rome à Paris l'ancien élève de Roberval, Du Verdus, comme trouvées en Italie. Roberval déclare

de plus avoir vu, comme Mersenne et bien d'autres, le double de la lettre de Beaugrand. Il n'accuse d'ailleurs nullement Torricelli de plagiat (sa lettre est plutôt amicale); il le prévient seulement de circonstances qu'il donne comme bien connues en France.

Comme les papiers de Galilée ne contiennent aucune trace de sa prétendue correspondance avec Beaugrand, on ne saura jamais quelle part de vérité il peut y avoir dans les assertions de Roberval. Mais en écartant, bien entendu, l'*Histoire de la roulette*, où Pascal a eu le tort évident de traiter Torricelli comme un simple jésuite, je ne crois pas que l'on doive considérer l'accusation lancée contre Beaugrand comme une invention faite à plaisir. D'une part, elle a été publiquement formulée par Desargues, alors que Beaugrand vivait encore. D'autre part, il ressort nettement de la lettre inédite de Cavalieri à Mersenne, dont j'ai parlé plus haut, que Beaugrand avait effectivement envoyé à l'auteur des *Indivisibles*, comme étant de lui-même, des quadratures dues à Fermat. De la sorte, Cavalieri ignorait jusqu'au nom de ce dernier et c'était à Beaugrand qu'il avait posé les questions qui l'intéressaient. Après la mort de son correspondant, il s'adressa à Mersenne en le priant de le renseigner sur les travaux des géomètres français, et Mersenne naturellement renvoya la lettre à Fermat.

Je me réserve de revenir à une autre occasion sur la querelle entre Torricelli et Roberval, et j'espère pouvoir montrer que ce dernier est loin d'avoir eu tous les torts de fond et de forme qu'on lui a reprochés, tandis que le premier a peut-être trop bénéficié du sentiment que provoque une accusation aussi mal fondée que celle de Pascal. En tout cas, je me plais à reconnaître que M. Cantor a suffisamment rendu justice au savant français, ce que nous ne pouvons malheureusement pas dire de Montucla.

PAUL TANNERY.

MÉLANGES.

DÉMONSTRATION DE L'EXISTENCE DE RACINES PRIMITIVES POUR TOUT MODULE PREMIER IMPAIR [1];

PAR M. JOSEPH PEROTT.

1. Avant d'aborder la théorie qui nous occupera, il est bon de rappeler une proposition qui se trouve bien dans tous les Traités d'Algèbre, mais que l'on n'y démontre d'habitude qu'à l'aide de considérations dont la connaissance n'est nullement nécessaire pour l'objet que nous avons spécialement en vue.

Soient

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n$$

n quantités quelconques.

Désignons par f_1 la somme de ces n quantités, par f_2 la somme de leurs produits deux à deux, par f_3 la somme de leurs produits trois à trois, et ainsi de suite jusqu'à f_n qui désignera le simple produit de nos n quantités. Les fonctions $f_1, f_2, \ldots, f_n$ portent le nom de *fonctions symétriques élémentaires* de nos n quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n,$$

f_1 étant la première fonction symétrique élémentaire, f_2 la deuxième, et ainsi de suite jusqu'à f_n qui est la $n^{\text{ième}}$ fonction symétrique élémentaire de nos n quantités

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_n.$$

Supprimons maintenant un de nos a, a_i par exemple, et désignons par

$$f_1^i, \quad f_2^i, \quad \ldots, \quad f_{n-1}^i$$

---

[1] Je vois que j'ai été anticipé par Cauchy (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XII, p. 813) pour une bonne partie de mon travail. Mon essai a été composé dans une ignorance complète du Mémoire du grand géomètre. Quant à son autre Mémoire sur le même sujet (*Exercices d'Analyse et de Physique mathématique*, t. II, p. 1), n'étant pas réimprimé dans ses *Œuvres*, il m'est inaccessible encore aujourd'hui.

les $n-1$ fonctions symétriques élémentaires des $n-1$, a qui restent après la suppression de a_i.

Cela étant ainsi, on aura pour toute valeur de u satisfaisant aux conditions

$$1 \leq u \leq n,$$

Posons maintenant

$$f_u = f_u^i + a_i f_{u-1}^i,$$

$$u = 2, 3, \ldots, k,$$

où k est supposé ne pas dépasser $n-1$, et écrivons les relations ainsi obtenues à la suite de la relation évidente

$$f_1 = f_1^i + a_i.$$

Nous obtiendrons, après avoir écrit $1 = 1$ en tête,

$$\begin{aligned}
1 &= 1, \\
f_1 &= f_1^i + a_i, \\
f_2 &= f_2^i + a_i f_1^i, \\
f_3 &= f_3^i + a_i f_2^i, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
f_{k-1} &= f_{k-1}^i + a_i f_{k-2}^i, \\
f_k &= f_k^i + a_i f_{k-1}^i.
\end{aligned}$$

D'où, en multipliant par

$$a_i^k, \quad (-1)^1 a_i^{k-1}, \quad (-1)^2 a_i^{k-2}, \quad (-1)^3 a_i^{k-3}, \quad \ldots, \quad (-1)^{k-1} a_i, \quad (-1)^k,$$

respectivement et en ajoutant,

$$\begin{aligned}
a_i^k + (-1)^1 a_i^{k-1} f_1 + (-1)^2 a_i^{k-2} f_2 + (-1)^3 a_i^{k-3} f_3 + \ldots \\
+ (-1)^{k-1} a_i f_{k-1} + (-1)^k f_k = (-1)^k f_k^i.
\end{aligned}$$

En faisant maintenant

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

et en ajoutant, après avoir posé

$$\begin{aligned}
s_1 &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \\
s_2 &= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
s_{n-1} &= a_1^{n-1} + a_2^{n-1} + \ldots + a_n^{n-1},
\end{aligned}$$

on obtient

$$s_k + (-1)^1 s_{k-1} f_1 + (-1)^2 s_{k-2} f_2 + (-1)^3 s_{k-3} f_3 + \ldots$$
$$+ (-1)^{k-1} s_1 f_{k-1} + (-1)^k n f_k = (-1)^k \sum_{i=1}^{i=n} f_k^i.$$

Or tout élément tel que

$$a_{u_1} a_{u_2} a_{u_3} \ldots a_{u_k},$$

dont la somme donne la fonction f_k et où nous avons désigné par

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_k$$

k nombres différents quelconques pris dans la suite

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad n$$

figure une et une seule fois dans toute fonction telle que f_k^i, où i est différent de

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_k,$$

et ne figure point dans toute fonction f_k^i, où i est égal à un des nombres

$$u_1, \quad u_2, \quad \ldots, \quad u_k.$$

Cela nous donne

$$\sum_{k=1}^{k=n} f_k^i = (n-k) f_k,$$

puisqu'il est clair que toute fonction telle que f_k^i ne peut renfermer d'autres éléments que ceux qui entrent dans f_k.

On aura donc

$$s_k + (-1)^1 s_{k-1} f_1 + (-1)^2 s_{k-2} f_2 + (-1)^3 s_{k-3} f_3 + \ldots$$
$$+ (-1)^{k-1} s_1 f_{k-1} + (-1)^k k f_k = 0.$$

En posant $k = 2, 3, \ldots, n-1$, on aura ensemble avec la relation

$$s_1 - f_1 = 0,$$

qui résulte de la définition même des fonctions f_1 et s_1, les formules bien connues de Girard [1] qui nous seront utiles dans la suite.

[1] C'est à peu près comme feu M. Kronecker les démontrait dans son Cours d'Algèbre à l'Université de Berlin, sauf que l'illustre géomètre n'avait nullement

2. Soit u un nombre entier quelconque supérieur à 1, et

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\mu$$

tous les nombres entiers positifs premiers à u, et non supérieurs à u. On aura évidemment

$$\mu < u,$$

puisque dans la suite

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad u$$

il y a au moins un nombre, je veux dire u, qui n'est pas premier à u.

Tout nombre a premier à u sera nécessairement *congru* [1] à un des nombres

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\mu.$$

En effet, si a est positif et inférieur à u, il fera partie de la suite précédente. Si a est positif et supérieur à u, il tombera nécessairement entre deux termes consécutifs tels que mu et $(m+1)u$ de la progression arithmétique

$$u, \quad 2u, \quad 3u, \quad 4u, \quad \ldots,$$

à différence u, puisqu'il ne peut être égal à un multiple de u. On aura donc

$$mu < a < (m+1)u,$$

et par suite

$$0 < a - mu < u,$$

de sorte qu'en posant

$$a - mu = r,$$

on aura

$$a = mu + r,$$

ou, avec Gauss,

$$a \equiv r \pmod{u}.$$

Or a et u étant supposés premiers entre eux, u et r le seront aussi, en vertu de la relation

$$a = mu + r,$$

---

besoin d'éviter des considérations empruntées à la théorie des équations. La leçon de M. Kronecker à laquelle je fais particulièrement allusion est celle du 14 novembre 1878. Il y citait d'ailleurs Euler, *Opuscula analytica*, t. I, p. 337.

[1] *Voir* Gauss, *Disquisitiones arithmeticæ*, art. 1 et suiv., où l'on trouvera la définition de la *congruence*.

et puisque r est positif et inférieur à u, il devra faire partie de la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\mu.$$

Si a est négatif et inférieur à u en valeur absolue, on aura, en posant

$$a + u = r,$$

ou

$$a \equiv r \pmod{u},$$

et r satisfera encore aux conditions

$$0 < r < u,$$

et, étant premier à u, sera identique à un des termes de la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\mu.$$

Enfin, si a est négatif et supérieur à u en valeur absolue, $-a$ tombera nécessairement entre deux termes tels que mu et $(m+1)u$ de la progression arithmétique

$$u, \quad 2u, \quad 3u, \quad 4u, \quad \ldots.$$

En posant

$$a + (m+1)u = r,$$

d'où l'on tirera

$$a \equiv r \pmod{u},$$

on aura encore

$$0 < r < u,$$

et, comme r est toujours premier à u, il figurera dans la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\mu.$$

Tout nombre a soit positif soit négatif, mais premier à u, est donc congru à un des termes de la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\mu.$$

Considérons maintenant la progression géométrique à raison a

$$a, \quad a^2, \quad a^3, \quad \ldots, \quad a^n.$$

Le nombre a étant supposé premier à u, le nombre a^2 le sera aussi en tant que produit de deux nombres a et a premiers à u [1].

---

[1] *Euclidis Elementa*, VII, p. 24 et 25. Éd. Heiberg, t. II, p. 238 et 240.

et de même pour le nombre a^3 en tant que produit de deux nombres a^2 et a premiers à u, et ainsi de suite jusqu'à a^u que l'on trouvera être premier à u. Chaque terme de la progression géométrique

$$a, \quad a^2, \quad a^3, \quad \ldots, \quad a^u$$

sera donc congru à quelque terme de la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a_\mu.$$

Or, si le nombre des arbres dans une forêt est supérieur au nombre maximum de feuilles sur un arbre, il y aura au moins deux arbres possédant le même nombre de feuilles (Lejeune-Dirichlet).

Comme dans notre cas on a $u > \mu$, il faut bien que deux termes différents de notre progression géométrique, tels que a^h et a^k, où l'on peut considérer h comme désignant le plus grand des deux nombres h et k, soient congrus à un même terme de la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\mu,$$

et par conséquent congrus entre eux

$$a^h \equiv a^k \qquad (\text{mod } u),$$

d'où, en divisant par a^k qui est premier à u,

$$a^{h-k} = 1 \qquad (\text{mod } u).$$

et, en posant $h - k = s$,

$$a^s \equiv 1 \qquad (\text{mod } u).$$

Il existe donc une puissance a^s à exposant positif congrue à 1 suivant le module u.

Je désignerai par t le plus petit des nombres positifs jouissant de la même propriété que s, c'est-à-dire rendant a^s congru à 1 suivant le module u et, je dirai, avec Gauss [1], que a appartient à l'exposant t (mod u).

[1] *Disquisitiones arithmeticæ*, art. 53.

Cela étant ainsi, je dis que la progression géométrique

$$a, \quad a^2, \quad a^3, \quad \ldots, \quad a^t,$$

ne renfermera pas de termes congrus entre eux. En effet, si l'on avait

$$a^h \equiv a^k \qquad (\text{mod}\, u),$$

où

$$1 \leqq k < h \leqq t,$$

on en tirerait

$$a^{h-k} \equiv 1 \qquad (\text{mod}\, u),$$

où

$$1 \leqq h - k < t,$$

contrairement à la supposition que a appartient à l'exposant t (mod u). Cela étant ainsi, comme chaque terme de la progression géométrique

$$a, \quad a^2, \quad \ldots, \quad a^t$$

est congru à un terme *distinct* de la suite

$$a, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\mu,$$

il faut bien que l'on ait

$$t \leqq \mu < u.$$

Si l'on connaît les nombres de la suite

$$a_1, \quad a_2 \quad \ldots, \quad a_\mu,$$

auxquels les termes de la progression géométrique

$$a, \quad a^2, \quad a^3, \quad \ldots, \quad a^t$$

sont respectivement congrus, il est facile de déterminer le terme de la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\mu,$$

auquel toute puissance de a a exposant positif telle que a^ν sera congrue.

En effet, si ν est un multiple de t tel que kt, on aura

$$a^\nu = a^{kt} = (a^t)^k \equiv 1 \qquad (\text{mod}\, u).$$

Si ν est plus petit que t, il fera partie de la progression géométrique

$$a, \quad a^2, \quad \ldots, \quad a^t,$$

et par conséquent on saura immédiatement le terme de la suite

$$a, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_p,$$

auquel il est congru. Enfin, si v est plus grand que t et non divisible par t, on pourra trouver des nombres entiers positifs q et r tels que l'on ait

$$v = qt + r,$$

où

$$r < t.$$

Cela nous donnera

$$a^v = a^{qt+r} = a^{qt} a^r \equiv a^r \pmod{u},$$

et l'on se trouve ramené au cas déjà considéré. Toutes les fois donc que v n'est pas divisible par t, la puissance a^v est congrue à un terme de la progression géométrique

$$a, \quad a^2, \quad a^3, \quad \ldots, \quad a^t,$$

différent de a^t et par suite sera congrue à 1.

La condition nécessaire et suffisante pour que a^v soit congru à 1 est donc que v soit divisible par t. Si donc on a

$$a^h \equiv a^k \pmod{u},$$

où

$$k < h,$$

on en tirera

$$a^{h-k} \equiv 1 \pmod{u},$$

et par suite $h - k$ doit être divisible par t ou, si l'on veut,

$$h \equiv k \pmod{t}.$$

Inversement la congruence

$$h \equiv k \pmod{t}$$

entraîne la suivante

$$a^h \equiv a^k \pmod{u},$$

où nous nous sommes borné, sans nécessité absolue cependant, à la considération de seuls exposants positifs.

Cela étant ainsi, il nous sera facile maintenant de résoudre un problème qui se présente fréquemment.

Étant donnés deux nombres premiers entre eux a et u, on

demande de trouver un nombre x tel que l'on ait

$$ax \equiv 1 \pmod{u}.$$

En effet, soit t l'exposant auquel a appartient $(\bmod u)$, on aura

$$aa^{t-1} = a^t \equiv 1 \pmod{u},$$

où dans le cas de $t = 1$, ce qui exige que l'on ait $a \equiv 1 (\bmod u)$, il faut remplacer a^{t-1} par 1. Donc la valeur

$$x = a^{t-1}$$

résout la question. On s'assurera immédiatement que tout nombre congru à $a^{t-1} (\bmod u)$ résout aussi la question. Inversement toute valeur

$$x = y$$

qui résout la question est congrue à $a^{t-1} (\bmod u)$. En effet, des deux congruences

$$aa^{t-1} \equiv 1 \pmod{u},$$
$$ay \equiv 1 \pmod{u},$$

on tirera la suivante

$$ay \equiv aa^{t-1} \pmod{u},$$

et par suite, en divisant par a qui est premier à u,

$$y \equiv a^{t-1} \pmod{u}.$$

Il convient de dire cependant que nous avons supposé u positif, le seul cas dont nous ayons besoin dans la suite.

3. La propriété que possède tout nombre a premier à u d'appartenir à un certain exposant $(\bmod u)$ donne lieu à plusieurs propositions fort intéressantes que nous allons établir.

Théorème I. — *Si a appartient à l'exposant $t (\bmod u)$, la puissance a^d, où d est un diviseur de t, appartient à l'exposant $\frac{t}{d}$.*

En effet, le nombre a^d, étant premier à u, appartiendra à un certain exposant que nous désignerons par s.

Or on a

$$(a^d)^{\frac{t}{d}} = a^t \equiv 1 \pmod{u};$$

donc s est un diviseur de $\frac{t}{d}$.

Mais d'autre part on a

$$a^{ds} = (a^d)^s \equiv 1 \pmod{u}.$$

Donc t est un diviseur ds et par conséquent $\frac{t}{d}$ est un diviseur de s.

Les nombres s et $\frac{t}{d}$ étant diviseurs l'un de l'autre, on aura [1]

$$s = \frac{t}{d}.$$

Théorème II. — *Si a appartient à l'exposant t, la puissance a^k, où k est supposé premier à t, appartiendra au même exposant t.*

En effet, soit s l'exposant auquel a^k appartient. On aura

$$a^{ks} = (a^k)^s \equiv 1 \pmod{u};$$

donc t est un diviseur de ks, et comme k est premier à t, le nombre t sera un diviseur de s.

Mais d'autre part

$$(a^k)^t = a^{kt} \equiv 1 \pmod{u};$$

donc s est un diviseur de t.

Il s'ensuit que

$$s = t.$$

Théorème III. — *Si a appartient à l'exposant t, la puissance a^h appartient à l'exposant $\frac{t}{d}$, où d est le plus grand commun diviseur de h et de t.*

En effet, soit s l'exposant auquel a^h appartient.

Le nombre a^d appartiendra à l'exposant $\frac{t}{d}$, en vertu du théo-

---

[1] En vertu d'une proposition qui devrait s'énoncer explicitement dans les Ouvrages élémentaires. Je ne l'ai trouvée nulle part.

rème I et par conséquent, puisque $\frac{h}{d}$ et $\frac{t}{d}$ sont premiers entre eux, $a^h = (a^d)^{\frac{h}{d}}$ appartiendra au même exposant $\frac{t}{d}$, en vertu du théorème II.

Donc

$$s = \frac{t}{d}.$$

Théorème IV. — *Si a et b appartiennent respectivement aux exposants s et t, où s et t sont supposés premiers entre eux, le produit ab appartient à l'exposant st.*

En effet, le produit ab étant premier à u [1] appartiendra à un certain exposant que nous désignerons par v. On aura, en désignant par t_1 un nombre tel que l'on ait

$$tt_1 \equiv 1 \pmod{s},$$
$$(ab)^{tt_1} = a^{tt_1} b^{tt_1} \equiv a^{tt_1} \equiv a \pmod{u}.$$

Le nombre a étant congru à une puissance de ab, le nombre s sera un diviseur de v, en vertu des théorèmes précédents. De même, soit s_1 un nombre tel que l'on ait

$$ss_1 \equiv 1 \pmod{t},$$

on aura

$$(ab)^{ss_1} = a^{ss_1} b^{ss_1} \equiv b^{ss_1} \equiv b \pmod{u}.$$

Donc b est congru à une puissance de ab et par suite t est un diviseur de v.

Les nombres s et t, premiers entre eux, étant tous les deux diviseurs de v, leur produit st divisera v. Mais l'on a

$$(ab)^{st} = a^{st} b^{st} \equiv 1 \pmod{u}.$$

Donc v est un diviseur de st. Il s'ensuit que

$$v = st.$$

Problème. — *Étant donnés deux nombres a et b appartenant respectivement aux exposants s et t* (mod u), *lesquels exposants*

---

[1] *Euclidis Elementa*, VII, 24, éd. Heiberg, t. II, p. 98.

sont supposés avoir un plus grand commun diviseur d supérieur à l'unité [1], *on demande de trouver un nombre appartenant au plus petit commun multiple m de s et de t comme exposant* (mod u).

A. Si au moins un des nombres $\frac{s}{d}$ et $\frac{t}{d}$ est premier à d, la solution est immédiate. En effet, soit $\frac{s}{d}$ premier à d. Dans ce cas, $\frac{s}{d}$ étant premier à d et à $\frac{t}{d}$ sera premier à leur produit t [2]. Le nombre a^d appartenant à l'exposant $\frac{s}{d}$, en vertu du théorème I, et le nombre b appartenant à l'exposant t d'après la supposition, leur produit $a^d b$ appartiendra à l'exposant $\frac{st}{d} = m$, en vertu du théorème IV.

On agirait d'une manière analogue dans le cas où $\frac{t}{d}$ se trouverait être premier à d.

B. Dans le cas où au moins un des deux nombres $\frac{s}{d}$ et $\frac{t}{d}$ n'est pas premier à d, on peut remplacer les nombres a et b par deux autres nombres a_1 et b_1 appartenant respectivement aux exposants s_1 et t_1 tels que leur plus grand commun diviseur d_1 soit plus petit que d, tandis que leur plus petit commun multiple m_1 se trouve toujours être égal à m, le plus petit commun multiple de s et de t.

En effet, si $\frac{s}{d}$ et d admettent un plus grand commun diviseur $\delta > 1$, posons

$$a_1 = a, \qquad b_1 = b^\delta.$$

On aura

$$s_1 = s, \qquad t_1 = \frac{t}{\delta}.$$

Le plus grand commun diviseur d_1 de s_1 et de t_1 sera évidemment égal à $\frac{d}{\delta}$ puisque, tout d'abord, en divisant s_1 et t_1 par $\frac{d}{\delta}$, on obtient les nombres entiers $\frac{s}{d}\delta$ et $\frac{t}{d}$ comme quotients, et puis $\frac{t}{d}$, étant pre-

---

(1) Autrement la solution est donnée par le théorème précédent.

(2) *Euclidis Elementa*, VII, 24, éd. Heiberg, t. II, p. 138.

mier tant à $\frac{s}{d}$ qu'à δ qui est un diviseur de ce dernier nombre [1], sera premier à leur produit [2] $\frac{s}{d}\delta$. Le plus petit commun multiple m_1 de s_1 et de t_1 sera donc égal à

$$\frac{s_1 t_1}{d_1} = \frac{s\frac{t}{\delta}}{\frac{d}{\delta}} = \frac{st}{d} = m.$$

On agirait d'une manière analogue dans le cas où $\frac{t}{d}$ et d se trouveraient admettre un plus grand commun diviseur supérieur à l'unité.

Toutes les fois donc que les deux nombres s et t ne remplissent pas tous les deux la condition de donner par la division par leur plus grand commun diviseur d des quotients $\frac{s}{d}$ et $\frac{t}{d}$ premiers à d, on peut appliquer un procédé de réduction qui consiste à remplacer les nombres a et b par deux autres a_1 et b_1 appartenant à deux exposants s_1 et t_1 dont le plus grand commun diviseur d_1 est plus petit que d, tandis que leur plus petit commun multiple m_1 reste toujours égal à m.

De même, si $\frac{s_1}{d_1}$ et $\frac{t_1}{d_1}$ ne sont pas tous les deux premiers à d_1, on peut encore appliquer un procédé de réduction qui remplacera s_1 et t_1 par des nombres s_2 et t_2 tels que leur plus grand commun diviseur d_2 sera plus petit que d_1, tandis que leur plus petit commun multiple m_2 sera toujours égal à m_1 et par suite à m, et ainsi de suite.

Si, en procédant de cette manière, on parvient à un plus grand commun diviseur $d_n = 1$, les nombres s_n et t_n seront premiers entre eux et l'on tombera sous le théorème IV. Sinon, il faut bien que l'on se trouve arrêté quelque part avant d'arriver à un plus grand commun diviseur égal à 1. Or, du moment que notre procédé de réduction n'est plus applicable, on tombe nécessairement sous le cas A.

Le problème est donc résolu complètement.

---

(1) *Euclidis Elementa*, VII, 23, éd. Heiberg, t. II, p. 236.
(2) *Euclidis Elementa*, VII, 24, éd. Heiberg, t. II, p. 238.

Corollaire. — *Étant donné un nombre quelconque de nombres*

$$c_1, \quad c_2, \quad \ldots, \quad c_n,$$

appartenant aux exposants

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_n$$

(mod u), *on peut toujours trouver un nombre appartenant au plus petit commun multiple m de tous ces exposants.*

En effet, il suffit de trouver un nombre b_1 appartenant au plus petit commun multiple m_1 de s_1 et s_2 comme exposant, puis un nombre b_2 appartenant au plus petit commun multiple m_2 de m_1 et s_2 comme exposant, et ainsi de suite jusqu'à ce que l'on soit parvenu à un nombre b_{n-1} appartenant au plus petit commun multiple m_{n-1} de m_{n-2} et s_n comme exposant. Or, puisque l'on a

$$m = m_{n-1},$$

il est clair que le nombre b_{n-1} résout la question.

4. A partir d'ici, nous allons nous borner à la considération du cas particulier où le module u est égal à un nombre premier impair p.

Dans ce cas particulier, le seul nombre non supérieur à p qui n'est pas premier à p est le nombre p lui-même, de sorte que la suite

$$a_1, \quad a_2, \quad \ldots, \quad a_\mu$$

devient

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad p-1,$$

et l'on a

$$\mu = p - 1.$$

On établit alors sans peine la proposition suivante :

Théorème V. — *Si a appartient à un exposant $t > 1$ (mod p) et si b appartient à un diviseur d de t, le nombre b est congru à une puissance de a telle que a^k (mod p).*

En effet, le nombre a appartenant à l'exposant t, la progression

(¹) *Euclidis Elementa*, VII, 36, éd. Heiberg, t. II, p. 96.

géométrique

$$a, \quad a^2, \quad a^3, \quad \ldots, \quad a^t$$

ne renfermera pas de termes congrus entre eux (mod p).

Cela étant ainsi, nous allons déterminer la valeur (mod p) des t fonctions symétriques élémentaires

$$f_1, \quad f_2, \quad \ldots, \quad f_t$$

des t termes de la progression géométrique

$$a, \quad a^2, \quad a^3, \quad \ldots, \quad a^t.$$

Posons

$$\begin{aligned}
s_1 &= a + a^2 + a^3 + \ldots + a^t, \\
s_2 &= a^2 + a^4 + a^6 + \ldots + a^{2t}, \\
s_3 &= a^3 + a^6 + a^9 + \ldots + a^{3t}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
s_{t-1} &= a^{t-1} + a^{2t-2} + a^{3t-3} + \ldots + a^{(t-1)(t-1)}.
\end{aligned}$$

Nous aurons

$$s_1 = \frac{a(a^t - 1)}{a - 1}.$$

Or, comme s_1 est un nombre entier en vertu de sa définition même comme une somme de nombres entiers, le nombre $a(a^t - 1)$ sera divisible par $a - 1$. Mais $a^t - 1$ étant un multiple de p tel que hp, tandis que $a - 1$ est premier à p en vertu de la supposition $t > 1$; la divisibilité du produit $p(ah)$ par $a - 1$ entraînera celle de ah par $a - 1$, et l'on aura, en posant $\frac{ah}{a-1} = g$,

$$s_1 = gp \equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$

De même on a

$$s_2 = \frac{a^2(a^{2t} - 1)}{a^2 - 1},$$

et comme tous les s que nous considérons sont

$$s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_{t-1},$$

de sorte que du moment qu'il y a lieu de considérer s_2 on suppose $2 < t$, le nombre $a^2 - 1$ ne sera pas divisible par p. On conclura donc comme dans le cas précédent

$$s_2 \equiv 0 \qquad (\text{mod } p).$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$s_{t-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Nous allons maintenant nous servir des formules de Girard depuis la première jusqu'à la formule n^{t-1}.

La première formule donne

$$s_1 - f_1 = 0,$$

et par suite

$$f_1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

La deuxième formule nous donne

$$s_2 - s_1 f_1 + 2 f_2 = 0,$$

d'où

$$2 f_2 \equiv 0 \pmod{p},$$

et comme 2 est premier à p,

$$f_2 \equiv 0 \pmod{p}.$$

La troisième formule nous donne

$$s_3 - s_2 f_1 + s_1 f_2 - 3 f_3 = 0,$$

d'où

$$-3 f_3 \equiv 0 \pmod{p},$$

et puisque du moment qu'il y a lieu de considérer la troisième formule de Girard, on suppose $3 < t < p$ et par suite 3 est premier à p, on a

$$f_3 \equiv 0 \pmod{p},$$

et ainsi de suite jusqu'à

$$f_{t-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Quant à f_t, nous allons l'évaluer d'une manière directe.

On a

$$f_t = a a^2 a^3 \ldots a^t = a^{\frac{t(t+1)}{2}},$$

et par suite si t est impair

$$f_t = a^{\frac{t+1}{2} t} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Si t est pair, on a

$$f_t = a^{\frac{t}{2} t + \frac{t}{2}} \equiv a^{\frac{t}{2}} \pmod{p}.$$

Mais, comme on a dans ce cas

$$\left(a^{\frac{t}{2}}-1\right)\left(a^{\frac{t}{2}}+1\right)=a^t-1\equiv 0 \pmod{p},$$

il faut bien qu'un des deux nombres $a^{\frac{t}{2}}-1$ et $a^{\frac{t}{2}}+1$ soit divisible par p. Or $a^{\frac{t}{2}}-1$ ne peut guère être divisible par p, puisque le nombre a appartient à l'exposant t; on aura donc

$$a^{\frac{t}{2}}+1\equiv 0 \pmod{p}$$

ou

$$a^{\frac{t}{2}}\equiv -1 \pmod{p},$$

et par suite

$$f_{\frac{t}{2}}\equiv -1 \pmod{p}.$$

On aura donc d'une manière générale

$$f_t\equiv(-1)^{t+1} \pmod{p}.$$

Cela étant ainsi, considérons le produit

$$\Pi=(b-a)(b-a^2)(b-a^3)\ldots(b-a^t).$$

En le développant, on trouve

$$\Pi=b^t-f_1b^{t-1}+f_2b^{t-2}-\ldots+(-1)^{t-1}f_{t-1}+(-1)^tf_t.$$

Or, tous les termes de la somme qui constitue le second membre étant divisibles par p, excepté le premier et le dernier qui sont respectivement congrus à 1 et $a-1 \pmod{p}$, on aura

$$\Pi\equiv 0 \pmod{p}.$$

La divisibilité du produit Π par p entraîne celle [1] d'au moins un de ses facteurs tel que $b-a^k$ où $1\leqq k\leqq t$, de sorte que l'on aura

$$b\equiv a^k \pmod{p}, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Cela étant ainsi, soient

$$t_1,\quad t_2,\quad \ldots,\quad t_{p-1}$$

---

[1] *Euclidis Elementa,* VII, 30, éd. Heiberg, t. II, p. 248.

les exposants auxquels appartiennent respectivement les nombres

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad p-1$$

(mod p) et m le plus petit commun multiple de ces exposants. On pourra toujours trouver, en vertu du corollaire du problème que nous avons traité dans le Chapitre précédent, un nombre a appartenant à l'exposant m (mod p. La progression géométrique

$$a, \quad a^2, \quad a^3, \quad \ldots, \quad a^m$$

ne renfermera donc pas de termes congrus entre eux (mod p). Or, en vertu du théorème V, chaque nombre de la suite

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad p-1$$

sera congru à quelque terme *distinct,* puisque notre suite ne renferme pas de termes congrus entre eux de la progression géométrique

$$a, \quad a^2, \quad a_3, \quad \ldots, \quad a^m.$$

Et comme inversement chaque terme de notre progression géométrique, en tant que premier à p, doit être congru à quelque terme de la suite

$$1, \quad 2, \quad 3, \quad \ldots, \quad p-1,$$

il faut que l'on ait

$$m = p-1.$$

Le nombre a appartiendra donc à l'exposant $p-1$. Un tel nombre porte, d'après Euler [1], le nom de *racine primitive de* p.

---

[1] *Demonstrationes circa residua ex divisione potestatum per numeros primos resultantia.* (Voir *Commentarii Academiæ Petropolitanæ,* t. XVIII. p. 85 et sq.)

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

Appell. — *Leçons sur l'attraction et la fonction potentielle.* In-8°. 63 p. avec figures. Paris, Carré.

Cayley (A.). — *Collected Mathematical Papers.* Vol. 5. 4°. Cambridge Univ. Press. 25 sh.

Gauss (F.-G.). — *Die trigonometrischen u. polygonometrischen Rechnungen in der Feldmesskunst.* 2. Aufl. 6. Heft. Gr.-8°, m. Fig. Halle, Strien. Subscr.-Pr. 3 M. 50 Pf.

Gilbert (Ph.). — *Cours d'Analyse infinitésimale.* Partie élémentaire. 4e édit. In-8°, x-570 p. Bruxelles, Société belge de Librairie. 12 fr.

Hayward (R.-B.). — *The Algebra of Coplanar Vectors and Trigonometry.* Post-8°, 376 p. London, Macmillan. 8 sh. 6 d.

Katalog mathematischer u. mathematisch-physikalischer Modelle, Apparate und Instrumente. Im Auftrage des Vorstandes der deutschen Mathematiker-Vereinigung herausgegeben von W. Dyck. Gr.-8°. xvi-430 S. m. Fig. München, Th. Ackermann. 14 M.

Obenrauch (F.-J.). — *Zur Transformation und Reduction von Doppelintegralen mittelst elliptischer Coordinaten.* Progr. gr.-8°, 56 S. Neutitschein, Hölzel. 2 M.

Weichold (G.). — *Lehrbuch der Determinanten und deren Anwendungen.* 1. Thl. Bearb. nach System Kleyer. Gr.-8°, xvi-390 S. Stuttgart. Maier. 10 M.

Poincaré (H.). — *Cours de Physique mathématique. Théorie mathématique de la lumière.* II. *Nouvelles études sur la diffraction*; *Théorie de la dispersion de Helmholtz.* In-8°, vi-310 p. avec fig. Paris, Carré.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

P. POKROVSKY. — Sur les transformations des intégrales et des fonctions hyperelliptiques de la première classe. XVI-160 p. in-8 (*Math. Sbornik*, t. XV). Moscou, 1891.

Ce travail de M. Pokrovsky, actuellement professeur de Mathématiques à l'Université de Kieff, fait suite à sa *Théorie des fonctions hyperelliptiques de la première classe* (*Sbornik mathematique*, t. XIII). De l'avis de l'auteur, le but principal de cette théorie consiste à établir l'étroite liaison qui existe entre les fonctions hyperelliptiques et les transcendantes elliptiques les plus proches.

Deux principes rapprochent ces deux théories : le premier qui sert de base au théorème bien connu d'Abel; le deuxième, de Riemann, à l'aide duquel l'étude des fonctions algébriques polytropes et leurs intégrales se ramène à l'étude des fonctions monotropes. Ces deux principes sont le point de départ de deux orientations différentes dans la théorie des fonctions hyperelliptiques et abéliennes indiquées, l'une par Weierstrass, l'autre par Riemann.

La théorie de Weierstrass est développée dans son *Vorlesungen über die Theorie der hyperelliptischen und abelschen Functionen*.

M. Pokrovsky a eu l'occasion de voir à Berlin un cours manuscrit de Weierstrass où celui-ci n'aborde pas la question de la transformation des fonctions hyperelliptiques; aussi M. Pokrovsky ne se croit-il pas autorisé à étendre à la théorie des transformations la méthode de Weierstrass non encore publiée.

Il a basé son travail sur la méthode de Riemann.

Après avoir examiné les transformations des intégrales hyperelliptiques, il passe à la transformation des fonctions hyperelliptiques au moyen des fonctions θ.

La marche et la méthode adoptées diffèrent essentiellement de celles que l'on rencontre dans les travaux relatifs à la question des transformations des fonctions hyperelliptiques (ou plutôt des

fonctions $\Im$). Par les résultats de ses recherches, l'auteur se rapproche du travail bien connu de Jacobi ([1]).

Pour mettre en évidence la différence entre sa méthode et les autres, il croit devoir faire un exposé succinct de la théorie des transformations des fonctions hyperelliptiques dans son état actuel.

La théorie des transformations fut inaugurée par le brillant Mémoire d'Hermite ([2]).

Ayant pris avec Hermite le système

$$\int_{x_0}^{x} \frac{dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = u,$$
$$\int_{x_0}^{x} \frac{x\,dx}{\sqrt{\varphi(x)}} + \int_{y_0}^{y} \frac{y\,dy}{\sqrt{\varphi(y)}} = v,$$

où $\varphi(x)$ est un polynôme de cinquième ou de sixième degré, on peut obtenir quinze fonctions hyperelliptiques $f_1(uv)$, $f_2(uv)$, ..., $f_{15}(uv)$.

Désignons par $F_1(uv)$, $F_2(uv)$, ..., $F_{15}(uv)$ les fonctions auxquelles conduisent les équations

$$\int_{x_0}^{x} \frac{(\alpha+\beta x)\,dx}{\sqrt{\psi(x)}} + \int_{y_0}^{y} \frac{(\alpha+\beta y)\,dy}{\sqrt{\psi(y)}} = u,$$
$$\int_{x_0}^{x} \frac{(\gamma+\delta x)\,dx}{\sqrt{\psi(x)}} + \int_{y_0}^{y} \frac{(\gamma+\delta y)\,dy}{\sqrt{\psi(y)}} = v,$$

où α, β, γ, δ sont des constantes, $\psi(x)$ un polynôme du cinquième ou du sixième degré. Le problème de la transformation réside, d'après Hermite, en ceci :

Étant donné le polynôme $\varphi(x)$, déterminer les coefficients de $\psi(x)$ et les constantes α, β, γ, δ de façon que les quinze fonctions de la forme $F(uv)$ s'expriment rationnellement au moyen des fonctions de la forme $f(uv)$.

Chacune des intégrales hyperelliptiques du système donné et du système transformé possède quatre modules de périodicité ou quatre périodes; pour qu'il existe des relations rationnelles entre les fonctions $F(uv)$ et $f(uv)$, les périodes des intégrales données

---

([1]) Jacobi, *Fundamenta nova theoriæ functionum ellipticarum* (*Gesamm. Werke*, Bd I. Berlin, 1881).

([2]) Hermite, *Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XL; 1855).

doivent s'exprimer au moyen des périodes des intégrales transformées par des équations linéaires à coefficients entiers.

Ayant désigné les périodes des intégrales données par $2k$ et les périodes des transformées par $2L$ affectées d'indices correspondants, on peut exprimer leurs relations générales par les équations

$$\begin{aligned}
k_{p_1} &= a_0 L_{p_1} + a_1 L_{p_2} + a_2 i L'_{p_2} + a_3 i L'_{p_1},\\
k_{p_2} &= b_0 L_{p_1} + b_1 L_{p_2} + b_2 i L'_{p_2} + b_3 i L'_{p_1},\\
ik'_{p_2} &= c_0 L_{p_1} + c_1 L_{p_2} + c_2 i L'_{p_2} + c_3 i L'_{p_1},\\
ik'_{p_1} &= d_0 L_{p_1} + d_1 L_{p_2} + d_2 i L'_{p_2} + d_3 i L'_{p_1},
\end{aligned}$$

où $p = 1, 2$.

Dans la théorie des transformations, le système linéaire de coefficients

$$\begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ b_0 & b_1 & b_2 & b_3 \\ c_0 & c_1 & c_2 & c_3 \\ d_0 & d_1 & d_2 & d_3 \end{vmatrix}$$

joue un rôle très important.

Le degré de la transformation s'exprime par la racine carrée de son déterminant.

Pour les transformations du système donné il y aura un complexe déterminé des systèmes linéaires au moyen desquels les transformations sont caractérisées. Les éléments qui entrent dans la composition des systèmes ne sont pas arbitraires mais soumis à certaines conditions qui découlent des relations entre les périodes des intégrales hyperelliptiques.

Il s'ensuit que, parmi les systèmes qui se rapportent aux transformations du système donné, il y aura des systèmes équivalents. Deux systèmes sont dits *équivalents* lorsque le passage de l'un à l'autre peut s'effectuer par une substitution linéaire. Il est évident que, pour trouver les différentes transformations du système donné, il est nécessaire de résoudre le problème du nombre et de la forme des représentants (*repräsentanten*) des systèmes non équivalents.

Les recherches de Kronecker sur la décomposition des déterminants qui figurent dans son Mémoire paru dans les *Annales de l'Académie des Sciences de Berlin* (¹) servent à la solution de cette question indiquée par Hermite.

(¹) KRONECKER, *Ueber bilineare Formen* (*Monatsbericht der Akad. zu Berlin*, 1866).

L'application de l'idée de Kronecker à la théorie des fonctions abéliennes se rencontre chez Clebsch et Gordan ([1]).

Dorn ([2]) et Krause ([3]) l'ont également appliquée à la théorie des fonctions hyperelliptiques.

Pour la solution de ce problème, Hermite utilise encore un nouveau et puissant moyen : l'analyse et la théorie des nombres (théorie des formes). Il est impossible de ne pas observer l'apparition d'un nouvel élément numérique dès les premières solutions du *problème de l'inversion* des intégrales hyperelliptiques (problème de Jacobi), solutions fournies par Rosenhain et Göpel; il apparaît également dans la méthode inverse de l'exposé des fonctions elliptiques qui fut proposée par Jacobi dans son Ouvrage *Theorie der elliptischen Functionen aus den Eigenschaften der Thetareihen argebeitet* (*Jacobi Werke,* Bd. I).

M. Pokrovsky pense que les remarquables travaux d'Hermite qui constituent la base de la théorie des transformations sont le résultat de sa profonde connaissance de la théorie des nombres. Ce qui indique le caractère arithmétique de la découverte de M. Hermite, c'est d'abord la liaison entre le déterminant des systèmes linéaires indiqués plus haut et le degré de la transformation; puis ensuite la substitution *adjointe* pour la transformation des formes et enfin l'introduction même des principes des fonctions ϑ de divers ordres.

Une fonction ϑ ordinaire, ou fonction du premier ordre, satisfait à quatre équations fonctionnelles qui s'obtiennent lorsqu'on change les arguments en systèmes de modules simultanés de périodicité, et alors toute fonction transcendante qui satisfait aux équations de même type ne diffère de la fonction ϑ que par un facteur constant. Dans les seconds membres des équations fonctionnelles entrent des facteurs exponentiels. En les élevant à une puissance entière n, Hermite arrive aux équations fonctionnelles des fonctions ϑ d'ordre n. Il détermine, n étant un nombre *simple* et impair, le nombre des constantes arbitraires qui figurent dans les expressions de ces fonctions, et, se servant de l'équation bi-

---

([1]) Clebsch und Gordan, *Theorie der abelschen Functionen* (Leipzig, 1866)

([2]) Dorn, *Die Form und Zahl der Repräsentanten nicht äquivalenter Klassen der ultraelliptischen Functionen* (*Math. Annal.*, Bd. VII).

([3]) Krause, *Die Transformation der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung* (Leipzig, 1886).

carrée de Göpel, il montre qu'on peut représenter la fonction d'ordre n sous la forme d'un polynôme homogène de degré n des fonctions ϑ du premier ordre. Quant aux relations elles-mêmes, dans leur forme définitive, il ne les donne pas.

Comme conclusion de son Mémoire, Hermite observe que, à l'aide de la combinaison de deux transformations déterminées, on peut arriver au théorème de la multiplication des arguments.

Le savant italien Brioschi apporta l'un des premiers compléments au travail d'Hermite, en étudiant les propriétés des coefficients qui entrent dans les expressions des fonctions ϑ de l'ordre n, dans son Mémoire *Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. XLVII).

La théorie générale des fonctions ϑ d'ordre supérieur et la question connexe des diverses relations entre les fonctions ϑ sont examinées en détail dans les ouvrages de Weber [1], de Posse [2] et de Krause. Dans l'Ouvrage de Krause se trouvent également étudiés le caractère et les relations entre les fonctions ϑ transformées dans le cas général des transformations, c'est-à-dire n étant un entier quelconque.

Krause tente d'édifier une théorie des transformations sur des principes plus larges.

Il introduit les fonctions ϑ dont les caractéristiques sont formées de nombres fractionnaires et il se sert en même temps de l'extension du théorème de l'addition aux fonctions ϑ ayant des modules différents de périodicité. La question des fonctions ϑ ayant des caractéristiques arbitraires est développée dans les articles de Prym et de Kraser, parus dans le Tome III des *Acta mathematica*.

La généralisation de la théorie des fonctions ϑ, établie à la suite des nouveaux progrès de la théorie des fonctions elliptiques, se trouve dans les travaux de Klein et de Burkhardt. Klein intro-

---

(1) Weber, *Anwendung der Theorie zweier veränderlichen auf die Theorie der Bewegung eines festen Körpers in einer Flussigkeit* (*Math. Annal.*, Bd. XVI).

(2) Posse, *Sur les fonctions ϑ à deux arguments et sur le problème de Jacobi* (en russe). Saint-Pétersbourg, 1882.

duit et étudie dans ses Mémoires [1] les propriétés des fonctions σ qui se présentent comme généralisation des fonctions elliptiques σ de Weierstrass.

Dans ses Mémoires [2], Burkhardt développe la théorie de Klein et donne aussi la classification des fonctions hyperelliptiques étroitement liée avec la classification correspondante des fonctions elliptiques. Chez Burkhardt, on rencontre, en outre, des applications des principes exposés dans la théorie de la division et de la transformation des fonctions hyperelliptiques. Dans les derniers volumes des *Math. Annal.*, se trouve une série de travaux appartenant aux élèves et aux adeptes de l'école Klein et concernant le développement des vues de Klein sur la théorie générale des fonctions hyperelliptiques.

Parmi les travaux qui servent de complément aux travaux d'Hermite, il convient de s'arrêter sur le Mémoire de Kœnigsberger [3].

Ce dernier pose le problème de la transformation de la manière suivante : Trouver tous les cas possibles où l'on peut satisfaire au système d'équations différentielles

$$\frac{dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \frac{(\alpha + \beta y_1)\, d_1 y}{\sqrt{R(y_1)}} + \frac{(\alpha + \beta y_2)\, dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}},$$

$$\frac{x_1\, dx_1}{\sqrt{R(x_1)}} + \frac{x_2\, dx_2}{\sqrt{R(x_2)}} = \frac{(\gamma + \delta y_1)\, dy_1}{\sqrt{R_1(y_1)}} + \frac{(\gamma + \delta y_2)\, dy_2}{\sqrt{R_1(y_2)}},$$

au moyen de deux équations algébriques

$$f(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0, \qquad f_2(x_1, x_2, y_1, y_2) = 0.$$

On suppose

$$R(x) = x(x-1)(1-c^2x)(1-l^2x)(1-m^2x),$$
$$R_1(y) = y(y-1)(1-k^2y)(1-\lambda^2y)(1-\mu^2y);$$

---

(1) Klein, *Ueber hyperelliptischen Sigmafunctionen* (*Math. Annal.*, Bd. XXVII et XXXII).

(2) Burkhardt, *Beitrage zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen* (*Math. Ann.*, Bd. XXXII).

Burkhardt, *Grundzüge einer allgemeinen systematik der hyperelliptischen Functionen I. Ordnung* (*Math. Ann.*, Bd. XXXV).

(3) Kœnigsberger, *Ueber die Transformation der abelschen Functionen erster Ordnung* (*Crelle Journ.*, Bd. LXV).

les quantités c, l, m, k, λ, μ sont réelles et inférieures à l'unité, tandis que les coefficients de la transformation $\alpha\beta\gamma\delta$ ne sont assujettis à aucune condition.

Au moyen du théorème de l'addition et de l'examen des zéros des fonctions ϑ impaires, Kœnigsberger montre que la condition de l'existence d'une relation linéaire entre les périodes des intégrales hyperelliptiques correspondantes, pour qu'il y ait une relation rationnelle entre les fonctions ϑ transformées, est nécessaire et suffisante. Cette proposition a été émise par Hermite, sans être démontrée. Kœnigsberger examine les propriétés des coefficients α, β, γ, δ et s'arrête sur le cas le plus simple de la transformation des arguments.

Ces recherches épuisent, d'après l'opinion de M. Pokrovsky, la question générale de la théorie des transformations. De ces questions générales, il passe à l'étude des cas particuliers, en commençant par les transformations du premier degré.

L'application de la méthode d'Hermite à la transformation du premier degré se rencontre d'abord dans le Mémoire de Weber ([1]). Ayant établi les équations fonctionnelles auxquelles satisfont les fonctions ϑ données et les fonctions ϑ transformées, Weber se sert des hypothèses d'Hermite sur les coefficients dans les expressions des périodes des intégrales données et des intégrales transformées.

Il détermine la constante arbitraire qui apparaît dans les transformations du premier degré à l'aide de la généralisation de ce qu'on appelle les *sommes* de Gauss ([2]).

L'extension des sommes de Gauss au cas de plusieurs arguments a été donnée par Weber ([3]) et Jordan ([4]).

L'application de la méthode d'Hermite à la transformation du premier degré se rencontre également dans le Mémoire de

---

([1]) Weber, *Ueber die unendlich vielen Formen der ϑ Functionen* (*Crelle Journ.*, Bd. LXXIV).

([2]) Dirichlet, *Vorlesungen über Zahlentheorie* (sup. I).

([3]) Weber, *Ueber die mehrfachen gaussischen Summern* (*Crelle's J.*, Bd. LXXIV).

([4]) Jordan, *Sur les sommes de Gauss a plusieurs variables* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences*, t. LXXIII).

Krause ([1]). Les travaux sont fondés sur la formation d'une transformation linéaire générale au moyen des transformations de la forme la plus simple auxquelles conduit l'idée de Kronecker de la décomposition des déterminants. Ayant pris un système linéaire général formé de coefficients qui figurent dans les relations entre les périodes des intégrales données et des intégrales transformées, Krause trouve, au moyen de la théorie des fractions continues, six *représentants* de systèmes non équivalents et, pour chacun d'eux, il obtient des relations entre les fonctions ϑ données et les fonctions ϑ transformées.

La question des transformations du deuxième degré est étudiée dans les Mémoires de Kœnigsberger ([2]).

Dans le premier de ces Mémoires, après avoir passé en revue quelques propositions générales de la théorie de Weierstrass, il déduit le théorème de la multiplication de deux séries ϑ. De ce théorème, il tire celui de l'addition des fonctions ϑ ainsi que quelques cas particuliers de transformations du deuxième et du troisième degré, comme, par exemple, la transformation qui conduit à la duplication des arguments et des modules de périodicité des fonctions ϑ.

Dans le Mémoire suivant, Kœnigsberger ([3]), ayant pris pour point de départ la méthode d'Hermite, donne une théorie générale des transformations du deuxième degré.

Comme complément aux recherches de Kœnigsberger vient le travail de Prinsheim ([4]). Le but principal de son Mémoire consiste dans l'examen détaillé des relations qui existent lorsque la fonction ϑ transformée se présente comme somme des carrés de quatre fonctions ϑ du système primitif. Prinsheim démontre que, pour chaque transformation du deuxième degré, il existe quatre et seulement quatre fonctions ϑ transformées.

([1]) KRAUSE, *Ueber die lineare Transformation der hyperelliptischen Functionen ester Ordnung* (*Math. Ann.*, Bd. XVII).

([2]) KŒNIGSBERGER, *Ueber die Transformation der abelschen Functionen erster Ordnung* (*Crelle's J.*, Bd. LXIV).

([3]) KŒNIGSBERGER, *Ueber die Transformation des zweiter Grades für die abelschen Functionen erster Ordnung* (*Crelle's J.*, Bd. LXVII).

([4]) PRINSHEIM, *Zur Transformation des zweiten Grades der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung* (*Math. Ann*, Bd. IX).

Comme conclusion de son Mémoire, il examine le cas spécial de la transformation dans laquelle les fonctions ϑ transformées se décomposent en un produit de deux fonctions elliptiques ϑ.

Le cas particulier des transformations du second degré, la duplication des arguments, est examiné par Borchardt ([1]) dans son Mémoire, ainsi que par Krause. Borchardt indique seulement le caractère des transformations, lesquelles, étant successivement appliquées, conduisent à la duplication des arguments.

Krause donne l'une des formules de la duplication, mais sous une forme très compliquée.

Les transformations du second degré trouvent une application géométrique dans la question de la surface de Kummer ([2]) du quatrième degré avec seize points nodaux.

Des travaux ont été faits dans cette voie par les savants : Cayley ([3]), Borchardt ([4]), Weber ([5]) et Rohn ([6]).

La théorie générale des transformations du troisième degré a été donnée par Kœnigsberger dans son Mémoire ([7]).

L'application de la méthode d'Hermite à la transformation du troisième et du cinquième degré, la déduction des équations *modulaires* correspondantes ainsi qu'une série de relations différentielles entre les fonctions ϑ elles-mêmes et leurs dérivées figurent dans l'Ouvrage de Krause cité plus haut.

([1]) Borchardt, *Sur les transformations du second ordre des fonctions hyperelliptiques qui, appliquées deux fois de suite, produisent la duplication* (*Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences,* t. LXXXVIII).

([2]) Kummer, *Monatsbericht der Akad. zu Berlin;* 1864.

([3]) Cayley, *On the double ϑ-functions in connexion with a* 16-*nodal quadric surface* (*Crelle*, t. LXXXIII). — Cayley, *On the* 16-*nodal quadric surface* (*Crelle*, t. LXXXIV).

([4]) Borchardt, *Ueber die Darstellung der Kummerschen Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpuncten durch die Göpelsche biquadratische Relation zwischen vier Thêtafunctionen mit zwei Variabeln* (*Crelle*, t. LXXXIII).

([5]) Weber, *Ueber die Kummersche Fläche vierter Ordnung mit sechszehn Knotenpuncten und ihre Beziehung zu den Thêtafunctionen von zwei veränderlichen* (*Crelle,* t. LXXXIV).

([6]) Rohn, *Transformation der hyperelliptischen Functionen $p=2$ und ihre Bedeutung für die Kummersche Fläche* (*Math. Ann.,* t. XV.)

([7]) Koenigsberger, *Ueber die Transformation dritten Grades und die zugehörigen Modulargleichungen der abelschen Functionen erster Ordnung* (*Crelle's J.*, Bd. t. LXVII).

A la même question doit être rattachée une série d'applications intéressantes de la théorie générale des transformations, applications au problème de la réduction des intégrales et des fonctions hyperelliptiques aux intégrales et fonctions elliptiques. Cette question est étudiée dans les travaux de Kœnigsberger, Appell, Picard et Kavalevskaïa.

Cet aperçu historique est nécessaire pour expliquer la façon de voir de M. Pokrovsky sur la théorie des transformations des fonctions hyperelliptiques.

Selon lui, l'un des défauts essentiels de la théorie des transformations, dans son état actuel, consiste en ce que la question des transformations des fonctions ϑ obtenues au moyen de l'inversion des intégrales hyperelliptiques se trouve en dehors de toute liaison avec la question des transformations des intégrales elles-mêmes.

La résolution du problème des transformations se ramène, ainsi qu'on le voit, d'après ce qui a été exposé plus haut, à la recherche des fonctions ϑ d'ordres supérieurs au moyen des fonctions ϑ de premier ordre; mais la connaissance de ces expressions est insuffisante pour revenir au système initial et au système transformé des intégrales hyperelliptiques. Par cette voie on ne peut obtenir ni des relations entre les limites des intégrales des systèmes indiqués, ni des substitutions servant au passage d'une quelconque des intégrales du système initial à l'intégrale correspondant au système transformé.

En présence de ce fait, M. Pokrovsky s'est proposé, en limitant le problème aux transformations de premier et de deuxième degré, d'établir la méthode inverse dont les transformations des intégrales hyperelliptiques sont le point de départ.

Ses recherches sont basées sur deux Mémoires de Richelot [1].

Ces Mémoires ont paru à une époque où le problème de l'inversion n'était pas encore résolu et ils sont restés inachevés. On sait que la première solution donnée par Rosenhain et Göpel

---

[1] Richelot, *De integralibus abellianis primi ordinis, commentatio prima* (*Crelle's Journ.*, Bd. XII; 1834).

Richelot, *De transformatione atque computatione integralium abelianarum primi ordinis* (*Crelle's J.*, Bd. XVI; 1837).

remonte à l'année 1846-1847. Il est vrai que, dans son article [1], Richelot remarque qu'il est parvenu à de nombreux résultats dans la théorie de la transformation des fonctions hyperelliptiques, et il formule sans démonstration un des théorèmes qui s'y rapportent; mais le professeur Kronecker a personnellement affirmé à M. Pokrovsky qu'on n'a pas trouvé trace de ces recherches dans les papiers posthumes de Richelot.

La question du passage des transformations des intégrales hyperelliptiques aux transformations des fonctions constitue le principal objet des recherches du professeur Pokrovsky. Pour l'atteindre, il se sert des idées de Riemann.

Les intégrales hyperelliptiques de la première classe s'étendent, comme on sait, monotropiquement à une surface à deux feuillets. Ayant construit deux pareilles surfaces pour les intégrales données et les intégrales transformées, M. Pokrovsky établit une correspondance monotrope entre l'un et l'autre système d'intégrales.

Il trouve ainsi une relation linéaire entre les périodes des intégrales donnée et des intégrales transformées, c'est-à-dire qu'il obtient, pour chaque transformation, un système hermitien de coefficients.

Pour le passage aux transformations des fonctions hyperelliptiques, il se sert de la théorie existante de la transformation des fonctions ϑ, et de cette façon il rattache ses recherches à tous les travaux qui se rapportent aux recherches scientifiques de l'espèce. Enfin il examine en détail les transformations elles-mêmes des fonctions hyperelliptiques.

Le Travail de M. Pokrovsky se compose de cinq Chapitres; son premier Chapitre traite de la réduction, d'après Richelot, des intégrales hyperelliptiques à la forme normale de Jacobi.

La méthode de Richelot conduit M. Pokrovsky à cette conclusion que toutes les transformations linéaires peuvent être partagées en deux classes, et il donne le moyen d'obtenir, pour chacune des transformations, une substitution linéaire au moyen de

---

[1] Richelot, *Ueber die Transformation zweiter Ordnung bei dem ultraelliptischen Integralen erster Ordnung* (*Monatsber. der Akad. zu Berlin*, 1866).

laquelle elle s'effectue, ainsi que les expressions des modules donnés.

Dans les recherches qui suivent, il introduit une nouvelle méthode. Ayant construit deux surfaces de Riemann à l'une desquelles s'étendent *monotropiquement* les intégrales données et à l'autre les intégrales transformées, il établit une correspondance monotrope entre l'un et l'autre système d'intégrales. M. Pokrovsky détermine la liaison entre les radicaux qui figurent dans les intégrales hyperelliptiques données et les intégrales transformées, dans différents intervalles entre les points critiques, et apprécie l'influence de ces points sur la signification des radicaux.

De là s'obtiennent facilement les équations différentielles de la transformation avec leurs coefficients α, β, γ, δ.

La discussion de l'égalité des intégrales correspondantes dans divers intervalles entre les points critiques conduit à trouver une relation linéaire entre les périodes du système donné et du système transformé, c'est-à-dire fournit d'avance, pour toute transformation, un système linéaire hermitien de coefficients.

Ayant analysé une transformation dans chacune des deux classes, il consigne les résultats définitifs dans des Tables, et l'on voit que chaque transformation est caractérisée : 1° par l'expression des modules transformés au moyen des modules donnés; 2° par la substitution linéaire au moyen de laquelle s'effectue la transformation; 3° par les coefficients de la transformation; 4° par le système hermitien de coefficients qui entrent dans les relations entre les périodes.

Pour rendre claire l'idée de l'auteur, on peut citer la transformation qui est analogue à celle de Jacobi [1] pour les modules complémentaires.

L'ayant effectuée, l'auteur obtient

$$\frac{dy}{2\sqrt{R(y)}} = \frac{(\alpha+\beta z)\,dz}{2\sqrt{R_1(z)}},$$

$$\frac{y\,dy}{2\sqrt{R(y)}} = \frac{(\gamma+\delta z)\,dz}{2\sqrt{R_1(z)}},$$

[1] Jacobi, *Fundamenta nova Theoriæ functionum ellipticarum*, § 19.

où

$$R(y) = y(1-y)(1-k^2 y)(1-\lambda^2 y)(1-\mu^2 y).$$
$$R_1(z) = z(1-z)(1-c^2 z)(1-l^2 z)(1-m^2 z).$$

La Table qui correspond à cette transformation est la suivante :

$$c^2 = \mu_1^2 = 1-\mu^2, \qquad l^2 = h_1^2 = 1-\lambda^2, \qquad m = k_1^2 = 1-k^2,$$
$$y = \frac{z}{z-1},$$
$$\alpha = -i = -\sqrt{-1}, \qquad \beta = i, \qquad \gamma = 0, \qquad \delta = i,$$
$$a_0 = a_1 = a_2 = b_0 = b_1 = b_3 = c_0 = c_2 = c_3 = d_1 = d_2 = d_3 = 0,$$
$$b_2 = d_0 = -1, \qquad a_3 = c_1 = 1.$$

En examinant les Tables formées pour toutes les douze transformations linéaires, M. Pokrovsky arrive à cette conclusion que, entre les coefficients $a_0, a_1, \ldots, d_3$ auront lieu non seulement les douze relations données par Hermite ([1]), mais encore de nouvelles relations :

$$a_0 a_3 + a_1 a_2 = 0, \quad b_0 b_3 + b_1 b_2 = 0, \quad c_0 c_3 + c_1 c_2 = 0, \quad d_0 d_3 + d_1 d_2 = 0,$$
$$a_3 d_3 + b_3 c_3 = 0, \quad a_2 d_2 + b_2 c_2 = 0, \quad a_1 d_1 + b_1 c_1 = 0, \quad a_0 d_0 + b_0 c_0 = 0.$$

Le second Chapitre est consacré à l'étude de la question des transformations linéaires des fonctions θ et des fonctions hyperelliptiques dans la forme Weierstrass. Ici l'auteur se sert des fonctions θ de la forme

$$\theta\begin{pmatrix} n_1 n_2 \\ m_1 m_3 \end{pmatrix}(v, v_1; \delta)$$
$$= \sum_{p_1=-\infty}^{+\infty} \sum_{p_2=-\infty}^{+\infty} e^{2\pi i\left(v_1+\frac{m_1}{2}\right)\left(p_1-\frac{n_1}{2}\right)+2\pi i\left(v_2+\frac{m_2}{2}\right)\left(p_2-\frac{n_2}{2}\right)+\Phi\left(p_1-\frac{n_1}{2}\cdot p_2-\frac{n_2}{2}\right)}.$$

Ici

$$\Phi(p_1, p_2) = \pi(\delta_{11} p_1^2 + 2\delta_{12} p_1 p_2 + \delta_{22} p_2^2),$$

et le complexe des nombres entiers $\begin{pmatrix} n_1, n_2 \\ m_1, m_2 \end{pmatrix}$ porte le nom de *caractéristique*.

Le problème de la transformation linéaire des fonctions θ ou

([1]) HERMITE, *Sur la théorie de la transformation des fonctions abéliennes.*

des fonctions hyperelliptiques consiste dans le passage du système

$$u_1 = \int^{y_1} \frac{dy_1}{2\sqrt{R(y_1)}} + \int^{y_2} \frac{dy_2}{2\sqrt{R(y_2)}},$$

$$u_2 = \int^{y_1} \frac{y_1\, dy_1}{2\sqrt{R(y_1)}} + \int^{y_2} \frac{y_2\, dy_2}{2\sqrt{R(y_2)}},$$

au système

$$u_1 = \int^{z_1} \frac{(\alpha + \beta z_1)\, dz_1}{2\sqrt{R_1(z_1)}} + \int^{z_2} \frac{(\alpha + \beta z_2)\, dz_2}{2\sqrt{R_1(z_2)}},$$

$$u_2 = \int^{z_2} \frac{(\gamma + \delta z_1)\, dz_1}{2\sqrt{R_1(z_1)}} + \int^{z_2} \frac{(\gamma + \delta z_2)\, dz_2}{2\sqrt{R_1(z_2)}}.$$

Les limites inférieures sont choisies d'une façon déterminée pour chaque transformation particulière.

Désignons les périodes des intégrales du système donné par $2K$ et celles du système transformé par $2L$ (avec des indices correspondants).

Ayant désigné par $\theta(v_1, v_2; \delta)$ la fonction fondamentale correspondante au système donné, M. Pokrovsky obtient les relations

$$\delta_{11} = \frac{K'_{11} K_{22} - K_{12} K'_{21}}{K_{11} K_{22} - K_{12} K_{21}},$$

$$\delta_{12} = \delta_{21} = \frac{K_{22} K'_{12} - K_{12} K'_{22}}{K_{11} K_{22} - K_{12} K_{21}},$$

$$\delta_{22} = \frac{K_{11} K'_{22} - K_{21} K'_{12}}{K_{11} K_{22} - K_{21} K_{12}},$$

$$u_1 = 2 K_{11} v_1 + 2 K_{12} v_2,$$

$$u_2 = 2 K_{21} v_1 + 2 K_{22} v_2.$$

Ayant désigné par $\theta(v'_1, v'_2; \delta')$ la fonction principale correspondant au système transformé, il obtient les formules

$$\delta'_{11} = \frac{L'_{11} L_{22} - L_{12} L'_{21}}{L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}},$$

$$\delta'_{12} = \delta'_{21} = \frac{L_{22} L'_{12} - L_{12} L'_{22}}{L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}},$$

$$\delta'_{22} = \frac{L_{11} L'_{22} - L_{21} L'_{12}}{L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21}},$$

$$v'_1 = \frac{L_{22} u_1 - L_{12} u_2}{2(L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21})},$$

$$v'_2 = \frac{L_{11} u_2 - L_{21} u_1}{2(L_{11} L_{22} - L_{12} L_{21})}.$$

Passant à la recherche des relations entre les fonctions θ données et les fonctions θ transformées, il introduit avec Hermite la fonction

$$\Pi(v_1, v_2, \delta) = e^{\psi(v_1, v_2; v'_1 v'_2)}\theta(v'_1 v'_2, \delta'),$$

où

$$\psi(v_1, v_2; v'_1 v'_2) = -\pi i[v'_1(a_3 v_1 + b_3 v_2) + v'_2(a_2 v_1 + b_2 v_2)],$$

a_2, a_3, b_2, b_3 étant les coefficients connus dans les relations entre les périodes.

L'étude des équations fonctionnelles, auxquelles satisfait la fonction d'Hermite, conduit, après simplification, à la forme générale

$$e^{\frac{\pi i}{4}\sum_{k=1}^{k=2} m_k n_k}\frac{\theta\begin{pmatrix} n_1 n_2 \\ m_1 m_2 \end{pmatrix}(v'_1, v'_2; \delta')}{\theta(v'_1, v'_2, \delta')} = e^{\frac{\pi i}{4}\sum_{k=1}^{k=2} g_k h_k}\frac{\theta\begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{pmatrix}(v_1, v_2; \delta)}{\theta(v_1, v_2; \delta)}.$$

Les quantités g, h, m, n sont liées par les relations

$$\begin{aligned} h_1 &= m_1 d_3 + m_2 d_2 - n_2 d_1 - n_1 d_0, \\ h_2 &= m_1 c_3 + m_2 c_2 - n_1 c_0 - n_2 c_1, \\ g_1 &= -m_1 a_3 - m_2 a_2 + n_1 a_0 + n_2 a_1, \\ g_2 &= -m_1 b_3 - m_2 b_2 + n_1 b_0 + n_2 b_1. \end{aligned}$$

Dans la caractéristique $\begin{pmatrix} n_1 n_2 \\ m_1 m_2 \end{pmatrix}$ les éléments ont la signification 0 et 1; dans la caractéristique $\begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{pmatrix}$ les éléments ne sont pas encore réduits à ces expressions simples.

La formule de M. Pokrovsky pour la transformation des fonctions θ, grâce aux relations indiquées plus haut entre les coefficients $a_0, a_1, \ldots, a_3$, est incomparablement plus simple que toutes les formules de ses prédécesseurs.

Ayant établi la relation entre les fonctions θ et les fonctions hyperelliptiques à l'aide de l'équation

$$al\begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{pmatrix}(u_1, u_2, k, \lambda, \mu) = \frac{\theta\begin{pmatrix} g_1 g_2 \\ h_1 h_2 \end{pmatrix}(v_1, v_2, \delta)}{\theta(v_1, v_2; \delta)},$$

il divise les douze transformations des fonctions elliptiques en deux groupes : le groupe réel et le groupe imaginaire. Il caractérise chaque transformation par le système initial des fonctions hyperelliptiques, par les relations entre les arguments et les mo-

dules qui leur correspondent et, enfin, par les expressions des fonctions transformées au moyen des fonctions données.

Le troisième Chapitre traite du cas général des transformations du second degré d'après le Mémoire de Richelot : *De transformatione atque computatione integr. abelian.* Il s'arrête sur l'examen détaillé de deux principales transformations des intégrales hyperelliptiques qui, par leur caractère, sont analogues aux deux transformations elliptiques de Landen.

Dans l'étude de la première transformation générale, l'auteur suit la méthode qu'il appliquait dans les transformations linéaires.

Il déterminait d'abord la relation entre les radicaux qui figurent dans les divers intervalles entre les points critiques du système initial et du système transformé.

De là il obtient facilement des équations différentielles avec leurs coefficients α, β, γ, δ.

Dans la question de l'établissement d'une relation monotrope entre les intégrales du système initial ou du système proposé, M. Pokrovsky a rencontré de grandes difficultés qui ont nécessité une discussion détaillée et l'application des idées de Riemann.

Ainsi, dans la première transformation principale, l'auteur, à l'aide des substitutions

$$\frac{1-(1-c_1 l_1)x_1}{1-(1+c_1 l_1)x_1} = \frac{1-(1-c_1 l_1)x_2}{1-(1+c_1 l_1)x_2} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{(1-k^2 y_1)(k^2-\lambda^2\mu^2 y_1)}{(1-y_1)(1-\lambda^2\mu^2 y_1)}},$$

$$\frac{1-(1-c_1 l_1)x_3}{1-(1+c_1 l_1)x_3} = -\frac{1-(1-c_1 l_1)x_4}{1-(1+c_1 l_1)x_4} = \frac{1}{k}\sqrt{\frac{(1-k^2 y_2)(k^2-\lambda^2\mu^2 y_2)}{(1-y_2)(1-\lambda^2\mu^2 y_2)}},$$

a obtenu

$$\int_0^{y_1}\frac{dy_1}{2\sqrt{R(y_1)}} = \int_0^{x_1}\frac{(\alpha+\beta x_1)\,dx_1}{2\sqrt{R_1(x_1)}} + \int_1^{x_2}\frac{(\alpha+\beta x_2)\,dx_2}{2\sqrt{R_1(x_2)}},$$

$$\int_0^{y_1}\frac{y_1\,dy_1}{2\sqrt{R(y_1)}} = \int_0^{x_1}\frac{(\gamma+\delta x_1)\,dx_1}{2\sqrt{R_1(x_1)}} + \int_1^{x_2}\frac{(\gamma+\delta x_2)\,dx_2}{2\sqrt{R_1(x_2)}},$$

$$\int_\infty^{y_2}\frac{dy_2}{2\sqrt{R(y_2)}} = \int_0^{x_3}\frac{(\alpha+\beta x_3)\,dx_3}{2\sqrt{R_1(x_3)}} + \int_1^{x_4}\frac{(\alpha+\beta x_4)\,dx_4}{2\sqrt{R_1(x_4)}},$$

$$\int_\infty^{y_2}\frac{y_2\,dy_2}{2\sqrt{R(y_2)}} = \int_0^{x_3}\frac{(\gamma+\delta x_3)\,dx_3}{2\sqrt{R_1(x_3)}} + \int_1^{x_4}\frac{(\gamma+\delta x_4)\,dx_4}{2\sqrt{R_1(x_4)}}.$$

De là se déduisent facilement les relations entre les modules

donnés et les modules transformés, ainsi que les expressions des coefficients de la transformation α, β, γ, δ.

Le système linéaire hermitien de coefficients pour la transformation principale est le suivant :

$$a_0 = 1, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0; \quad b_1 = 1, \quad b_0 = b_2 = b_3 = 0;$$
$$c_2 = 2, \quad c_0 = c_1 = c_3 = 0; \quad d_3 = 2, \quad d_0 = d_1 = d_2 = 0.$$

Dans la seconde transformation principale, M. Pokrovsky, à l'aide des substitutions

$$\frac{1 - lm\,x_1}{1 + lm\,x_1} = -\frac{1 - lm\,x_2}{1 + lm\,x_2} = \frac{1}{\mu_1}\sqrt{\frac{(1 - \mu^2 y_1)[\mu_1^2 - (\mu_1^2 - k_1^2\lambda_1^2)y_1]}{1 - (1 - k_1^2\lambda_1^2)y_1}},$$
$$\frac{1 - lm\,x_3}{1 + lm\,x_3} = -\frac{1 - lm\,x_4}{1 + lm\,x_4} = \frac{1}{\mu_1}\sqrt{\frac{(1 - \mu^2 y_2)[\mu_1^2 - (\mu_1^2 - k_1^2\lambda_1^2)y_2]}{1 - (1 - k_1^2\lambda_1^2)y_2}},$$

a obtenu

$$\int_0^{y_1} \frac{dy_1}{2\sqrt{R(y_1)}} = \int_0^{x_1} \frac{(\alpha + \beta x_1)\,dx_1}{2\sqrt{R_1(x_1)}} + \int_\infty^{x_2} \frac{(\alpha + \beta x_2)\,dx_2}{2\sqrt{R_1(x_2)}},$$
$$\int_0^{y_1} \frac{y_1\,dy_1}{2\sqrt{R(y_1)}} = \int_0^{x_1} \frac{(\gamma + \delta x_1)\,dx_1}{2\sqrt{R_1(x_1)}} + \int_\infty^{x_2} \frac{(\gamma + \delta x_2)\,dx_2}{2\sqrt{R_1(x_2)}},$$
$$\int_1^{y_2} \frac{dy_2}{2\sqrt{R(y_2)}} = \int_0^{x_3} \frac{(\alpha + \beta x_3)\,dx_3}{2\sqrt{R_1(x_3)}} + \int_\infty^{x_4} \frac{(\alpha + \beta x_4)\,dx_4}{2\sqrt{R_1(x_4)}},$$
$$\int_1^{y_2} \frac{y_2\,dy_2}{2\sqrt{R(y_2)}} = \int_0^{x_3} \frac{(\gamma + \delta x_3)\,dx_3}{2\sqrt{R_1(x_3)}} + \int_\infty^{x_4} \frac{(\gamma + \delta x_4)\,dx_4}{2\sqrt{R_1(x_4)}},$$

De là il est facile de tirer les relations entre les modules donnés et les modules transformés ainsi que les expressions des coefficients de la transformation α, β, γ, δ.

Dans l'établissement des relations entre les périodes dans la seconde transformation principale, M. Pokrovsky a utilisé une méthode nouvelle : il a montré que l'application des deux transformations principales conduit à la duplication des intégrales hyperelliptiques et de leurs périodes. Il est arrivé ainsi au système hermitien suivant de coefficients :

$$a_0 = 2, \quad a_1 = a_2 = a_3 = 0;$$
$$b_1 = 2, \quad b_0 = b_2 = b_3 = 0;$$
$$c_2 = 1, \quad c_0 = c_1 = c_3 = 0;$$
$$d_3 = 1, \quad d_0 = d_1 = d_2 = 0.$$

Les transformations de second degré jouissent de cette particularité que l'intégrale hyperelliptique donnée se dédouble en une

somme de deux intégrales; c'est pourquoi les équations dont l'inversion conduit aux fonctions hyperelliptiques constitueront chacune une somme de quatre intégrales avec des limites supérieures différentes.

Pour passer à l'inversion du système transformé, il est nécessaire de se servir du théorème d'Abel. M. Pokrovsky touche à la solution de cette question à la fin du troisième Chapitre.

Dans le quatrième Chapitre, il examine les transformations des fonctions θ qui correspondent aux deux transformations principales des intégrales hyperelliptiques. Les relations entre les fonctions θ données et les fonctions θ transformées peuvent être obtenues à l'aide du théorème de la multiplication de deux séries θ. Il faut, dans ce cas, employer la méthode d'Hermite.

De ces deux transformations des fonctions θ, l'une conduit à la division par moitié des modules de périodicité, et l'autre à la duplication des arguments et des modules de périodicité.

Pour la première transformation, M. Pokrovsky a trouvé la formule générale suivante

$$\theta\begin{pmatrix} n_1, & n_2 \\ m_1, & m_2 \end{pmatrix}\left(v_1, v_2; \frac{\delta}{2}\right)\theta\begin{pmatrix} n_1, & n_2 \\ m_1+\mu_1, & m_2+\mu_2 \end{pmatrix}\left(0,0; \frac{\delta}{2}\right)$$

$$= \sum_{\nu_1, \nu_2} (-1)^{\sum_{k=1}^{k=2} \nu_k(\mu_k+m_k)} \theta\begin{bmatrix} n_1+\nu_1, & n_2+\nu_2 \\ \mu_1, & \mu_2 \end{bmatrix}(v_1, v_2; \delta)\,\theta\begin{pmatrix} \nu_1, & \nu_2 \\ \mu_1, & \mu_2 \end{pmatrix} v_1, v_2; \delta),$$

dans laquelle il faut attribuer aux quantités ν_1, ν_2 des *significations* correspondantes 00, 01, 10, 11 et c'est à ces *significations* que s'étend la sommation dans le second membre; les quantités μ_1, μ_2 reçoivent quatre significations pareilles. Les nombres n_1, n_2, m_1, m_2 sont les éléments de l'une quelconque des seize caractéristiques des fonctions θ.

Pour la seconde transformation, M. Pokrovsky donne la formule suivante

$$4\theta\begin{pmatrix} n_1, & n_2 \\ m_1, & m_2 \end{pmatrix}(2v_1, 2v_2; 2\delta)\theta\begin{bmatrix} \nu_1+n_1, & \nu_2+n_2 \\ m_1, & m_2 \end{bmatrix}(0,0: 2\delta)$$

$$= \sum_{\mu_1, \mu_2} (-1)^{\sum_{k=1}^{k=2} \mu_k m_k} \theta\begin{bmatrix} \nu_1, & \nu_2 \\ \mu_1+m_1, & \mu_2+m_2 \end{bmatrix}(v_1, v_2; \delta)\,\theta\begin{pmatrix} \nu_1\,\nu_2 \\ \mu_1\,\mu_2 \end{pmatrix}(v_1, v_2; \delta).$$

Il y a lieu de faire les mêmes observations pour les *indices* des caractéristiques, avec cette seule différence que μ et ν changeraient de rôle.

Ensuite, M. Pokrovsky trouve *plusieurs* relations particulières entre les fonctions θ pour les deux transformations étudiées. Conformément à la théorie générale, quatre fonctions θ transformées se présentent comme des sommes de quatre carrés de fonctions θ données.

Les douze autres fonctions transformées peuvent être exprimées au moyen des produits des fonctions données deux à deux.

L'application successive des deux transformations étudiées conduit à la duplication des arguments des fonctions θ. Quant aux formules de duplication très simples et très commodes, elles sont données à la fin du quatrième Chapitre.

Le cinquième Chapitre est consacré à la question la plus essentielle de la théorie des transformations du second degré. M. Pokrovsky fournit les relations algébriques entre les limites des intégrales du système initial et du système transformé.

Dans la transformation principale, après l'application du théorème d'Abel et la substitution

$$u_1 = \alpha w_1 + \beta w_1; \qquad u_2 = \gamma w_1 + \delta w_2,$$

il passe du système

$$u_1 = \int_0^{y_1} \frac{dy_1}{2\sqrt{R(y_1)}} + \int_\infty^{y_2} \frac{dy_2}{2\sqrt{R(y_2)}},$$

$$u_2 = \int_0^{y_1} \frac{y_1 dy_1}{2\sqrt{R(y_1)}} + \int_\infty^{y_2} \frac{y_2 dy_2}{2\sqrt{R(y_2)}}$$

au système

$$w_1 = \int_0^{z_1} \frac{dz_1}{2\sqrt{R_1(z_1)}} + \int_1^{z_2} \frac{dz_2}{2\sqrt{R_1(z_2)}},$$

$$w_2 = \int_0^{z_1} \frac{z_1 dz_1}{2\sqrt{R_1(z_1)}} + \int_1^{z_2} \frac{z_2 dz_2}{2\sqrt{R_1(z_1)}}.$$

En se servant de la transformation des fonctions θ qui conduit à la division par moitié des modules de périodicité, ainsi que de la théorie générale des fonctions hyperelliptiques dans la forme de Weierstrass, il trouve que z_1 et z_2 se déterminent comme les

racines carrées de l'équation

$$\mathfrak{M} z^2 + \mathfrak{N} z + \mathfrak{P} = 0.$$

Les coefficients de cette équation se ramènent à la forme

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 \sqrt{R(y_1)\,R(y_2)},$$
$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_1 + \mathfrak{N}_2 \sqrt{R(y_1)\,R(y_2)},$$
$$\mathfrak{P} = \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 \sqrt{R(y_1)\,R(y_2)}.$$

Les quantités $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{P}_2$ sont des fonctions rationnelles de y_1 et y_2 et se calculent facilement par le procédé indiqué par l'auteur.

Dans la seconde transformation principale, M. Pokrovsky arrive également à une équation du second degré de type semblable.

En considérant les propriétés des modules, on peut se convaincre facilement que les deux transformations principales des fonctions hyperelliptiques sont entièrement analogues aux deux transformations de Landen des fonctions elliptiques. La parenté de ces transcendantes, entrevue par M. Pokrovsky dans sa théorie des fonctions hyperelliptiques, s'établit d'une façon encore plus saillante après l'étude de la théorie des transformations qu'il présente.

Cet exposé permet d'apprécier combien M. Pokrovsky a consciencieusement rempli la tâche scientifique qu'il s'était proposée et jusqu'à quel point il a répondu aux espérances que je formulais dans un Compte rendu sur son Ouvrage, paru en 1888, dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*. L'aperçu historique de la théorie des transformations hyperelliptiques fait également ressortir combien a été féconde l'influence des profondes recherches d'Hermite sur le développement de cette théorie.

BOUGAÏEF.

W.-W. ROUSE BALL. — MATHEMATICAL RECREATIONS AND PROBLEMS OF PAST AND PRESENT TIMES. Second edition. 1 vol. in-12, 241 p. London, 1892.

La vulgarisation des Mathématiques est celle des vulgarisations scientifiques qui est, incontestablement, la plus difficile. Les idées abstraites conviennent mal aux cerveaux qui n'y sont pas préparés parce qu'elles les obligent à de puissants efforts de concentration qui les fatiguent et les dégoûtent. Il faut donc, pour mettre les Mathématiques à la portée de tous, trouver une forme d'exposition concrète, tangible, qui fasse image et donne à l'esprit des points de repère choisis dans les objets connus. Dégager ainsi les Mathématiques de l'abstrait est souvent fort difficile et ceci explique pourquoi, de toutes les Sciences, la Science des Mathématiques, dont le domaine est cependant si étendu, est celle qui est la plus ignorée. Aussi devons-nous une grande reconnaissance aux mathématiciens de valeur qui, comme M. Rouse Ball, ne reculent pas devant la tâche ingrate de faire un livre de Mathématiques qui s'adresse à d'autres lecteurs qu'à des mathématiciens.

Les *Mathematical recreations and problems* de M. Ball eurent, dès leur apparition, un tel succès que la première édition fut épuisée en trois mois. C'est le plus bel éloge qu'on puisse faire d'un livre de vulgarisation.

L'Ouvrage est un recueil de questions mathématiques qui rentrent dans trois catégories distinctes : les problèmes amusants et les paradoxes; les questions historiques et enfin les expositions élémentaires de principes des Mathématiques supérieures qui touchent au domaine de la Philosophie.

Dans la première catégorie rentrent les problèmes amusants d'Arithmétique, presque tous tirés du livre de Bachet. En voici un exemple : Trois personnes P, Q, R choisissent trois objets a, e, i dans un ordre qu'il faut déterminer. A cet effet, on prie la personne P de prendre 1 jeton, Q de prendre 2 jetons et R 3 jetons. Puis la personne ayant choisi a prend autant de jetons qu'elle en a, celle qui a choisi e deux fois autant de jetons qu'elle en a et celle qui a choisi i trois fois autant. Connaissant la somme de jetons pris par les trois personnes, on en conclut l'ordre du choix par une règle qu'on retient au moyen d'une phrase. J'ai remarqué qu'on pour-

rait généraliser ce problème en lui donnant une forme très mathématique et voici comment : Soient $P_0, P_1, \ldots, P_{n-1}$, n personnes et $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$, n objets. On donne à P_k k jetons et l'on prie la personne qui a choisi A_h de prendre n^h fois autant de jetons qu'elle en a. Si les objets $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ ont été choisis, respectivement, par les personnes $P_{\alpha_0}, P_{\alpha_1}, \ldots, P_{\alpha_{n-1}}$, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ désignant les nombres $0, 1, \ldots, n-1$ dans un certain ordre, la somme des jetons pris sera

$$\alpha_0 + \alpha_1 n + \alpha_2 n^2 + \ldots + \alpha_{n-1} n^{n-1},$$

c'est-à-dire que cette somme écrite dans le système de numération de base n s'écrira $\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_2, \alpha_1, \alpha_0$. Donc l'objet A_h aura été choisi par la personne P_{α_h}, c'est-à-dire par la personne qui a pris un nombre de jetons marqué par le $(h+1)^{\text{ième}}$ chiffre significatif, à partir de la droite, de la somme écrite dans le système de base n.

Puis, viennent les problèmes de combinaisons; les problèmes classiques des passages en bateau, dont le plus connu est celui de la chèvre, du loup et du chou; les problèmes ou tours de cartes, dont le plus élégant est, à coup sûr, celui des piles de Gergonne.

A côté de ces problèmes faciles, problèmes qui sont de petits *jeux de société*, l'auteur aborde des questions dites *Récréations mathématiques,* mais qui, à vrai dire, sont de terribles casse-têtes ou de véritables questions de Géométrie : les carrés magiques, les huit reines de l'échiquier, le problème unicursal d'Euler du passage des ponts de Kœnigsberg qui conduit naturellement au problème des labyrinthes et le problème des quinconces. L'auteur énonce la jolie proposition qu'il suffit de quatre couleurs pour colorer une carte géographique de façon que deux pays contigus ne soient jamais de la même teinte.

Le Chapitre V contient l'étude de trois jeux de patience bien connus : le taquin, le baguenaudier et la tour de Hanoï. A propos de la tour de Hanoï, M. Rouse Ball l'attribue au Dr Clauss et regrette de ne pas avoir de renseignements plus complets sur le jeu et sur son auteur. Le véritable auteur de ce jeu est Édouard Lucas qui a fait paraître tous les jeux qu'il a inventés sous le pseudonyme du *mandarin Claus* (anagramme de Lucas), professeur au collège de *Li-Sou-Stian* (anagramme de Saint-Louis).

Nous trouvons au Chapitre II des démonstrations de Géométrie

qui, quoique le raisonnement soit rigoureux, donnent des résultats absurdes, parce que le raisonnement se fonde sur la figure qui est fausse. Enfin, le Chapitre III contient d'intéressantes indications sur les paradoxes classiques : Achille et la tortue, le moyen de naviguer, à voiles, plus vite que le vent, les effets de la diminution de la pression dans un gaz en mouvement, dont un exemple est celui de la balle *coupée* au jeu de lawn-tennis.

Les questions historiques, disséminées dans le livre, sont toutes traitées avec le plus grand soin. Je citerai, tout particulièrement, un remarquable Chapitre sur l'histoire de la quadrature du cercle et les valeurs approchées du nombre π.

Enfin, la partie la plus intéressante des *Mathematical Recreations* est, sans contredit, celle qui contient les notions élémentaires sur les principes mathématiques. M. Ball, au Chapitre III, apprend au lecteur ce que c'est qu'une force et un travail ; il énonce le principe de l'inertie et montre l'impossibilité du mouvement perpétuel ou plutôt énonce clairement ce qu'il faut entendre par là.

Cet intéressant Volume se termine par trois Chapitres tout à fait remarquables sur l'hyperespace, la mesure du temps et la constitution de la matière.

En étudiant quelles seraient les lacunes qui pourraient exister dans les conceptions d'habitants assujettis à vivre dans un espace à deux dimensions, l'auteur montre comment, en généralisant, on pourrait prévoir des simplifications dans nos conceptions en supposant l'existence d'un espace à quatre dimensions. Certains phénomènes physiques, la lumière, par exemple, trouveraient une explication toute naturelle si l'on admettait que notre espace à trois dimensions n'est qu'une multiplicité contenue dans un espace à quatre dimensions et que cette multiplicité soit formée d'une matière, l'éther.

Le Chapitre XI, sur la mesure du temps, donne la détermination du temps, des saisons, la construction de divers calendriers.

Enfin, le dernier Chapitre est fait presque tout entier des idées de M. P.-G. Tait et de Lord Kelvin (Sir William Thomson) sur la constitution de la matière. Ici encore, l'hypothèse de l'existence d'un espace à quatre dimensions serait d'un réel secours.

C. Bourlet.

Félix MULLER. — Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie mit hinweis auf die Quellen-Literatur, 104 p. in-8°. Leipzig, Teubner; 1892.

M. Müller a eu l'idée de réunir dans une Table chronologique les noms et faits qui intéressent l'histoire des Mathématiques, de la Physique et de l'Astronomie, avec un bref sommaire, pour chaque savant, de la part dans laquelle il a contribué au progrès intellectuel de l'humanité et avec l'indication des Ouvrages à consulter pour connaître plus exactement le détail des travaux. Les dates indiquent approximativement l'année moyenne de la période d'activité; le travail s'arrête au reste à l'an 1500; pour les temps modernes, ainsi que le remarque M. Müller, il conviendrait d'adopter un autre système, la chronologie étant désormais assez précise et assez assurée pour que l'on ne puisse plus se contenter d'une approximation.

Un tel Ouvrage, qui n'a la prétention de servir que comme Mémento facile à consulter, mais qui comme tel est susceptible de rendre de réels services, ne peut valoir que par son exécution. Comme plan d'ensemble, il est parfaitement conçu; les sommaires sont bien condensés et aussi complets qu'on peut le désirer; les sources indiquées sont aussi bien choisies que possible. Cependant sur certains points l'indication donnée n'est pas suffisante pour un Mémento de ce genre; ainsi pour le commencement d'une ère astronomique, comme celle de Nabonassar, ce n'est pas assez d'indiquer l'année 747 : il convenait d'indiquer la date précise du jour et de l'heure.

Un travail d'érudition ne doit jamais en principe être consulté qu'avec précaution, et il n'y a pas, en conséquence, à relever trop vivement les erreurs qu'a pu commettre M. Müller; il suffit qu'elles ne soient ni assez nombreuses ni assez graves pour rendre l'Ouvrage inutilisable. D'ailleurs on ne peut équitablement mettre au compte de l'auteur que celles qui ne proviennent pas des sources qu'il a consultées, mais résultent de *lapsus* de sa part. J'en signalerai quelques-unes sous l'indication des dates qu'il donne.

390 (av. J.-C.). — Si Archytas a considéré une surface de

tore, avec ses intersections par un cône et un cylindre, on ne peut dire qu'il ait introduit les lignes *spiriques*, sections planes du tore (*voir* Perseus, sous l'année 150).

325 (av. J.-C.). — Tyrtanus (au lieu de Tyrtamus) pour le nom véritable de Théophraste est peut-être une faute d'impression.

280 (av. J.-C.). — Ce n'est pas dans son écrit *Des grandeurs et distances du Soleil et de la Lune* qu'Aristarque a enseigné le mouvement de la Terre autour du Soleil.

180 (av. J.-C.). — Nicomède (l'inventeur de la conchoïde) est donné comme de Gerasa, probablement par confusion avec Nicomaque (100 après J.-C.). En fait, on ignore la patrie de Nicomède.

Quant aux erreurs provenant des sources, je n'ai pas la prétention d'en faire le dépouillement complet; mais je crois devoir signaler cette circonstance qu'en ce qui concerne l'Astronomie les Ouvrages historiques les plus récents, ceux de Wolf, sont loin de présenter les mêmes garanties d'exactitude que les *Vorlesungen* de Moritz Cantor, par exemple, pour les Mathématiques pures. Il ne serait que trop facile de le prouver.

M. Müller a également fait usage avec trop de confiance des *Vite* de Bernardino Baldi, publiées par Narducci dans le *Bulletin Boncompagni*, 1886. D'autre part, sur certains points contestés ou contestables, il eût sans doute mieux fait d'indiquer qu'ils donnaient lieu à controverse plutôt que de se ranger à une opinion particulière, comme pour le célèbre nombre nuptial de Platon, qu'il égale à 1000 avec Demme.

Enfin, dans un Ouvrage de chronologie, on aurait pu désirer la rectification de quelques erreurs légendaires, comme celle qui fait vivre vers 640 Johannes Philoponus, pour le faire assister à la prise d'Alexandrie par les Arabes. Comme son maître Asclépius de Tralles, il doit être reporté au temps de Simplicius et d'Eutocius, c'est-à-dire plus de cent ans auparavant.

Une dernière remarque : en attribuant les *Chapitres d'Optique* (Κεφάλαια τῶν ὀπτικῶν) à Domninus de Larisse (450), M. Müller aurait dû rayer de sa liste Héliodore (500) marqué comme né à

Larisse entre 440 et 445 après J.-C., et comme mathématicien grec de la décadence. En réalité, cet Héliodore de Larisse, dont l'âge est inconnu, est seulement donné par quelques manuscrits comme auteur des *Chapitres d'Optique,* qui, dans d'autres, sont attribués à Damianus, fils d'Héliodore de Larisse, et il n'y a pas d'autre part de raisons suffisantes pour identifier ce Damianus avec Domninus, ainsi qu'on l'a proposé. Comme précisément, à propos de ce Domninus, M. Müller me fait l'honneur de me citer comme autorité, je devais tenir à rappeler ce que j'ai écrit au sujet de l'attribution dont il s'agit. PAUL TANNERY.

MÉLANGES.

GÉNÉRALISATION D'UN THÉORÈME DE DELAUNAY, SUR LES ROULETTES;

PAR M. A. DE SAINT-GERMAIN.

Delaunay a montré que la méridienne d'une surface de révolution à courbure moyenne constante est la roulette S_2 décrite par le foyer O d'une conique C_2 qui roule sur une droite fixe D; d'ailleurs C_2 peut être considérée comme la trajectoire d'un point M qui serait attiré vers le point O, supposé fixe, par une force égale à $\frac{A}{r^2}$, A désignant une constante, r la distance OM. On peut énoncer un théorème correspondant pour une surface de révolution à courbure totale constante : la méridienne est la roulette S_3 décrite par un point O, lié invariablement à une courbe C_3 qui roule sur une droite D, C_3 étant la trajectoire d'un point M qui serait attiré vers le point O, supposé fixe, par une force de la forme $\frac{A}{r^3}$. Si l'on n'envisage que les roulettes S_2, S_3, on voit qu'en un point quelconque O de S_2 les inverses du rayon de courbure et de la normale limitée à la base D ont une somme constante; sur S_3, c'est leur produit qui est fixe : or ces résultats sont compris dans une proposition générale que je vais établir.

Soit C_m la trajectoire d'un point M attiré vers un point donné O par une force F égale à $\frac{A}{r^m}$: si l'on fait rouler C_m sur une droite fixe D, le point O, supposé entraîné avec C_m, décrira une roulette S_m dont le rayon de courbure ρ peut s'exprimer simplement en fonction de la normale limitée à la base D. Considérons d'abord le mouvement du point M autour du point O.

Soient, en un point quelconque M de la trajectoire C_m :

R le rayon de courbure de cette courbe ;
φ l'angle de ce rayon avec le rayon vecteur MO ;
v la vitesse du mobile au point M.

On a, en faisant la masse du mobile égale à l'unité et désignant par h la constante des forces vives,

$$F\cos\varphi = \frac{v^2}{R} = \frac{1}{R}\left(2h + \frac{2}{m-1}\frac{A}{r^{m-1}}\right),$$

d'où, eu égard à la valeur de F,

$$(1) \qquad R = \frac{2}{\cos\varphi}\left(\frac{h}{A}r^m + \frac{r}{m-1}\right).$$

Passons à la roulette S_m décrite par le point O quand il est entraîné avec C_m roulant sur la droite D : si je désigne par M le point de contact à un instant quelconque, la normale à S_m au point O sera OM, égale à r. Or la formule de Savary, dans le cas d'une base rectiligne, donne $\frac{1}{R} = \cos\varphi\left(\frac{1}{r} + \frac{1}{\rho - r}\right)$, d'où l'on déduit

$$(2) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{1}{r} - \frac{R\cos\varphi}{r^2},$$

ou, eu égard à l'équation (1),

$$(3) \qquad \frac{1}{\rho} = \frac{m-3}{m-1}\frac{1}{r} - \frac{2h}{A}r^{m-2}.$$

Telle est la formule que je voulais établir ; pour $m = 2$ et $m = 3$, elle donne les résultats énoncés au début. D'ailleurs, l'équation finie des roulettes S_m contient deux constantes arbitraires, sans compter h ; elle représente donc l'intégrale générale de l'équation (3) considérée comme équation différentielle.

On trouve, en Géométrie sphérique, des résultats qui correspondent exactement aux précédents. Soient, sur une sphère de rayon égal à l'unité, O un point fixe, C_m la trajectoire d'un point M, de masse 1, sollicité par une force F dirigée tangentiellement à l'arc de grand cercle MO égal à θ, F étant elle-même égale à

$$\frac{A}{\sin^2\theta}\cot^{m-2}\theta;$$

si l'on fait rouler C_m sur un arc de grand cercle D, le point O, supposé entraîné avec la roulante, décrira une roulette S_m dont le rayon sphérique ρ de courbure géodésique est lié à l'arc de grand cercle θ, normal à S_m et limité à l'arc D, par la formule

$$\cot\rho = \frac{m-3}{m-1}\cot\theta - \frac{2h}{A}\tang^{m-2}\theta.$$

Aux équations (1) et (2) correspondraient les relations

$$\tang R = \frac{2\sin^2\theta}{\cos\varphi}\left(\frac{h}{A}\tang^{m-2}\theta + \frac{\cot\theta}{m-1}\right), \qquad \cot\rho = \cot r - \frac{\tang R\cos\varphi}{\sin^2 r},$$

R désignant le rayon de courbure géodésique de C_m et φ l'angle de ce rayon de courbure avec l'arc MO.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

SALMON. — TRAITÉ DE GÉOMÉTRIE ANALYTIQUE A TROIS DIMENSIONS. Traduit de l'anglais sur la quatrième édition par *O. Chemin*. Troisième Partie. 1 vol. in-8°; VII-220 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1892.

M. Chemin a mené à bonne fin la traduction qu'il avait entreprise des livres classiques de M. Salmon; c'est un service incontestablement rendu aux géomètres de notre pays. Le volume que nous annonçons est la fin de la Géométrie analytique à trois dimensions : il contient les *surfaces dérivées des quadriques, les surfaces du troisième et du quatrième degré, la théorie générale des surfaces.*

MÉLANGES.

SUR LA MÉTHODE DES MOINDRES CARRÉS;

PAR M. S. YAROCHENKO,
Professeur à l'Université d'Odessa.

I.

1. Le problème fondamental, auquel s'applique la méthode des moindres carrés, peut s'énoncer de la manière suivante :

Trouver les valeurs de m inconnues

$$x, y, z, \ldots,$$

liées aux quantités données

$$v_i, a_i, b_i, c_i, \ldots \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots, n),$$

par $n > m$ équations linéaires

$$(1) \qquad a_i x + b_i y + c_i z + \ldots - v_i = \varepsilon_i \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n).$$

si chacune des quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ *peut avoir une de toutes les valeurs (ou de quelques-unes) comprises entre les limites données, et si ces valeurs ne sont pas toutes également probables.*

Nous essayons de résoudre ce problème en admettant (comme on le fait ordinairement) que les valeurs de ε_i égales et de signes contraires sont également probables.

Si nous traitons $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ comme quantités connues, il suffirait pour obtenir la valeur de x de multiplier chaque équation (1) par un certain multiplicateur λ_i, puis d'ajouter les résultats ainsi obtenus, en choisissant les multiplicateurs λ de manière que dans l'équation finale le coefficient de x se réduise à l'unité et ceux de $y, z, \ldots$ à zéro. Si, pour abréger, on désigne par $[\lambda t]$ une somme $\lambda_1 t_1 + \lambda_2 t_2 + \ldots + \lambda_n t_n$, la valeur de x sera

$$x = [\lambda v] + [\lambda \varepsilon], \tag{2}$$

les multiplicateurs λ étant déterminés par m équations

$$[\lambda a] = 1, \qquad [\lambda b] = 0, \qquad [\lambda c] = 0, \qquad \ldots. \tag{3}$$

De même, en désignant par $\lambda'_1, \lambda'_2, \ldots, \lambda'_n; \lambda''_1, \lambda''_2, \ldots, \lambda''_n; \ldots$ les multiplicateurs qui satisfont aux équations

$$\left\{\begin{array}{lll} [\lambda' a] = 0, & [\lambda' b] = 1, & [\lambda' c] = 0, \\ [\lambda'' a] = 0, & [\lambda'' b] = 0, & [\lambda'' c] = 1, \\ \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{4}$$

nous aurons

$$\left\{\begin{array}{l} y = [\lambda' v] + [\lambda' \varepsilon], \\ z = [\lambda'' v] + [\lambda'' \varepsilon], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right. \tag{5}$$

Si, au lieu des vraies valeurs (2), (5) des inconnues $x, y, z, \ldots$, nous prenons $x, y, z, \ldots$ égales à

$$[\lambda v], \quad [\lambda' v], \quad [\lambda'' v], \quad \ldots,$$

les sommes

$$[\lambda \varepsilon], \quad [\lambda' \varepsilon], \quad [\lambda'' \varepsilon], \quad \ldots$$

seront les erreurs de ces dernières valeurs et le problème peut être considéré comme résolu, si nous trouvons les limites de ces erreurs. Il est évident que d'après les données du problème on ne peut déterminer que des limites plus ou moins probables.

Ces limites peuvent être trouvées d'après un théorème établi par *Tchébychef* dans son remarquable Mémoire *Des valeurs moyennes* [1]. En appelant *espérance mathématique* d'une grandeur quelconque la somme de toutes les valeurs qu'elle est susceptible de prendre, multipliées par leurs probabilités respectives, M. Tchébychef a démontré le théorème suivant :

Si l'on désigne par $a, b, c, \ldots$ les espérances mathématiques des quantités $x, y, z, \ldots$ et par $a_1, b_1, c_1, \ldots$ les espérances mathématiques de leurs carrés $x^2, y^2, z^2, \ldots$, la probabilité que la somme $x + y + z + \ldots$ est renfermée entre les limites

$$a + b + c + \ldots + \alpha\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots}$$

et

$$a + b + c + \ldots - \alpha\sqrt{a_1 + b_1 + c_1 + \ldots - a^2 - b^2 - c^2 - \ldots}$$

sera toujours plus grande que $1 - \frac{1}{\alpha^2}$, quel que soit α.

Si l'on pose dans ce théorème $\alpha = \frac{\sqrt{n}}{t}$ et que l'on désigne par K'_i et K''_i les espérances mathématiques des quantités $\lambda_i \varepsilon_i$ et $\lambda_i^2 \varepsilon_i^2$, on obtient le résultat suivant :

La probabilité que la somme $[\lambda\varepsilon]$ est renfermée entre les limites

$$(6) \qquad [K'] + \frac{\sqrt{n}}{t}\sqrt{[K''] - [K'^2]} \quad \text{et} \quad [K'] - \frac{\sqrt{n}}{t}\sqrt{[K''] - [K'^2]}$$

sera toujours plus grande que $1 - \frac{t^2}{n}$, quel que soit t.

Il nous reste donc à chercher les valeurs de ces espérances mathématiques K'_i et K''_i.

Soient $-r_i$ et $+r_i$ les limites extrêmes entre lesquelles se trouve renfermée la quantité ε_i, et $p_{i,u}$ la probabilité de la coïncidence de ε_i avec une quantité u renfermée entre les mêmes limites.

Comme les valeurs $+u$ et $-u$ sont également probables, la probabilité de la supposition $\varepsilon_i = -u$ sera aussi $p_{i,u}$. Conformément à ces notations, l'espérance mathématique de la quantité $\lambda_i \varepsilon_i$ sera

$$K'_i = \Sigma \lambda_i u p_{i,u} = \lambda_i \Sigma u p_{i,u},$$

---

[1] *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, par J. Liouville, 2e série, t. XII, p. 177; 1867.

le signe Σ s'étendant à toutes les valeurs de u possibles pour ε_i.

Il est évident que

$$K'_i = 0,$$

parce que dans la somme $\Sigma u p_{i,u}$ à chaque terme $u p_{i,u}$ correspond un terme $-u p_{i,u}$.

Pour trouver l'expression de l'espérance mathématique K''_i, remarquons que $\lambda_i^2 \varepsilon_i^2$ aura une valeur $\lambda_i^2 u^2$ quand ε_i sera égale à $+u$ ou à $-u$; la probabilité de chacune de ces suppositions étant la même $p_{i,u}$, celle de la supposition $\varepsilon_i^2 = u^2$ ou $\lambda_i^2 \varepsilon_i^2 = \lambda_i^2 u^2$ sera $2p_{i,u}$. On a donc

$$K''_i = \Sigma \lambda_i^2 u^2 2p_{i,u} = \lambda_i^2 \Sigma u^2 2p_{i,u},$$

où le signe Σ s'étend à toutes les valeurs de u possibles pour ε_i.

La somme $\Sigma u^2 2p_{i,u}$ est évidemment l'espérance mathématique de ε_i^2; en désignant cette espérance par k''_i, nous aurons

$$K''_i = \lambda_i^2 k''_i.$$

Remarquons que la quantité k''_i est toujours positive et moindre que r_i^2. En effet, en remplaçant dans l'équation

$$k''_i = \Sigma u^2 2p_{i,u}$$

chaque valeur de u, en y comptant zéro, par la plus grande valeur r_i^2, on aura

$$k''_i < \{p_{i,0} + \Sigma 2p_{i,u}\} r_i^2.$$

Or, comme les hypothèses que nous venons de faire sur la quantité ε_i sont les seules possibles, leurs probabilités satisferont à l'équation

$$p_{i,0} + \Sigma 2p_{i,u} = 1,$$

et, par suite,

$$k''_i < r_i^2.$$

D'où il résulte que la quantité K''_i ne dépasse pas une certaine limite finie [1].

---

[1] D'après les équations (2) les multiplicateurs λ ne peuvent avoir de valeurs infinies que dans le cas où, parmi tous les déterminants de l'ordre m

$$\left\| \begin{matrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_n \\ b_1 & b_2 & b_3 & \dots & b_n \\ c_1 & c_2 & c_3 & \dots & c_n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{matrix} \right\|,$$

En remplaçant dans les expressions (6) K'_i et K''_i par leurs valeurs 0 et $\lambda_i^2 k''_i$, nous concluons :

La probabilité que la différence entre la véritable valeur de l'inconnue x et $[\lambda v]$ est renfermée entre les limites

$$\frac{1}{t}\sqrt{n[k''\lambda^2]} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{t}\sqrt{n[k''\lambda^2]}$$

sera toujours plus grande que $1 - \frac{t^2}{n}$, *quel que soit* t.

Les n multiplicateurs λ n'étant assujettis qu'aux conditions (3), dont le nombre m est moindre que n, nous pouvons disposer de ces multiplicateurs pour restreindre le plus possible les limites indiquées. Nous aurons les plus étroites limites en choisissant λ_1, λ_2, ..., λ_n de telle sorte que $[k''\lambda^2]$ soit le minimum et que les conditions (3) soient satisfaites.

Ainsi, le choix le plus avantageux des multiplicateurs λ est celui pour lequel

$$[k''\lambda^2] = \text{minimum},$$

et, par suite, la valeur correspondante $[\lambda v]$ de x, doit être regardée comme *la plus avantageuse*.

La valeur de x ainsi obtenue jouit de la propriété de ne renfermer que la moindre erreur possible pour une probabilité donnée $1 - \frac{t^2}{n}$.

De même, en choisissant les systèmes des multiplicateurs λ', λ'', ... de telle sorte que

$$[k''\lambda'^2] = \text{minimum}, \qquad [k''\lambda''^2] = \text{minimum}, \qquad \ldots$$

et que les conditions (4) soient satisfaites, les sommes

$$[\lambda' v], \quad [\lambda'' v], \quad \ldots$$

seront les valeurs *les plus avantageuses* des inconnues y, z, ...

En déterminant d'après les conditions indiquées les systèmes

---

il n'y en a pas un seul différent de zéro; mais alors, parmi n fonctions

$$a_i x + b_i y + c_i z + \ldots,$$

il n'y aurait pas un système des m fonctions indépendantes entre elles, cas que nous excluons.

des multiplicateurs λ, λ', λ'', ... et formant ensuite les m équations, dont les solutions sont les plus avantageuses valeurs des inconnues, on voit que ces équations sont celles qui résultent de la condition

$$\left[\frac{\varepsilon^2}{k}\right] = \text{minimum}.$$

La discussion des expressions de ces multiplicateurs les plus avantageux montre que la valeur absolue du produit $k''_i\lambda_i$ ne surpasse pas la fraction $\frac{L_i}{n}$, où L_i est une quantité indépendante de n et, par conséquent,

$$k''^2_i\,\lambda^2_i < \frac{L^2_i}{n^2}.$$

En observant que k''_i est une quantité positive, et désignant $\frac{L^2_i}{k''_i}$ par l^2_i, nous aurons

$$k''_i\lambda^2_i < \frac{l^2_i}{n^2}$$

et, par suite,

$$n[k''\lambda^2] < \left[\frac{l^2}{n}\right].$$

Ainsi nous pouvons affirmer avec une probabilité

$$P > 1 - \frac{t^2}{n},$$

que la différence entre la véritable valeur de x et sa valeur la plus avantageuse ne surpassera pas

$$\frac{1}{t}\sqrt{\left[\frac{l^2}{n}\right]}.$$

La somme $\left[\frac{l^2}{n}\right]$, comme la moyenne arithmétique des quantités l_1, l_2, ..., l_n, aura toujours une valeur finie quelque grand que soit le nombre n, et par conséquent, en attribuant à t une valeur suffisamment grande, nous pouvons rendre la valeur de

$$\frac{1}{t}\sqrt{\left[\frac{l^2}{n}\right]}$$

aussi petite que l'on voudra. Or, comme, quel que soit t, l'accroissement du nombre n jusqu'à l'infini rend nulle la fraction $\frac{t^2}{n}$, nous concluons :

La probabilité que la différence entre la véritable valeur de x et sa valeur la plus avantageuse sera moindre qu'une quantité donnée se réduit à l'unité, quand n devient infini; et, par conséquent, *lorsque le nombre des équations* (1) *devient infini, les valeurs les plus avantageuses des inconnues deviennent les plus probables.*

2. Si nous admettons que les valeurs qui peuvent être attribuées aux quantités $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ se trouvent renfermées entre les mêmes limites $-r$ et $+r$, et que la probabilité de la supposition qu'une de ces quantités a une valeur u est la même pour chacune d'elles, les espérances mathématiques $k''_1, k''_2, \ldots$ seront égales entre elles. En désignant leur valeur commune par k'', nous pouvons dans ce cas affirmer, avec une probabilité

$$P > 1 - \frac{t^2}{n},$$

que la différence entre la véritable valeur de x et la somme $[\lambda v]$ ne surpassera pas

$$\frac{1}{t}\sqrt{n\,k''[\lambda^2]},$$

et, par conséquent, les sommes

$$[\lambda v], \quad [\lambda' v], \quad [\lambda'' v], \quad \ldots$$

seront les plus avantageuses valeurs des inconnues $x, y, z, \ldots$ si

$$[\lambda^2] = \text{minimum}, \qquad [\lambda'^2] = \text{minimum}, \qquad [\lambda''^2] = \text{minimum}, \qquad \ldots,$$

ou, autrement, si

$$[\varepsilon^2] = \text{minimum}.$$

Cette dernière condition exprime la règle proposée par Legendre dans ses *Nouvelles Méthodes pour la détermination des orbites des comètes,* 1805, et par Gauss dans son Ouvrage *Theoria motus corporum cœlestium,* 1809. Les règles exprimées par les conditions $[\lambda^2] = \text{minimum}, \ldots$, ainsi que les règles du numéro précédent sont données par Laplace dans un Mémoire publié en 1811, qui a été reproduit dans sa *Théorie analytique des probabilités,* 1812.

En cas d'une seule inconnue x, les équations (1) seront de la

forme

$$x - v_i = \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, 3. \ldots n$$

et de la condition

$$[\varepsilon^2] = [(x - v)^2] = \text{minimum};$$

on conclut que la valeur la plus avantageuse de x sera

$$\frac{[v]}{n},$$

c'est-à-dire la moyenne arithmétique entre les valeurs $v_1, v_2, \ldots$.

II.

3. Considérons maintenant le même problème pris dans la forme qu'il a dans la théorie de la combinaison des observations.

Supposons qu'on détermine par observations une fonction linéaire v des m inconnues $x, y, z, \ldots$. Soient $a_i x + b_i y + c_i z + \ldots$ la valeur exacte de cette fonction dans la $i^{\text{ième}}$ observation et v_i la valeur observée; alors la différence

$$a_i x + b_i y + c_i z + \ldots - v_i = \varepsilon_i$$

sera l'*erreur véritable* de cette observation. Chaque observation fournit une équation pareille, dans laquelle les coefficients $a_i, b_i, c_i, \ldots$ sont des quantités connues, données *a priori*.

Pour n observations nous aurons — n équations linéaires

$$a_i x + b_i y + c_i z + \ldots - v_i = \varepsilon_i, \qquad i = 1, 2, 3. \ldots, n.$$

Comme nous l'avons vu, les expressions des vraies valeurs des inconnues seront (2), (5). Cherchons leurs valeurs les plus avantageuses.

Chaque observation dépend des instruments dont on se sert et qui ne permettent d'exprimer la grandeur déterminée par les observations que dans certaines unités; si, par exemple, on mesure un angle, le résultat de la mesure peut être exprimé, selon le degré de perfection des instruments, par un nombre entier de secondes, de dixièmes de seconde, de centièmes, etc.

Admettons donc que l'observateur ne peut exprimer les résultats de ses observations que par un nombre entier des unités q.

Le résultat de la $i^{\text{ième}}$ observation sera alors de la forme

$$v_i = \mathfrak{M}_i q,$$

où $\mathfrak{M}_i$ est un nombre entier.

Soit

$$a_i x + b_i y + c_i z + \ldots + \mathfrak{N}_i q + \omega_i$$

la valeur exacte correspondante de la fonction v, où $\mathfrak{N}_i$ est un nombre entier et ω_i une quantité dont la valeur absolue est moindre que q [1]. L'erreur véritable de la $i^{\text{ième}}$ observation sera donc

$$\varepsilon_i = (\mathfrak{N}_i - \mathfrak{M}_i) q + \omega_i,$$

c'est-à-dire toujours de la forme

$$\varepsilon_i = \mathrm{E}_i + \omega_i,$$

où E_i représente un nombre entier (positif ou négatif) d'unités q.

Ainsi l'erreur véritable ε_i peut être regardée comme la somme des deux erreurs E_i et ω_i.

Nous appellerons ω_i l'*erreur inévitable* de la $i^{\text{ième}}$ observation, car cette erreur aura toujours la même valeur quelles que soient les circonstances dans lesquelles la $i^{\text{ième}}$ observation a été faite. La probabilité de cette erreur est toujours égale à l'unité.

Quant aux erreurs désignées par E, elles proviennent ou de causes *constantes,* qui dans les observations de même espèce détournent le résultat toujours dans le même sens; ou de *causes accidentelles,* qui n'ont rien de régulier et qui détournent le résultat tantôt dans un sens, tantôt dans un autre. Dans la théorie de la combinaison des observations on suppose ordinairement que les erreurs de la première catégorie sont écartées : il ne reste donc que les erreurs de la seconde catégorie. D'après cela, les erreurs E peuvent être appelées *erreurs accidentelles* et l'on peut admettre que pour chaque observation les valeurs de ces erreurs égales et de signes contraires sont également probables.

Cela posé, remplaçons dans l'équation (2) les erreurs ε_i par leurs valeurs $\mathrm{E}_i + \omega_i$, nous aurons alors

$$x = [\lambda v] + [\lambda \omega] + [\lambda \mathrm{E}].$$

---

[1] Il est évident qu'on peut supposer que ω_i a le même signe pour chaque valeur de i, par exemple toujours positif.

Dans cette expression de x, le seul terme $[\lambda E]$ dépend des erreurs accidentelles. Cherchons les limites probables entre lesquelles peut être renfermée cette somme $[\lambda E]$.

Soit $r_i q$ la limite que ne peut surpasser la valeur absolue de l'erreur accidentelle E_i de la $i^{\text{ième}}$ observation, où r_i est un nombre positif et q l'unité indiquée plus haut. Alors toutes les valeurs possibles pour E_i seront

$$\begin{array}{llll} 0, & q, & 2q, & \ldots, \quad r_i q, \\ -q, & -2q, & \ldots, & -r_i q. \end{array}$$

En observant que les valeurs égales et de signes contraires ont des probabilités égales, désignons par

$$P_{i,0}, \quad P_{i,1}, \quad P_{i,2}, \quad \ldots, \quad P_{i,r_i}$$

les probabilités des suppositions que E_i est égale à

$$0, \quad q \text{ ou } -q, \quad 2q \text{ ou } -2q, \quad \ldots, \quad r_i q \text{ ou } -r_i q.$$

Alors les espérances mathématiques K'_i et K''_i des quantités $\lambda_i E_i$ et $\lambda_i^2 E_i^2$ seront

$$K'_i = \lambda_i \left\{ q P_{i,1} + \ldots + r_i q P_{i,r_i} - q P_{i,1} - \ldots - r_i q P_{i,r_i} \right\} = 0,$$
$$K''_i = \lambda_i^2 \left\{ q^2 2 P_{i,1} + (2q)^2 2 P_{i,2} + \ldots + (r_i q)^2 2 P_{i,r_i} \right\} = \gamma''_i \lambda_i^2,$$

où

$$(7) \qquad \gamma''_i = q^2 2 P_{i,1} + (2q)^2 2 P_{i,2} + \ldots + (r_i q)^2 2 P_{i,r_i}$$

est l'espérance mathématique de E_i^2.

De la dernière équation l'on conclut

$$\gamma''_i < \left\{ P_{i,0} + 2 P_{i,1} + \ldots + 2 P_{i,r_i} \right\} (r_i q)^2.$$

Or, comme les hypothèses que nous venons de faire sur la quantité E_i sont les seules possibles,

$$(8) \qquad P_{i,0} + 2 P_{i,1} + \ldots + 2 P_{i,r_i} = 1,$$

et par suite

$$\gamma''_i < (r_i q)^2.$$

Les espérances mathématiques des quantités $\lambda_1 E_1$, $\lambda_2 E_2$, ... et de leurs carrés étant

$$K'_1 = K'_2 = \ldots = 0$$

et

$$\chi_1''\lambda_1^2, \quad \chi_2''\lambda_2^2, \quad \ldots,$$

on peut donc (d'après le théorème de Tchébychef) affirmer avec une probabilité

$$P > 1 - \frac{t^2}{n}$$

que la somme $[\lambda E]$ est renfermée entre les limites

$$\frac{1}{t}\sqrt{n[\chi''\lambda^2]} \quad \text{et} \quad -\frac{1}{t}\sqrt{n[\chi''\lambda^2]}.$$

Par conséquent :

La probabilité que la différence entre la véritable valeur de l'inconnue x et la valeur

$$[\lambda v] + [\lambda \omega]$$

est renfermée entre les limites

$$\frac{1}{t}\sqrt{n[\chi''\lambda^2]} \quad \text{et} \quad \frac{1}{t}\sqrt{n[\chi''\lambda^2]}$$

sera toujours plus grande que $1 - \frac{t^2}{n}$, *quel que soit* t.

Les limites seront les plus étroites si

$$[\chi''\lambda^2] = \text{minimum};$$

alors la valeur

$$[\lambda v] + [\lambda \omega]$$

sera *la plus avantageuse valeur* de l'inconnue x.

De même, en choisissant les multiplicateurs λ', λ'', ... de sorte que

$$[\chi''\lambda'^2] = \text{minimum}, \qquad [\chi''\lambda''^2] = \text{minimum},$$

les valeurs

$$[\lambda' v] + [\lambda' \omega], \quad [\lambda'' v] + [\lambda'' \omega], \quad \ldots.$$

seront *les plus avantageuses valeurs* des inconnues y, z, ...

Il est aisé de voir que ces plus avantageuses valeurs sont les solutions des m équations qui résultent de la condition

$$(9) \qquad \left[\frac{(\varepsilon - \omega)^2}{\chi''}\right] = \text{minimum},$$

ou, ce qui revient au même, de la condition

$$\left[\frac{E^2}{\chi''}\right] = \text{minimum}.$$

On peut donner une autre forme à cette condition.

Remarquons d'abord que *l'erreur inévitable d'une observation est égale à l'espérance mathématique de l'erreur véritable de cette observation.*

En effet, en désignant par k'_i l'espérance mathématique de la quantité $\varepsilon_i = E_i + \omega_i$, on aura

$$\begin{aligned} k'_i = {} & \omega_i P_{i,0} + (q + \omega_i) P_{i,1} + \ldots \\ & + (r_i q + \omega_i) P_{i,r_i} + (-q + \omega_i) P_{i,1} + \ldots + (-r_i q + \omega_i) P_{i,r_i} \end{aligned}$$

ou bien

$$k'_i = \omega_i \left\{ P_{i,0} + 2 P_{i,1} + \ldots + 2 P_{i,r_i} \right\},$$

et par suite (*voir* 8)

$$k'_i = \omega_i. \tag{10}$$

Voyons maintenant quelle sera l'expression de l'espérance mathématique de la quantité ε_i^2. En désignant cette espérance par k''_i, on a

$$\begin{aligned} k''_i = {} & \omega_i^2 P_{i,0} + (q + \omega_i)^2 P_{i,1} + \ldots + (r_i q + \omega_i)^2 P_{i,r_i} \\ & + (-q + \omega_i)^2 P_{i,1} + \ldots + (-r_i q + \omega_i)^2 P_{i,r_i}, \end{aligned}$$

ou bien

$$k''_i = \omega_i^2 \left\{ P_{i,0} + 2 P_{i,1} + \ldots + 2 P_{i,r_i} \right\} + \left\{ q^2 2 P_{i,1} + \ldots + (r_i q)^2 2 P_{i,r_i} \right\},$$

d'où l'on conclut, en ayant égard aux relations (8), (7), (10),

$$k''_i = \omega_i^2 + \chi''_i = k'^2_i + \chi''_i$$

et, par suite,

$$\chi''_i = k''_i - k'^2_i.$$

En remplaçant dans (9) ω_i par k'_i et χ''_i par $k''_i - k'^2_i$, on aura

$$\left[\frac{(\varepsilon - k')^2}{k'' - k'^2}\right] = \text{minimum}.$$

D'après les suppositions faites, la quantité k'_i est celle que Gauss a désignée sous le nom de *partie constante de l'erreur* ε_i et la dernière condition exprime la règle donnée par Gauss dans son Ouvrage : *Theoria combinationis observationum minimis erroribus obnoxiæ*, 1823 (art. 5, 8).

Les résultats obtenus seront d'accord avec ceux du n° 1, si nous remplaçons l'observateur actuel par un observateur se servant d'instruments d'une perfection idéale, pour lequel l'erreur inévitable est égale à zéro.

III.

4. Si, dans le problème du n° 1, on n'admet pas l'hypothèse que les erreurs égales et de signes contraires sont également probables, il est aisé de voir que les valeurs *les plus avantageuses*

$$[\lambda v] + [\lambda k'], \quad [\lambda' v] + [\lambda' k'], \quad [\lambda'' v] + [\lambda'' k'], \quad \ldots$$

des inconnues $x, y, z, \ldots$ résulteront de la condition

$$\left[\frac{(\varepsilon - k')^2}{k'' - k'^2}\right] = \text{minimum},$$

où k'_i et k''_i sont les espérances mathématiques des quantités ε_i et ε_i^2.

SUR LES INTÉGRALES PSEUDO-ELLIPTIQUES QUI DÉPENDENT D'UNE RACINE CUBIQUE D'UN POLYNOME DU TROISIÈME DEGRÉ;

PAR M. J. DOLBNIA.

I. Proposons-nous d'étudier les propriétés de l'intégrale

$$A = \int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}}.$$

Nous exprimerons d'abord cette intégrale par des fonctions elliptiques de Weierstrass; pour cet effet, nous posons

$$x - a = \frac{1}{u};$$

alors

$$A = -\sqrt[3]{a'b'} \int \frac{\partial u}{u\sqrt[3]{(u-a')(u-b')}},$$

$$a' = \frac{1}{b-a}, \qquad b' = \frac{1}{c-a}$$

ou

$$A = -\sqrt[3]{a'b'} \int \frac{\sqrt[3]{(u-a')(u-b')}}{u} \frac{du}{\sqrt[3]{(u-a')^2(u-b')^2}}.$$

Posons

$$(1) \qquad \left(\frac{du}{dz}\right)^3 = (u - a')^2(u - b')^2.$$

Déterminons maintenant la fonction u par cette équation différentielle (1) et par la condition que u a son infini pour

$$z = 0.$$

Il est bien connu que l'équation (1) a une intégrale doublement périodique et monodrome [1]. Si l'on pose

$$u = \mathrm{M}p^{(n)}z + \varphi(z),$$

il est très facile de prouver que $n = 1$ et $\varphi(z)$ est une quantité numérique constante; il nous reste à poser

$$u = \mathrm{M}p'z + \mathrm{N}.$$

En substituant à (1), nous aurons

$$\mathrm{M}^3(p''z)^3 = (\mathrm{M}p'z + \mathrm{N} - a')^2(\mathrm{M}p'z + \mathrm{N} - b')^2.$$

De cette égalité, il découle

$$\mathrm{N} = \frac{a' + b'}{2}, \qquad \mathrm{M} = \frac{27}{2},$$

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = -\left(\frac{a' - b'}{27}\right)^2,$$

$$u = \frac{27}{2}p'z + \frac{a' + b'}{2},$$

$$p'z = \sqrt{4p^3z + \frac{a' - b'}{27}},$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \sqrt[3]{(u - a')^2(u - b')^2} = \frac{27}{2}p''z = 81\,p^2z,$$

donc

$$\sqrt[3]{(u - a')(u - b')} = 9pz;$$

par conséquent

$$\Lambda = -\frac{2}{3}\sqrt[3]{a'b'}\int\frac{pz\,\partial z}{p'z + \dfrac{a' + b'}{27}}.$$

Maintenant, il faut réduire la fonction intégrée à la forme inté-

---

[1] C. Jordan, *Cours d'Analyse*, t. III, 1887.

grable. Nous aurons

$$A = -\frac{1}{6}\sqrt[3]{a'b'}\int\frac{pz\left(p'z - \frac{a'+b'}{27}\right)\partial z}{p^3 z - \frac{a'b'}{3^6}}.$$

En posant, pour abréger,

$$\frac{1}{9}\sqrt[3]{a'b'} = h$$

et en décomposant la fraction

$$\frac{pz}{p^3 z - h^3}$$

à ces simples termes, nous obtiendrons

$$\begin{aligned} A = &-\frac{1}{2}\int\left(\frac{p'z}{pz-h} + \frac{\alpha^2 p'z}{pz-\alpha h} + \frac{\alpha p'z}{pz-\alpha^2 h}\right)\partial z \\ &+ \frac{a'+b'}{2.3^3}\int\left(\frac{1}{pz-h} + \frac{\alpha^2}{pz-\alpha h} + \frac{\alpha}{pz-\alpha^2 h}\right)\partial z, \end{aligned}$$

α étant une racine cubique imaginaire de l'équation

$$\alpha^3 - 1 = 0.$$

La première intégrale s'exprime immédiatement par des logarithmes, et nous aurons

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} A = &-\frac{1}{2}\log[(pz-h)(pz-\alpha h)^{\alpha^2}(pz-\alpha^2 h)^{\alpha}] \\ &+ \frac{a'+b'}{2.3^3}\int\left(\frac{1}{pz-h} + \frac{\alpha^2}{pz-\alpha h} + \frac{\alpha}{pz-\alpha^2 h}\right)\partial z. \end{aligned}\right.$$

Pour calculer l'intégrale

$$B = \frac{a'+b'}{2.3^3}\int\left(\frac{1}{pz-h} + \frac{\alpha^2}{pz-\alpha h} + \frac{\alpha}{pz-\alpha^2 h}\right)\partial z,$$

posons

$$h = pz_0.$$

D'après les formules, bien connues, d'homogénéité

$$\begin{aligned} p(\alpha z_0, 0, g_3) &= \alpha p(z_0, 0, g_3), \\ p'(\alpha z_0, 0, g_3) &= p'(z_0, 0, g_3), \\ \zeta(\alpha z_0, 0, g_3) &= \alpha^2\zeta(z_0, 0, g_3), \\ p(\alpha^2 z_0, 0, g_3) &= \alpha^2 p(z_0, 0, g_3), \\ p'(\alpha^2 z_0, 0, g_3) &= p'(z_0, 0, g_3), \\ \zeta(\alpha^2 z_0, 0, g_3) &= \alpha\zeta(z_0, 0, g_3), \end{aligned}$$

par conséquent

$$\frac{1}{pz-pz_0}+\frac{\alpha^2}{pz-p\alpha z_0}+\frac{\alpha}{pz-p\alpha^2 z_0}$$
$$=\frac{1}{p'z_0}\{[\zeta(z-z_0)-\zeta(z+z_0)]$$
$$+\alpha^2[\zeta(z-\alpha z_0)-\zeta(z+\alpha z_0)]+\alpha[\zeta(z-\alpha^2 z_0)-\zeta(z+\alpha^2 z_0)]\}.$$

Remarquons maintenant que

$$p'z_0=\sqrt{4h^3+\left(\frac{a'-b'}{27}\right)^2}=\frac{a'+b'}{27}.$$

Par cette raison

$$B=\frac{1}{2}\log\left\{\left[\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)}\right]\left[\frac{\sigma(z-\alpha z_0)}{\sigma(z+\alpha z_0)}\right]^{\alpha^2}\left[\frac{\sigma(z-\alpha^2 z_0)}{\sigma(z+\alpha^2 z_0)}\right]^{\alpha}\right\},$$

donc

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned}&\int\frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}}\\&=-\log\left\{\left[\frac{\sigma(z+z_0)}{\sigma z}\right]\left[\frac{\sigma(z+\alpha z_0)}{\sigma z}\right]^{\alpha^2}\left[\frac{\sigma(z+\alpha^2 z_0)}{\sigma z}\right]^{\alpha}\right\}.\end{aligned}\right.$$

Nous aurons aussi évidemment

$$\int\frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$
$$=-\frac{1}{m}\log\left\{\left[e^{-\frac{2\eta_1 z}{m}}\frac{\sigma(z+z_0)}{\sigma z}\right]^m\right.$$
$$\left.\times\left[e^{-\frac{2\alpha^2\eta_1 z}{m}}\frac{\sigma(z+\alpha z_0)}{\sigma z}\right]^{m\alpha^2}\left[e^{-\frac{2\alpha\eta_1 z}{m}}\frac{\sigma(z+\alpha^2 z_0)}{\sigma z}\right]^{m\alpha}\right\}.$$

Si $z_0=\frac{2\omega}{m}$, c'est-à-dire, si z_0 est une partie commensurable d'une période, les trois fonctions

$$\left[e^{-\frac{2\eta_1 z}{m}}\frac{\sigma(z+z_0)}{\sigma z}\right]^m,\quad\left[e^{-\frac{2\alpha^2\eta_1 z}{m}}\frac{\sigma(z+\alpha z_0)}{\sigma z}\right]^m,\quad\left[e^{-\frac{2\alpha\eta_1 z}{m}}\frac{\sigma(z+\alpha^2 z_0)}{\sigma z}\right]^m$$

sont exprimables rationnellement par pz et $p'z$; donc nous aurons le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donné*

$$g_2=0,\quad g_3=-\frac{1}{3^6}\frac{(b-c)^2}{(a-b)^2(a-c)^2},$$

$$pz_0=\frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(a-b)(a-c)}};$$

si $z_0 = \frac{2\varpi}{m}$ *est une partie commensurable d'une période, l'intégrale*

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}}$$

s'exprime par des logarithmes.

Les deux cas d'intégrabilité par des logarithmes sont bien connus.

1. Soit donnée l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - p^2 x}}.$$

Ici nous aurons

$$a = 0, \qquad b = p, \qquad c = -p,$$

$$a' = \frac{1}{p}, \qquad b' = -\frac{1}{p},$$

$$\frac{a'+b'}{27} = p' z_0 = 0:$$

donc

$$z_0 = \varpi,$$

est une demi-période.

2. Soit donnée l'intégrale

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 + a}},$$

ou ce qui est égal, mais plus simple au point de vue du calcul,

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^3 - 1}}.$$

Ici nous avons

$$p z_0 = \frac{1}{27}\sqrt[3]{9},$$

$$p' z_0 = -\frac{1}{27}, \qquad p'' z_0 = \frac{2}{81}\sqrt[3]{3}.$$

Nous avons la formule de duplication de l'argument

$$p(2z_0) = -2p z_0 + \frac{1}{4}\left(\frac{p'' z_0}{p' z_0}\right)^2,$$

donc

$$p(2z_0) = -\frac{2}{27}\sqrt[3]{9} + \frac{1}{9}\sqrt[3]{9} = \frac{1}{27}\sqrt[3]{9}:$$

donc

$$p(2z_0) = pz_0,$$

par conséquent

$$z_0 = \frac{2\varpi}{3}.$$

3. Retournons maintenant à la formule générale (3)

$$(4)\quad \begin{cases} A = \displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}} \\ \quad = -\log\{[\sigma(z+z_0)][\sigma(z+\alpha z_0)]^{\alpha^2}[\sigma(z+\alpha^2 z_0)]^{\alpha}\}. \end{cases}$$

Par la réduction convenable il est facile d'évaluer cette intégrale. En effet, nous avons les trois égalités

$$(5)\quad \begin{cases} -\dfrac{\sigma(z-kz_0)\sigma[z-(k+2)z_0]}{\sigma^2[z-(k+1)z_0]\sigma^2(z_0)} = p[z-(k+1)z_0] - pz_0, \\ -\dfrac{\sigma(z-k\alpha z_0)\sigma[z-(k+2)\alpha z_0]}{\sigma^2[z-(k+1)\alpha z_0]\sigma^2(\alpha z_0)} = p[z-(k+1)\alpha z_0] - p(\alpha z_0), \\ -\dfrac{\sigma(z-k\alpha^2 z_0)\sigma[z-(k+2)\alpha^2 z_0]}{\sigma^2[z-(k+1)\alpha^2 z_0]\sigma^2(\alpha^2 z_0)} = p[z-(k+1)\alpha^2 z_0] - p(\alpha^2 z_0). \end{cases}$$

Nommons encore, pour abréger,

$$\log\{\sigma(z-kz_0)[\sigma(z-k\alpha z_0)]^{\alpha^2}[\sigma(z-k\alpha^2 z_0)]^{\alpha}\} = S_k,$$

$$\log\{[p(z-kz_0)-pz_0] \times [p(z-k\alpha z_0)-p\alpha z_0]^{\alpha^2}[p(z-k\alpha^2 z_0)-p\alpha^2 z_0]^{\alpha}\} = P_k,$$

où k est un nombre entier, positif ou négatif. Des égalités (5), nous aurons évidemment

$$S_k + S_{k+2} - 2S_{k+1} = P_{k+1}\ (^1).$$

Par conséquent

$$\begin{aligned} -A + S_1 - 2S_0 &= P_0, \\ S_1 + S_3 - 2S_2 &= P_2, \\ S_2 + S_4 - 2S_3 &= P_3, \\ S_3 + S_5 - 2S_4 &= P_4, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots, \\ S_{m-1} + S_{m+1} - 2S_m &= P_m, \\ S_0 = \log[(\sigma z)(\sigma z)^{\alpha^2}(\sigma z)^{\alpha}] &= 0. \end{aligned}$$

---

(1) En négligeant toujours la quantité constante.

En multipliant ces équations respectivement par $1, -1, -2, -3, \ldots, -(m-1)$, puis en ajoutant les résultats, nous obtiendrons

$$\log\{[\sigma(z+z_0)][\sigma(z+\alpha z_0)]^{\alpha^2}[\sigma(z+\alpha^2 z_0)]^{\alpha}\}$$
$$= P_0 - P_2 - 2P_3 - \ldots - (m-1)P_m + (m-1)S_{m+1} - 2(m-1)S_m,$$

Posons maintenant

$$z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

alors

$$S_m = \log\left\{\left[\frac{\sigma(z-2\tilde{\omega})}{\sigma z}\right]\left[\frac{\sigma(z-2\alpha\tilde{\omega})}{\sigma z}\right]^{\alpha^2}\left[\frac{\sigma(z-2\alpha^2\tilde{\omega})}{\sigma z}\right]^{\alpha}\right\} = 0,$$

$$S_{m+1} = \log\{[\sigma(z-z_0-2\tilde{\omega})]$$
$$\times[\sigma(z-\alpha z_0-2\alpha\tilde{\omega})]^{\alpha^2}[\sigma(z-\alpha^2 z_0-2\alpha^2\tilde{\omega})]^{\alpha}\} = S_1,$$

ou

$$S_{m+1} = P_0 - \log\{[\sigma(z+z_0)][\sigma(z+\alpha z_0)]^{\alpha^2}[\sigma(z+\alpha^2 z_0)]^{\alpha}\}.$$

Par conséquent

$$-A = \frac{1}{m}[P_0 - P_2 - 2P_3 - \ldots - (m-2)P_{m-1} - (m-1)P_m + (m-1)P_0].$$

En remarquant que

$$P_m = \log\{[p(z-2\tilde{\omega}) - pz_0]$$
$$\times[p(z-2\alpha\tilde{\omega}) - p\alpha z_0]^{\alpha^2}[p(z-2\alpha^2\tilde{\omega}) - p\alpha^2 z_0]^{\alpha}\} = P_0,$$

nous aurons définitivement

$$(\mathrm{I})\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}} \\ &= \frac{1}{m}\log \prod_{i=0}^{i=m-1}\{[p(z-iz_0)-pz_0][p(z-i\alpha z_0)-p\alpha z_0]^{\alpha^2} \\ &\qquad\qquad \times[p(z-i\alpha^2 z_0)-p\alpha^2 z_0]^{\alpha}\}^{i-1}. \end{aligned}\right.$$

De cette formule générale on peut obtenir, avec une grande facilité, la forme définitive des exemples classiques (n° 2). En remarquant que

$$pz = \frac{1}{9}\sqrt[3]{(u-a')(u-b')} \qquad (\text{n° } 1),$$

nous aurons

$$pz = \frac{h}{x-a}\sqrt[3]{(x-a)(x-b)(x-c)}.$$

Par conséquent

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{x^3 - px}}$$
$$= -\frac{1}{2}\log\left[\left(x - \sqrt[3]{x^3 - px}\right)\left(x - \alpha\sqrt[3]{x^3 - px}\right)^{\alpha^2}\left(x - \alpha^2\sqrt[3]{x^3 - px}\right)^{\alpha}\right].$$

Nous avons aussi

$$\int \frac{\partial x}{\sqrt[3]{x^3 - px}}$$
$$= -\frac{1}{2}\log\left[\left(x^{\frac{2}{3}} - \sqrt[3]{x^2 - p}\right)\left(x^{\frac{2}{3}} - \alpha\sqrt[3]{x^2 - p}\right)^{\alpha^2}\left(x^{\frac{2}{3}} - \alpha^2\sqrt[3]{x^2 - p}\right)^{\alpha}\right].$$

Posons

$$x^2 = z^3, \qquad \partial x = \frac{3}{2} z^{\frac{1}{2}} \partial z,$$

alors

$$\int \frac{\partial z}{\sqrt[3]{z^3 - p}} = -\frac{1}{3}\log\left[\left(z - \sqrt[3]{z^3 - p}\right)\left(z - \alpha\sqrt[3]{z^3 - p}\right)^{\alpha^2}\left(z - \alpha^2\sqrt[3]{z^3 - p}\right)^{\alpha}\right].$$

4. La question sur laquelle nous voulons attirer l'attention est la suivante : chercher les conditions nécessaires et suffisantes d'après lesquelles il est possible de choisir la quantité indéterminée H de telle sorte que l'intégrale

$$B = \int \frac{(x + H)\,\partial x}{\sqrt[3]{(x - a)^2 (x - b)^2 (x - c)^2}}$$

ne s'exprime que par des logarithmes. Cette question présente une analogie évidente avec le problème connu de M. Tchébycheff concernant l'intégration des différentielles

$$\int \frac{(x + H)\,\partial x}{\sqrt{x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4}} \quad (^1).$$

En exprimant l'intégrale B par des fonctions elliptiques, nous aurons évidemment

$$B = -\sqrt[3]{a'^2 b'^2}(a + H)z - \sqrt[3]{a'^2 b'^2}\int \frac{\partial z}{\frac{27}{2}p' z + \frac{a' + b'}{2}},$$

(1) *Bulletin de l'Académie impériale des Sciences de Saint-Pétersbourg*, t. III; 1861. *Journal de Mathématiques*, 1864.

ou

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}$$
$$= \left[3\zeta z_0 - \sqrt[3]{a'^2 b'^2}(a+\mathrm{H})\right] z$$
$$- \frac{1}{2}\log\left[(pz - pz_0)(pz - p\alpha z_0)^{\alpha}(pz - p\alpha^2 z_0)^{\alpha^2}\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\log\left\{\left[\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)}\right]\left[\frac{\sigma(z-\alpha z_0)}{\sigma(z+\alpha z_0)}\right]^{\alpha}\left[\frac{\sigma(z-\alpha^2 z_0)}{\sigma(z+\alpha^2 z_0)}\right]^{\alpha^2}\right\},$$

ou bien

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}} \\ &\quad = \left[3\zeta(z_0) - \sqrt[3]{a'^2 b'^2}(a+\mathrm{H})\right] z \\ &\qquad - \log\left\{[\sigma(z+z_0)][\sigma(z+\alpha z_0)]^{\alpha}[\sigma(z+\alpha^2 z_0)]^{\alpha^2}\right\}. \end{aligned}\right.$$

Il est clair que nous avons encore

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}$$
$$= \left[3\zeta(z_0) - 3\frac{2\tilde{\eta}}{m} - \sqrt[3]{a'^2 b'^2}(a+\mathrm{H})\right] z$$
$$- \frac{1}{m}\log\left\{\left[e^{-\frac{2\tilde{\eta}}{m}z}\frac{\sigma(z+z_0)}{\sigma z}\right]^{m}\right.$$
$$\left.\times\left[e^{-\frac{2\alpha^2\tilde{\eta}}{m}z}\frac{\sigma(z-\alpha z_0)}{\sigma z}\right]^{m\alpha}\left[e^{-\frac{2\alpha\tilde{\eta}}{m}z}\frac{\sigma(z+\alpha^2 z_0)}{\sigma z}\right]^{m\alpha^2}\right\}.$$

En choisissant H sous la condition

$$3\zeta(z_0) - 3\frac{2\tilde{\eta}}{m} - \sqrt[3]{a'^2 b'^2}(a+\mathrm{H}) = 0,$$

nous exprimerons notre intégrale par des logarithmes. Donc nous aurons le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donné*

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = \frac{1}{3^6}\frac{(b-c)^2}{(a-b)^2(a-c)^2},$$

$$pz_0 = \frac{1}{9}\frac{1}{\sqrt[3]{(a-b)(a-c)}},$$

si z_0 est une partie commensurable d'une période, l'intégrale

$$\int \frac{(x+\Pi)\,dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}$$

s'exprime par des logarithmes; l'indéterminée Π *étant choisie sous la condition*

$$(7) \qquad 3\zeta(z_0) - 3\frac{2\tilde{\eta}_1}{m} - \sqrt[3]{a'^2 b'^2}(a+\Pi) = 0.$$

5. Avant de passer au cas général, considérons les deux intégrales classiques.

1° Posons

$$z_0 = \tilde{\omega}, \qquad \zeta(z_0) = \tilde{\eta}_1;$$

alors la formule (6) donne

$$\Pi = -a,$$

et comme

$$p' z_0 = p'\tilde{\omega} = \frac{a'+b'}{27} = 0,$$

nous aurons

$$a = \frac{b+c}{2}.$$

Cette condition étant remplie, l'intégrale

$$\int \frac{(x-a)\,dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}$$

s'exprime par des logarithmes, et nous avons

$$\int \frac{(x-a)\,dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}$$
$$= -\frac{1}{2}\log[(pz-pz_0)(pz-p\alpha z_0)^{\alpha}(pz-p\alpha^2 z_0)^{\alpha^2}].$$

2° Considérons l'intégrale

$$\int \frac{(x+\Pi)\,dx}{\sqrt[3]{x^3-1)^2}}.$$

Dans ce cas

$$z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{3}, \qquad p'\left(\frac{2\tilde{\omega}}{3}\right) = -\frac{1}{27}, \qquad p''\left(\frac{2\tilde{\omega}}{3}\right) = \frac{2}{81}\sqrt[3]{3}.$$

De la formule

$$\zeta(2u) = 2\zeta u + \frac{1}{2}\frac{p''u}{p'u},$$

il découle

$$\zeta\left(\frac{4\tilde{\omega}}{3}\right) = 2\zeta\left(\frac{2\tilde{\omega}}{3}\right) - \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}$$

ou

$$3\zeta\left(\frac{2\tilde{\omega}}{3}\right) - 2\tilde{\eta} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{3}.$$

La formule (6) donne

$$\mathrm{H} = 0;$$

par conséquent l'intégrale

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x^3-1)^3}}$$

s'exprime par des logarithmes.

Il est facile de constater que

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt[3]{(x^3-1)^2}} = -\frac{1}{3}\log\left[(x-\sqrt[3]{x^3-1})(x-\alpha\sqrt[3]{x^3-1})^{\alpha}(x-\alpha^2\sqrt[3]{x^3-1})^{\alpha^2}\right].$$

6. Évaluons maintenant l'intégrale

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}},$$

dans tous les cas possibles. D'après la formule (5) il faut calculer la fonction

$$\log\left\{[\sigma(z+z_0)][\sigma(z+\alpha z_0)]^{\alpha}[\sigma(z+\alpha^2 z_0)]^{\alpha^2}\right\}.$$

Posons, pour abréger,

$$\log\left\{[\sigma(z-kz_0)][\sigma(z-k\alpha z_0)]^{\alpha}[\sigma(z-k\alpha^2 z_0)]^{\alpha^2}\right\} = \mathrm{S}'_k,$$

$$\log\left\{[p(z-kz_0)-pz_0]\right.$$
$$\left.\times[p(z-k\alpha z_0)-p\alpha z_0]^{\alpha}[p(z-k\alpha^2 z_0)-p\alpha^2 z_0]^{\alpha^2}\right\} = \mathrm{P}'_k.$$

Alors nous obtiendrons, évidemment,

$$\log\left\{[\sigma(z+z_0)][\sigma(z+\alpha z_0)]^{\alpha}[\sigma(z+\alpha^2 z_0)]^{\alpha^2}\right\}$$
$$= \mathrm{P}'_0 - \mathrm{P}'_2 - 2\mathrm{P}'_3 - \ldots - (m-1)\mathrm{P}'_m + (m-1)\mathrm{S}'_{m+1} - m\mathrm{S}'_m.$$

En posant

$$z_0 = \frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

nous aurons

$$S'_m = -6\tilde{\eta}z,$$

$$S'_{m+1} = -6\tilde{\eta}z + P'_0 - \log\left\{[\sigma(z+z_0)][\sigma(z+\alpha z_0)]^{\alpha}[\sigma(z+\alpha^2 z_0)]^{\alpha^2}\right\};$$

donc

$$\log\left\{[\sigma(z+z_0)][\sigma(z+\alpha z_0)]^{\alpha}[\sigma(z+\alpha^2 z_0)]^{\alpha^2}\right\}$$
$$= 3\frac{2\tilde{\eta}}{m}z + P'_0 - P'_2 - 2P'_3 - \ldots - (m-2)P'_{m-1}:$$

donc

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}}$$
$$= \left[3\left(\zeta z_0 - \frac{2\tilde{\eta}}{m}\right) - \sqrt[3]{a'^2 b'^2}(a+\mathrm{H})\right]z$$
$$+ \frac{1}{m}[P'_2 + 2P'_3 + \ldots + (m-2)P'_{m-1} - P'_0].$$

Enfin

$$(\mathrm{II})\quad \left\{\begin{aligned} &\int \frac{(x-\mathrm{H})\,\partial x}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^2}} \\ &= \left\{3\left[\zeta\left(\frac{2\tilde{\omega}}{m}\right) - \frac{2\tilde{\eta}}{m}\right] - \sqrt[3]{a'^2 b'^2}(a+\mathrm{H})\right\}z \\ &+ \frac{1}{m}\log \prod_{i=0}^{i=m-1} \left\{[p(z-iz_0)-pz_0][p(z-i\alpha z_0)-p\alpha z_0]^{\alpha}\right. \\ &\qquad\qquad \left.\times[p(z-i\alpha^2 z_0)-p\alpha^2 z_0]^{\alpha^2}\right\}^{i-1} \end{aligned}\right.$$

7. La même méthode est applicable aux intégrales pseudo-elliptiques d'Abel. Ces intégrales sont de la forme suivante

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,\partial x}{\sqrt{x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4}}.$$

J'ai publié sur ce sujet un Mémoire inséré dans le *Journal de Mathématiques*, 4e série, t. VI; 1890. Dans ce Mémoire je donne la formule

$$(8)\qquad \int \frac{(x+\mathrm{H})\,\partial x}{\sqrt{x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4}} = \log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u}.$$

Mais j'avais fait l'évaluation de cette intégrale après le principe de M. *Tchébycheff*. Cette méthode n'est pas pratique, parce que les résultats définitifs ne dépendent pas d'un seul radical fondamental

$$\mathrm{R} = \sqrt{x^4 + a_1 x^3 + a_2 x^2 + a_3 x + a_4},$$

mais d'une série d'autres radicaux qui sont obtenus de toute une suite de transformations successives. Ici j'ai l'intention de réduire la formule (8) à la forme analogue à celles des numéros précédents. En posant

$$\log\frac{\sigma(u-iv)}{\sigma u}=S_i,\qquad \log[p(u-iv)-pv]=P_i,$$

nous aurons

$$\begin{aligned}\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u}&=-S_1+P_0,\\ S_1+\ \ S_3\ -2S_2&=P_2,\\ S_2+\ \ S_4\ -2S_3&=P_3,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ S_{m-1}+S_{m+1}-2S_m&=P_m.\end{aligned}$$

Par conséquent

$$\log\frac{\sigma(u+v)}{\sigma u}=P_0-P_2-2P_3-\ldots-(m-1)P_m+(m-1)S_{m+1}-mS_m.$$

Si l'on pose

$$v=\frac{2\tilde{\omega}}{m},$$

nous aurons définitivement

$$\text{(III)}\qquad \left\{\begin{aligned}&\int\frac{(x+H)\,\partial x}{\sqrt{x^4+a_1x^3+a_2x^2+a_3x+a_4}}\\ &\quad=-\frac{1}{m}\log\prod_{i=0}^{i=m-1}[p(u-iv)-pv]^{i-1},\end{aligned}\right.$$

H étant une quantité indéterminée.

Exemple. — Proposons-nous d'évaluer l'intégrale [1]

$$\int\frac{(x+H)\,\partial x}{\sqrt{x^4+2x^2+4x+1}}.$$

D'après les formules connues d'inversion [2], nous aurons

$$pv=-\frac{1}{3},\qquad p'v=1,$$

$$g_2=\frac{4}{3},\qquad g_3=-\frac{19}{27};$$

---

[1] Abel, t. I, p. 142; 1881.

[2] Halphen, *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 120; 1886.

en outre, il est facile de prouver que

$$v = \frac{2\tilde{\omega}}{5},$$

de même

$$pu = \frac{1}{2}\left(x^2 + \frac{1}{3} + \mathrm{R}\right),$$

$$p'u = x^3 + x + 1 + x\mathrm{R},$$

$$p(u+v) - pv = \frac{1}{2}(x^2 + 1 - \mathrm{R}),$$

$$pu - pv = \frac{1}{2}(x^2 + 1 + \mathrm{R}).$$

L'intégrale s'exprime par la formule suivante

$$5\int \frac{(x+\mathrm{H})\,\partial x}{\mathrm{R}}$$
$$= -\log \frac{[p(u-2v)-pv][p(u+2v)-pv]^2[p(u+v)-pv]^3}{pu-pv}.$$

D'après la formule d'addition nous aurons

$$p(u-2v) - pv = \frac{x^4 - x^3 + x^2 + x + x(x-1)\mathrm{R}}{x^4 + 2x + 1 + (x^2-1)\mathrm{R}} = \frac{x}{x+1},$$

$$p(u+2v) - pv = \frac{x^2 + 2x + 1 + \mathrm{R}}{x^2}.$$

Par conséquent

$$5\int \frac{(x+\mathrm{H})\,\partial x}{\mathrm{R}} = -\log \frac{(x^2+2x+1+\mathrm{R})^2}{(x+1)(x^2+1+\mathrm{R})^2(x^2+1+\mathrm{R})^2}.$$
$$= -\log \frac{x^2(x+1)}{(x^2-1+\mathrm{R})^2(x^2+1+\mathrm{R})^2}.$$

Et comme

$$(x^2-1+\mathrm{R})(x^2-1-\mathrm{R}) = -4x(x+1),$$
$$(x^2+1+\mathrm{R})(x^2+1-\mathrm{R}) = -4x,$$

nous aurons définitivement

$$5\int \frac{(x+\mathrm{H})\,\partial x}{\sqrt{x^4+2x^2+4x+1}} = \log \frac{(x^2-1+\mathrm{R})(x^2+1+\mathrm{R})}{(x^2-1-\mathrm{R})(x^2-1-\mathrm{R})}.$$

BULLETIN BIBLIOGRAPHIQUE.

BAILLAUD (B.). — *Cours d'Astronomie à l'usage des étudiants des Facultés des Sciences*, Ire Partie. — *Quelques théories applicables à l'étude des Sciences expérimentales.* In-8°, VI-285 p. avec fig. Paris. Gauthier-Villars. 8 fr.

BÜCKING (F.). — *Die Winkelgegenpunkte des Dreiecks. Ein Specialfall der involutor. Verwandtschaft.* Dissert. gr.-4°, 23 S. m. 2 Taf, Leipzig, Fock. 1 M.

FORSYTH (A.-R.). — *Theorie der Differentialgleichungen.* I Theil. *Exacte Gleichungen u. das Pfaff'sche Problem.* Autoris deutsche Ausgabe von H. Maser. Gr.-8°, XII-378 S. Leipzig, Teubner. 12 M.

JORDAN (C.). — *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique.* 2e édit., t. I. *Calcul différentiel.* In-8°, XVIII-612 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars, 17 fr.

ILLIGENS (EBERH.). — *Die unendliche Anzahl und die Mathematik.* Gr.-8°, 60 S. Münster, Theissing. 1 M.

LAISANT (C.-A.). — *Recueil de problèmes de Mathématiques. Géométrie analytique à trois dimensions* (*et Géométrie supérieure*). In-8°, X-95 p. Paris, Gauthier-Villars. 2 fr. 50 c.

RICHARDS (L.). — *Sténarithmie Richard, ou l'art de calculer aussi vite que la pensée.* 16e édit., in-16°, 96 p. Paris, impr. Day. 2 fr.

RUSSE (A.). — *Mathématiques. Traité de l'extraction des racines* (*nouvelles méthodes*). In-8°, 28 p. Lyon, impr. Gallet.

STAHL (H.) u. KOMMERELL (V.). — *Die Grundformen der allgemeinen Flächentheorie.* Gr.-8°, VI-144 S. m. 1 Taf. Leipzig, Teubner. 4 M.

VOGLER (CH.-A.). — *Abbildungen geodätischer Instrumente.* Mit Bewilligg. des königl. Ministeriums f. Landwirthschaft, Domänen u. Forsten herausgeg. Fol. VII-77 S. m. 24 fig. u. 36 Lichtdrucktaf. Berlin, Parey. 12 M.

WALLENTIN (F.). — *Auflösungen zu den Maturitätsfragen aus der Mathematik.* Zum Gebrauch für die oberen Klassen der Gymnasien und Realschulen. 2. Aufl. Gr.-8°, VI-205 S. Wien, Gerold's Sohn. 4. M.

WEDDINGEN (A. VAN). — *Essai sur le principe du mouvement et la marche des corps célestes.* In-8°, 32 p. Hasselt, Ceysens. 1 fr. 50 c.

CAUCHY (A.). — *Œuvres complètes d'Augustin Cauchy*. Publiées sous la direction scientifique de l'Académie des Sciences, 1re série, t. VIII, in-4°. 460 p. Paris, Gauthier-Villars. 25 fr.

GÉRARD (L.). — *Sur la Géométrie non euclidienne*. In-4°, 115 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars.

JAHRBUCH *über die Fortschritte der Mathematik, begründet von C. Ohrtman, herausgeg. von F. Lampe*. 22. Bd. Jahrg. 1890. 1. Heft. Gr.-8°, IV-528 S. Berlin, G. Reimer. 13 M.

LUCAS (ED.). — *Récréations mathématiques*. III. In-8° carré, VII-201 p. avec fig. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr. 50 c.

TANNERY (J.) et MOLK (J.). — *Éléments de la théorie des fonctions elliptiques*, t. I. *Introduction. Calcul différentiel* (Ie Partie). In-8°, X-246 p. Paris, Gauthier-Villars. 7 fr. 50 c.

FÖRSTER (MAX.). — *Beiträge zur Kenntniss des Characters und der Philosophie d'Alemberts*. Inaugural-Dissert. Gr.-8°, 96 S. Jena.

KOLL (O.). — *Die Theorie der Beobachtungsfehler u. die Methode der kleinsten Quadrate m. ihrer Anwendung auf die Geodäsie u. die Wassermessungen*. Lex.-8°, VIII-323 S. u. 31 S. m. Figuren. Berlin, Springer. 10 M.; gebd. 11 M. 20 Pf.

KRAFT (F.). — *Abriss des geometrischen Kalküls*. Nach den Werken H.-G. Grassmann's bearb. Gr.-8°, XII-255 S. m. fig. Leipzig, Teubner. 6 M.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

CAYLEY (A.), Sc. D. F. R. S. — THE COLLECTED MATHEMATICAL PAPERS CAMBRIDGE UNIVERSITY PRESS. Vol. I à V. In-4°; 1889-92.

Dans un article publié au *Journal des Savants*, il y a une vingtaine d'années, M. Joseph Bertrand, analysant un Livre de M. de la Gournerie *Sur les surfaces réglées tétraédrales symétriques*, était conduit à parler de quelques Notes, trop courtes au gré du lecteur, que M. Cayley avait bien voulu ajouter à la suite de cet Ouvrage et, à cette occasion, il n'hésitait pas à placer le nom du Géomètre anglais à côté du grand nom d'Euler. Comme Euler, en effet, M. Cayley brille par une puissance et une sûreté de calcul véritablement extraordinaires. Comme lui aussi, il a étudié et fait progresser toutes les parties des Mathématiques, depuis la théorie des nombres dans ses branches les plus élevées jusqu'à l'Astronomie dans ses parties les plus difficiles. Comme Euler encore, M. Cayley ne paraît dédaigner aucun sujet, et on le verra traiter volontiers, on sait avec quelle supériorité, tel problème que d'autres, moins habiles, croiraient réservé aux seuls débutants. S'il eût été notre compatriote, il aurait pris plaisir à préparer chaque année une belle question aux concurrents de notre Concours général et à la résoudre de son côté par les moyens les plus élégants et les plus ingénieux. On lui doit certainement l'introduction d'une foule de vues originales, de théories fécondes, qui se développeront de plus en plus ; mais il faut aussi louer et admirer en lui le bon accueil qu'il a su toujours réserver aux idées nouvelles quand elles venaient des autres géomètres, la sympathie, l'ardeur avec laquelle il leur a prêté son puissant concours, pour les compléter, les développer ou les faire triompher. Cette carrière si remplie, de plus de cinquante ans, dans laquelle M. Cayley n'a cessé de penser et d'écrire, nous inspire encore une autre réflexion. On classe souvent les mathématiciens d'après leurs aptitudes; aujourd'hui il arrive souvent qu'on veut les diviser en géomètres et en analystes. M. Cayley n'est ni un géomètre, ni un analyste pur : il est l'un et l'autre à la fois. Il goûte les écrits de Poncelet et de Chasles, comme ceux de Lejeune-Dirichlet et de Jacobi.

Chacun des cinq Volumes que nous avons la bonne fortune de présenter aujourd'hui à nos lecteurs contient de nombreux Mémoires d'Analyse et de nombreux Mémoires de Géométrie. Bien plus, toutes les branches de l'Analyse, toutes celles de la Géométrie y sont successivement représentées. M. Cayley en a créé quelques-unes et il a marqué sa trace dans les autres.

Grâce à la nouvelle publication, les travailleurs, qui devaient s'adresser à tant de Recueils peu répandus, qui recherchaient avec tant d'empressement de rares tirages à part, ne seront plus embarrassés pour lire les écrits de M. Cayley. Rien ne peut être plus utile au développement d'un jeune géomètre que l'étude de ces productions, si variées et par le sujet et par la méthode, dont la lecture est facile, où rien n'est laissé dans l'ombre, pas même les sujets de nouveaux travaux et les points à approfondir. Dans ces cinq Volumes, publiés en un court espace de quatre ans, on trouvera les travaux les plus importants et les plus rares, ceux qui sont publiés dans les Recueils les moins accessibles, les Mémoires sur les *Quantics*, par exemple. Mais il reste encore fort à faire. Ils ne contiennent que trois cent vingt-trois Mémoires, publiés de 1841 à 1866; et déjà en 1883, si nous nous en rapportons au Catalogue de la Société royale, M. Cayley en avait fait paraître plus de sept cent vingt. Et il faut remarquer qu'il ne s'arrête nullement. Cette semaine encore nous avions une Note nouvelle dans nos *Comptes rendus*. Puissions-nous les uns et les autres voir cette précieuse publication continuée avec l'entrain qui a présidé à ses débuts! G. D.

H. POINCARÉ, Membre de l'Institut. — LEÇONS SUR LA THÉORIE DE L'ÉLASTICITÉ, rédigées par MM. *Émile Borel* et *Jules Drach*, élèves à l'École Normale supérieure. 208 pages. Paris, G. Carré, éditeur, 1892.

Les leçons réunies dans ce Volume portent sur les principes de la théorie de l'élasticité, et un petit nombre de problèmes particuliers choisis pour bien illustrer ces principes, sans nulle prétention encyclopédique.

Le premier Chapitre contient une étude cinématique des défor-

mations, dilatations, glissements et rotation moyenne ; la recherche des polynômes isotropes ; une déformation est définie comme transversale quand la dilatation cubique est nulle, et longitudinale quand la rotation moyenne est nulle. Toute déformation est la superposition d'une déformation longitudinale et d'une déformation transversale. Dans le second Chapitre, sont étudiées les forces élastiques, intérieures, superficielles et extérieures sous la réserve de l'existence d'une fonction des forces, fonction de toutes les distances moléculaires. M. Poincaré réserve le nom de forces *centrales* au cas où la loi d'action mutuelle de deux molécules n'est pas modifiée par la présence des autres, et où la fonction des forces pour les molécules réunies est la somme des fonctions des forces des molécules prises deux à deux. A vrai dire, lorsque la fonction des forces ne dépend que des distances mutuelles, toutes les forces sont dirigées suivant les droites qui joignent les molécules deux à deux, et peuvent paraître centrales ; mais puisque l'action suivant une droite de jonction de deux molécules contient des termes qui proviennent de la présence des autres molécules, il est très naturel de ne pas regarder alors la dénomination de *centrales* comme directement applicable à ces forces. Après avoir bien mis en évidence le rôle des liaisons, M. Poincaré énumère en détail les coefficients indépendants qui subsistent dans les différentes hypothèses sur les forces intérieures et les pressions superficielles. Puis il arrive aux équations de l'équilibre établies en partant du principe des vitesses virtuelles, avec ou sans liaisons, et au point de vue purement mécanique, au point de vue thermodynamique, et enfin par l'emploi du parallélépipède et du trièdre de Cauchy. Il fait de la définition ordinairement adoptée par les physiciens pour les pressions une critique (p. 72) qui s'applique tout aussi bien à toutes celles des mathématiciens ; car ce sont les expériences des physiciens qui seules permettent de dire ce qu'on doit entendre par une surface de séparation assez peu courbe pour être traitée légitimement comme plane, et il n'est possible de répondre à la même critique, et d'une manière vague d'ailleurs, adressée aux définitions de Lamé, Navier, ou Saint-Venant, qu'en adoptant les mêmes réserves, à savoir qu'on considère des déformations sensiblement uniformes dans une étendue assez grande. Seulement le physi-

cien peut ajouter que l'uniformité de déformation, au millième près, dans un milliardième (10^{-9}) de millimètre cube, paraît suffisante, d'après les expériences de capillarité de Quincke, pour que la théorie soit d'accord avec les mesures les plus délicates, quand le corps solide étudié n'est ni un conglomérat, ni une macle. M. Poincaré insiste ensuite sur le cas de l'équilibre contraint, par application de forces extérieures, et montre comment l'introduction dans la fonction des forces d'un terme qui dépend du carré de la rotation moyenne laisse néanmoins subsister la propriété des pressions de ne pas donner de couple sur un élément de volume.

Les plus importants Chapitres sont ceux qui se rapportent aux petits mouvements en général (V) et dans quelques cas particuliers (VI). L'auteur montre qu'un corps limité ne peut émettre que des sons de périodes fixes, sans qu'il puisse y en avoir qui varient d'une manière continue dans un intervalle si petit qu'il soit (p. 102-103). Sa démonstration toutefois laisse encore un peu à désirer; elle n'établit pas sans explication complémentaire, dans les cas nombreux où la forme du corps donne même période à deux ou plusieurs mouvements distincts (cube isotrope, membrane ou plaque carrée; parallélépipède isotrope dont les côtés sont commensurables), l'impossibilité de vibrations dont la période soit infiniment voisine de la période commune à ces deux modes vibratoires. En appelant ξ, η, ζ l'amplitude du déplacement d'un point du corps dans un mouvement simple et stationnaire, lorsque le corps n'est soumis à aucune force superficielle, ou a des parois fixes, l'intégrale $\int\int\int(\xi_1\xi_2+\eta_1\eta_2+\zeta_1\zeta_2)\,dx\,dy\,dz$ étendue à tout le volume est nulle pour deux mouvements de périodes différentes 1.2. Lorsqu'on se donne la moyenne du carré des amplitudes $\int\int\int(\xi_1^2+\eta_1^2+\zeta_1^2)\,dx\,dy\,dz$, la fonction des forces intérieures — toujours négative — a un maximum qui fait connaître la première période simple. Elle a un second maximum, quand on ajoute la condition que le mouvement simple soit distinct de celui qu'on vient de trouver, et ainsi de suite. Si le corps était continu, on obtiendrait ainsi une suite indéfiniment prolongée de mouvements simples distincts, de périodes indéfiniment décroissantes. Il n'est pas inutile d'ajouter qu'au point de vue physique les très courtes périodes ne répondent plus à rien, la continuité qui est impliquée dans les équations étant inexacte.

Les exemples sont peu nombreux, mais choisis surtout pour montrer comment les conditions à la surface empêchent chaque vibration simple d'être exclusivement transversale ou exclusivement longitudinale, comme semblait le croire Lamé. Quelques pages intéressantes traitent du rayonnement de la force vive élastique dans l'air.

Le Livre se termine par un Chapitre sur le classique problème de Saint-Venant, et un autre sur le problème de l'élastique, dans lequel un mode de démonstration géométrique simple montre clairement l'identité analytique, — établie par Kirchhoff, — de ce problème et de celui de la rotation d'un solide pesant autour d'un point fixe. MARCEL BRILLOUIN.

MÉLANGES.

L'ASTRONOMIE AUX INDES ORIENTALES;

PAR M. LÉON DELBOS,
Professeur à l'École navale anglaise.

I.

Quelque chose que l'on ait pu dire ou écrire, soit à la louange, soit au détriment des Sciences indiennes, il est un fait certain, c'est qu'on en a dit et trop de bien et trop de mal. Comme toujours, la vérité est fort éloignée des deux extrêmes. Nous ne dirons pas à nos lecteurs que nous allons leur mettre sous les yeux une Science astronomique qui est l'égale de celle que nous connaissons, en Europe, mais nous ne leur dirons pas non plus que l'Astronomie des Hindous n'est, comme on l'a dit trop souvent, qu'un ramassis d'absurdités et de niaiseries indignes d'occuper un homme sérieux et se rapportant toutes à l'Astrologie. Ceux qui parlent ainsi sont aussi loin de la vérité que ceux qui voudraient nous faire croire que l'Astronomie indienne est à la hauteur de la nôtre.

Souvenons-nous aussi que si l'Astronomie de tous les peuples

de l'antiquité se borne surtout à la connaissance des horoscopes, il n'en est pas moins vrai que les astronomes d'autrefois en étaient arrivés à posséder des connaissances astronomiques d'une valeur réelle. Cela étant, nous aurions donc grand tort de mépriser leurs découvertes, puisqu'elles contiennent au moins le germe de vérités incontrovertibles et qu'elles ont frayé la voie qui nous a conduits aux découvertes dont nous sommes si justement orgueilleux aujourd'hui.

En un mot, l'Astrologie des anciens est à l'Astronomie moderne ce qu'a été l'Alchimie du passé à la Chimie actuelle, et de même que l'on a reconnu que l'Alchimie a été la mère de la Chimie, de même il nous faut reconnaître que l'Astrologie des siècles passés nous a donné l'Astronomie du XIXe siècle.

Nos lecteurs verront, dans le cours de ce Mémoire, que nous n'exagérons nullement. D'ailleurs nous laisserons parler les faits, qui seront plus éloquents que tout ce que nous pourrions dire. Tout ce qui va suivre est tiré, de première main, d'Ouvrages indiens dont l'authenticité ne saurait former l'objet d'un doute. Nous nous sommes constamment appuyés sur des textes et surtout sur deux Ouvrages sanskrits bien connus aux Indes, le *Sûrya Siddhânta* et le *Siddhânta Siromani*. Ce sont les deux principaux Traités astronomiques, Traités qui sont familiers à tous les Hindous dont l'éducation a été soignée.

Je me sers à dessein du mot *Traité*, parce que les Ouvrages nommés plus haut sont bel et bien de véritables Traités où les descriptions poétiques sont rares et où la vraie Science abonde.

L'Inde possède plusieurs *Siddhântas*, ou Traités astronomiques, mais le plus important, le plus curieux et en même temps le plus ancien est le *Siddhânta Siromani*, qui est un Traité d'Astronomie géographique dû au célèbre Bhâskara dont nous avons déjà parlé à l'occasion d'un Mémoire sur *Les Mathématiques aux Indes orientales* (¹). A la fin de ce Traité d'Astronomie Bhâskara écrit ces paroles qui se rapportent à lui et qui nous fournissent l'époque de la composition de ce Livre : « Moi, Bhâskara, né en l'an 1036 de Sâlvâhana, ai composé ce Traité d'Astronomie dans ma trente-

(¹) *Bulletin des Sciences mathématiques*, mars 1892.

sixième année. » Cette date, rapportée à notre chronologie, correspond à l'année 1150 de notre ère. Ce Traité date donc de sept siècles et demi.

Ce Bhâskara, l'un des premiers mathématiciens de l'Inde, fut aussi l'un des meilleurs astronomes dont ce pays puisse s'enorgueillir. Néanmoins il ne fut pas le seul et l'Inde possède quelque chose comme une vingtaine de Traités astronomiques de vieille date. Le malheur est qu'ils sont généralement peu corrects et fort difficiles à se procurer.

Grâce à des indigènes dont l'éducation a été très soignée, j'ai pu me rendre compte de l'état des Sciences astronomiques aux Indes à l'heure actuelle. Pendant un séjour assez long dans diverses parties de l'Inde, il m'est arrivé, plus d'une fois, de me rencontrer avec des Hindous qui s'étaient tout particulièrement occupés d'Astronomie. Je crus d'abord qu'il ne s'agissait que d'Astrologie ; mais, quand je les eus entendus parler de sinus et de cosinus, de parallaxes et d'azimuts, je compris bientôt que l'Inde elle aussi a marché et que nous ne sommes pas les seuls qui ayons le monopole de la Science et du progrès.

Rien en effet de plus commun aujourd'hui, aux Indes, que les personnes très versées dans l'Astronomie. Il arrive même, très fréquemment, que les connaissances astronomiques des gens instruits sont bien plus étendues que celles que possèdent les gens du monde en Europe. Personne chez nous ne trouve étrange qu'un homme bien élevé ne connaisse d'autre Astronomie que l'Astronomie descriptive. Il en est autrement de beaucoup d'Hindous qui, outre ces connaissances descriptives, en possèdent d'autres fort étendues en Astronomie pratique. J'en ai vu qui savaient très bien calculer les conjonctions des planètes entre elles ou avec la Lune et pour qui le calcul de la longitude et de la latitude n'était qu'une chose très ordinaire. Je parle de gens dont ce n'était pas le métier et non pas de marins ou même de professeurs de sciences, mais par exemple d'hommes de loi ou d'employés d'administration.

J'ai pu m'assurer plus d'une fois par moi-même que les idées européennes ont fait une poussée aux Indes et que nos Sciences, loin d'y être inconnues, y sont mieux reçues et mieux appréciées qu'on ne le croit communément. Cela est surtout vrai de la Médecine.

En un mot, il est essentiel que le lecteur se pénètre bien d'une chose, c'est que, dans tout ce qui va suivre, il n'entrera rien qui ne soit puisé aux sources mêmes. Je n'ai pas donné une seule fois libre carrière à mon imagination, mais, au contraire, j'ai suivi en tout et partout les textes et les notes que j'ai eus en main. Cela dit, nous pouvons entrer en matière.

Tout d'abord, je vais commencer par donner un aperçu de la Cosmographie indienne, et de là je passerai plus particulièrement à ce qui se rapporte à la Lune, au Soleil et aux planètes. Je parlerai ensuite des deux zodiaques indiens et de là je passerai à un Chapitre fort intéressant sur les instruments dont se servaient les astronomes indiens d'autrefois et dont beaucoup se servent encore aujourd'hui.

II.

DE LA COSMOGRAPHIE INDIENNE.

Avant d'aborder l'explication de certains phénomènes, l'astronome indien commence par poser plusieurs questions dont les suivantes sont les plus remarquables :

1° Puisque la Terre est entourée des autres planètes et qu'elle occupe constamment la même place dans le ciel, au centre des orbites de toutes les étoiles fixes, y a-t-il quelque chose pour la soutenir et l'empêcher de tomber dans l'espace?

2° Après avoir examiné la forme de la Terre avec tout le soin possible, dites où sont situées les mers et les îles qu'elles contiennent.

3° Pour quelle raison le lieu qu'occupe une planète, et que l'on a calculé au moyen du nombre de jours terrestres qui se sont écoulés depuis le commencement d'un Kalpa (période de 4320000000 jours), n'est-il pas parfaitement déterminé et pourquoi est-il nécessaire de faire subir à ce nombre certaines corrections?

4° Pourquoi les jours sont-ils plus longs et les nuits plus courtes pendant tout le temps que le Soleil est dans l'hémisphère boréal, tandis que les nuits sont plus longues et les jours plus courts quand cet astre occupe l'hémisphère austral?

5° Comment se fait-il que la totalité des jours des Dieux et des

jours de leurs ennemis les Titans (¹) fassent une année solaire?

6° Pourquoi les signes du zodiaque, qui sont tous d'une égale longueur, se lèvent-ils dans des espaces de temps qui ne sont pas égaux, et cela même à l'équateur? Pourquoi aussi ces périodes de lever ne sont-elles pas les mêmes sur tous les points de la Terre?

7° S'il est vrai que le milieu d'une éclipse de Lune ait lieu à la fin de la pleine Lune, pourquoi le milieu d'une éclipse de Soleil n'a-t-il pas lieu au moment de ce changement?

8° Pourquoi le bord oriental de la Lune est-il le premier à être éclipsé tandis que, dans le cas d'une éclipse de Soleil, c'est le bord occidental qui disparaît le premier?

9° Pourquoi la Lune, après avoir atteint son plein, perd-elle sa splendeur et pourquoi, après être revenue au même point que le Soleil, devient-elle de plus en plus brillante, jusqu'à ce qu'elle ait repris sa forme circulaire?

Telles sont quelques-unes des questions proposées par l'astronome indien, questions auxquelles il va en partie répondre lui-même, tant dans ce Chapitre que dans celui sur la Lune.

Il parle tout d'abord de la grandeur et de la majesté de l'Être suprême, puis il entre en matière.

« Le globe terrestre, dit-il, formé de terre, d'air, d'eau, d'éther et de fer est parfaitement rond. La Lune, Mercure, Vénus, le Soleil, Mars, Jupiter et Saturne tournent autour de lui. Rien de matériel ne le soutient. Il conserve sa position au milieu de la sphère céleste par une force qui lui est propre. Les êtres animés et les choses inanimées vivent à sa surface. Il est couvert de hautes montagnes, de villes et de monuments.

» Si une substance matérielle ou une créature vivante supportait la Terre, il faudrait une autre substance matérielle, ou une autre créature vivante, pour supporter la première, puis une troisième pour supporter cette seconde, et ainsi de suite. On en arriverait donc à une série interminable et, partant, absurde. Si l'on suppose que le dernier support reste ferme, à cause de la puissance inhérente qu'il possède de se soutenir tout seul, pourquoi ne pas

(¹) Les *jours des Titans* sont les nuits.

supposer tout de suite que la Terre elle-même possède cette puissance?

» Puisque la chaleur est une propriété inhérente au Soleil et au feu; le froid une propriété inhérente à la Lune, la fluidité à l'eau, la dureté aux rochers, la volatilité à l'air, de même la Terre a pour propriété inhérente de ne pouvoir se déplacer et de se maintenir au même point de l'espace. »

Tels sont les arguments très logiques, sinon très scientifiques, de l'astronome indien qui partageait cette croyance autrefois universelle que la Terre est fixe et que tous les corps célestes se meuvent autour d'elle dans des orbites dont elle est le centre.

Il s'élève, non sans raison, contre certaines écoles philosophiques dont les théories sont absurdes et entre autres contre les *Bauddhas* et les *Jainas* (1).

« Il y en a comme vous, Bauddhas, leur dit-il, qui, ayant observé les révolutions des constellations, pensent que la Terre n'a aucun support et qui affirment que, comme aucun corps pesant ne saurait se maintenir à la même place dans l'air, la Terre tombe continuellement dans l'espace.

» D'autres comme vous, Jainas, affirment qu'il y a deux Soleils et deux Lunes, que toutes les constellations sont doubles et que tous ces corps doubles se lèvent alternativement. »

Nous allons voir maintenant ce qu'il répond à ces philosophes et comment il réfute leurs théories. « Vous, Bauddhas, qui avez observé que tout corps jeté en l'air redescend bien vite et rattrape la Terre, comment pouvez-vous affirmer que la Terre tombe continuellement dans l'espace? Si cela était, comment ce corps plus léger pourrait-il rattraper la Terre qui est plus pesante? » Souvenons-nous que celui qui parle est un Hindou qui ne connaît pas la loi de la chute des corps. Du reste, cela n'infirme en rien son

---

(1) Les Bauddhas sont les Bouddhistes de l'Inde, les ennemis les plus acharnés des Brahmines. Les Jainas ou Jains forment une des nombreuses sectes religieuses de l'Inde. Les Bauddhas et les Jains ne reconnaissent pas l'autorité des Védas. Les Bouddhistes, longtemps persécutés par les Brahmines, finirent par être chassés de l'Inde. On les rencontre surtout en Chine et à Ceylan. Quant aux Jains, ils sont encore très nombreux aux Indes.

argument, qui, d'après le point de vue auquel il se place, est fort logique.

Voici maintenant ce qu'il dit aux Jainas : « Que vous répondrai-je, à vous, Jainas, qui, sans la moindre raison et sans utilité, supposez des doubles constellations : deux Lunes et deux Soleils?

» Ne voyez-vous donc pas que les constellations circompolaires, qui sont toujours visibles, font une révolution complète en vingt-quatre heures? »

Bhâskara va maintenant nous donner sa propre explication et nous sommes persuadé qu'elle ne laissera pas d'étonner le lecteur qui verra que ce n'est ni plus ni moins que la loi de l'attraction. Où notre auteur a-t-il trouvé cette théorie est une question à laquelle il n'est guère nécessaire de s'arrêter. Il peut se faire qu'il en ait entendu parler par son père et précepteur, le Brahmane Mahesvara, ou qu'il en soit lui-même le promulgateur. Ce qu'il y a de certain, c'est qu'elle ne lui est pas venue d'Europe, puisque les Européens n'en avaient jamais entendu parler avant Newton. Dirons-nous qu'il avait anticipé le grand mathématicien anglais? Pourquoi non?

Est-ce que, par hasard, un homme né sous le ciel de l'Inde ou de la Perse doit nécessairement être moins intelligent que celui qui voit le jour sous le ciel de l'Europe?

Si les Européens connaissaient mieux les Orientaux, ils reviendraient bien vite d'une foule d'erreurs et de préjugés.

Quoi qu'on puisse dire, il est un fait indéniable, c'est que Bhâskara comprit cette loi de l'attraction bien avant aucun Européen.

Voici comment il s'exprime à ce sujet :

La propriété de l'attraction est inhérente à la Terre. C'est cette propriété qui fait que la Terre attire à elle tout ce qui est pesant.

Ce qui va suivre est commun à tous les astronomes sérieux de l'Inde ancienne.

Ils enseignaient, dans toutes leurs écoles, que si la Terre était plate comme un miroir, le Soleil devrait tourner dans un plan parallèle à la surface terrestre et élevé au-dessus d'elle.

Ils en concluaient que si les choses se passaient ainsi le Soleil serait toujours visible. Or, puisqu'il n'en est pas ainsi, ils se fondent sur cela pour prouver que la Terre est une sphère et non pas une surface plate.

Les astronomes de l'école non scientifique prétendaient que la montagne du Nord, appelée *Méru* (¹), était la cause de la nuit. A quoi les astronomes plus scientifiques répondaient que si la montagne Méru est la cause de la nuit, on devrait voir cette montagne lorsqu'elle se trouve située entre nous et le Soleil. Ils demandaient aussi pourquoi le Soleil se lève plutôt vers le sud que vers le nord.

Ils expliquaient ainsi le niveau apparent de la surface de la Terre :

« Si la surface de la Terre nous paraît plane, disaient-ils, c'est parce que la portion que nous en voyons est très petite comparée à la surface totale. C'est pour ainsi dire comme la centième partie de la circonférence d'un petit cercle qui diffère à peine de la ligne droite.

» Partout où un homme se trouve, il a la Terre sous ses pieds, mais, de deux individus placés à 90° l'un de l'autre, chacun s'imagine que l'autre est dans une position horizontale par rapport à lui. Ceux qui sont à 180° l'un de l'autre sont pieds contre pieds, semblables en cela à celui qui est sur le bord de l'eau et dont l'ombre et le corps nous donnent une idée parfaite de deux individus placés à 180° l'un de l'autre. »

De là nous entrons dans des descriptions sur certains pays et des remarques sur la position géographique de plusieurs lieux du globe.

Tout cela est entremêlé de remarques fort intéressantes, telles, par exemple, que celles-ci :

« Un homme à l'équateur voit en même temps tous les points nord et sud toucher l'horizon.

» La sphère céleste lui semble être appuyée sur ces points autour desquels elle se meut.

(¹) Dans tous les mots sanskrits que l'on trouvera dans le cours de ce Mémoire la lettre *u* devra se prononcer *ou*.

» Si cet homme s'avance vers le nord, il remarquera bientôt que les constellations qui se mouvaient verticalement, à l'équateur, deviennent de plus en plus obliques à mesure qu'il s'éloigne de l'équateur. » De plus, tout ceci est correct.

Bhâskara va maintenant nous donner la circonférence de la Terre. Selon lui, cette circonférence est de 4967 yojanas. Le diamètre en est de $1581\frac{1}{24}$ yojanas et la surface totale de 7853034 yojanas carrés. Ce yojanas est une mesure indienne égale à environ 8 de nos kilomètres.

La circonférence donnée par Bhâskara est donc suffisamment approchée puisqu'elle ne diffère de celle que nous donnons à la Terre, de nos jours, que de 264^{km} environ, tandis que notre diamètre n'a que 34^{km} de plus que celui de Bhâskara. Il est dommage qu'il ne nous dise pas comment il en est arrivé à déduire ces nombres.

Cet auteur se rit de certains mathématiciens, entre autres de Lalla, qui donnent à la Terre des dimensions prodigieuses obtenues en multipliant le carré d'un grand cercle par la circonférence, ce qui, évidemment, est fort loin de la vérité.

Un peu plus loin nous trouvons une remarque fort curieuse de Bhâskara, c'est que la Terre s'accroît et qu'elle augmente continuellement de volume.

Cette assertion vaut la peine d'être étudiée, car s'il est vrai et indubitable que rien ne se perd dans la nature, il n'en est pas de même de la proposition qui affirme que rien ne se crée.

Au contraire, tout semble s'accroître journellement, animaux et végétaux. La nature semble n'être qu'une série de créations qui se succèdent de jour en jour. Partout le sol semble s'élever et s'accroître de tous les débris végétaux et animaux qui y meurent sans cesse. Ceux qui ont voyagé savent que dans tous les pays les anciennes villes sont au-dessous du niveau des villes modernes, et lorsqu'on examine tous les vieux monuments de l'Égypte, de l'Inde, de la Syrie, de la Grèce et de l'Italie, on voit que partout le sol s'est élevé. Cela ne peut être entièrement dû à ce que les vallées recoivent une masse de matériaux des endroits plus élevés, car le même fait se produit sur les montagnes et, par exemple, à l'acropole d'Athènes, ou dans plusieurs parties de l'Inde. Partout le sol semble s'être exhaussé, témoin les Pyramides d'Égypte et

le Sphinx en partie enfouis dans le sable. A Rome, le vieux Forum romain est bien au-dessous du niveau des constructions modernes qui l'avoisinent. Sans aller si loin on en trouve, à Paris, un exemple dans l'église métropolitaine de Notre-Dame, où l'on entre aujourd'hui de plain-pied et où l'on n'arrivait autrefois que par un péristyle de dix ou onze marches. Il y a là un point à étudier (¹).

Causes de l'augmentation et de la diminution des jours. — Nous allons dire maintenant comment les astronomes indiens expliquent le phénomène de l'augmentation et de la diminution des jours.

« Quand le Soleil est dans l'hémisphère nord, disent-ils, les jours sont plus longs que les nuits, mais quand il est dans l'hémisphère austral, les nuits sont plus longues que les jours. »

En effet, la longueur de la nuit est représentée par la longueur du cercle diurne au-dessous de l'horizon, tandis que la portion de l'arc qui est au-dessus de l'horizon représente la longueur du jour. Voilà pourquoi, à l'équateur, les jours et les nuits sont toujours de la même durée.

De plus, ajoutent-ils, une chose fort curieuse a lieu pour les pays dont la latitude est au-dessus de 66° nord. Toutes les fois que la déclinaison septentrionale du Soleil est plus grande que le complément de la latitude, il y a un jour continu pendant tout le temps que cette déclinaison reste supérieure à ce complément, et quand la déclinaison australe du Soleil est plus grande que le complément de la latitude, ces contrées ont une nuit continue.

Voilà pourquoi, au pôle nord, il y a alternativement un jour de six mois et une nuit de six mois.

Précession des équinoxes. — Tous les astronomes indiens semblent avoir connu ce phénomène auquel ils donnent le nom de *Krantî pâta,* mais Bhâskara et Munyala sont les seuls qui s'étendent sur cette rétrogression des points solsticiaux. Quant à la cause du phénomène, elle leur est complètement inconnue et

(¹) Un ancien élève de Becquerel m'assure que cet éminent savant croyait que la Terre augmente continuellement de volume.

ils se contentent de constater le phénomène, sans chercher à l'expliquer.

De la latitude et de la longitude. — Les Hindous vont maintenant nous donner leur manière de trouver la latitude et la longitude d'un lieu au moyen d'un gnomon. Le problème qu'ils proposent est le suivant : *Étant données l'ombre projetée par le style à midi et la déclinaison du Soleil, trouver la latitude du lieu.*

Le complément de l'arc que projette l'ombre du style à midi est égal à l'ombre même. Multipliez le rayon par ce complément et divisez le produit par l'hypoténuse de l'ombre.

Le quotient ainsi obtenu donnera le sinus de la distance zénithale. Cette distance, en minutes, sera nord ou sud selon que le complément sera sud ou nord. On fera alors la somme de la distance zénithale et de la déclinaison du Soleil, en minutes, quand elles sont de même nom et la différence si elles sont de nom contraire.

La latitude du lieu sera égale à cette somme ou à cette différence exprimée en minutes.

Cette méthode, quoique n'ayant pas l'exactitude de nos méthodes modernes, s'en rapproche beaucoup. C'est un peu la méthode dont on se sert, à la mer, pour trouver la latitude du navire.

On trouve aussi dans les Traités d'Astronomie hindous plusieurs règles pour déterminer la longitude par des méthodes qui sont identiques aux nôtres, puis une règle pour trouver la déclinaison et la longitude du Soleil, étant données la latitude du lieu et la distance zénithale du Soleil à midi.

L'astronome indien nous propose maintenant de trouver l'ascension droite des trois premiers signes du zodiaque : Aries, Taurus, Gemini.

« Pour trouver l'ascension droite de la fin de chaque signe, dit-il, vous chercherez d'abord leurs déclinaisons ; puis, cela fait, vous multiplierez les sinus du premier, du deuxième et du troisième signe, séparément, par le cosinus de la plus grande déclinaison du Soleil. Vous diviserez alors ces produits par les cosinus des déclinaisons déjà trouvées et ces quotients seront les sinus des arcs.

Avec ces sinus vous trouverez facilement les arcs qui ne seront autre chose que les ascensions droites de la fin des signes en question. »

Rien ne saurait être plus exact.

III.

DU SOLEIL ET DE LA LUNE.

Nous ne trouvons absolument rien, dans aucun Traité d'Astronomie indienne, sur la constitution physique de la Lune et du Soleil.

Les astronomes indiens nous apprennent que le diamètre de la Lune est de 480 yojanas, c'est-à-dire environ 3840^{km}, et celui du Soleil de 6500 yojanas, soit $52\,000^{km}$. Ce dernier diamètre est loin d'être correct, ce qui n'est pas étonnant vu le manque d'instruments de précision. Quant à celui de la Lune, il n'en est pas de même, puisqu'il est d'environ les $\frac{4}{11}$ du diamètre terrestre au lieu des $\frac{3}{11}$ que nous lui donnons. Ce dernier rayon est si approché qu'on a tout lieu de croire que les Indiens savaient que le rayon d'un astre est à peu près proportionnel au demi-diamètre apparent et à la parallaxe.

On sera probablement étonné de voir ce mot *parallaxe* à propos d'astronomie aussi ancienne que celle dont nous nous occupons ici. Eh bien, ces parallaxes étaient aussi familières aux hindous d'il y a six ou sept siècles qu'elles le sont aux Européens d'aujourd'hui. Les astronomes indiens avaient calculé plusieurs de ces parallaxes et donnaient à la parallaxe horizontale de la Lune une valeur de $52'42''$ et à celle du Soleil $3'56''$. Or, puisque la parallaxe exacte de la Lune est de $57'2''$ et celle du Soleil de $8'',86$, il s'ensuit que cette dernière est fort loin de la vérité, tandis que la première ne diffère de celle adoptée aujourd'hui que de $4'20''$. Il est étonnant de trouver une valeur aussi approchée de la parallaxe lunaire à une époque aussi reculée. Quant à l'inexactitude de la parallaxe solaire, elle s'explique trop facilement pour qu'il soit besoin de s'y appesantir.

Les astronomes indiens étaient évidemment d'excellents observateurs, autrement ils n'auraient pu obtenir des résultats aussi

approchés à l'aide d'instruments qui, comme on le verra plus loin, laissaient beaucoup à désirer sous le rapport de la précision. Il est très curieux de voir que, dans tous les Traités hindous, la longueur de l'année solaire y est donnée avec une erreur qui est à peu près négligeable.

Tous les astronomes hindous, sauf Bhâskara, donnent à l'année solaire une valeur de 365 jours 6 heures 12^m et 37^s. Bhâskara dit que l'année solaire contient 365 jours 15 ghatikâs, 30 palas et 22 vipalas, ce qui revient exactement à 365 jours 6 heures 12^m et 8^s.

Phases de la Lune. — Nous allons voir maintenant ce que les astronomes indiens vont nous apprendre au sujet des phases de la Lune.

« La Lune, disent-ils, reçoit toujours sa lumière du côté qui est tourné vers le Soleil. Le côté qui lui est opposé est toujours plongé dans des ténèbres dont la noirceur ne saurait se comparer qu'à la belle chevelure, noire comme l'aile du corbeau, d'une des filles de l'Inde.

» Au moment de la conjonction, la Lune se trouve placée entre nous et le Soleil. Il arrive alors que la partie qui est tournée vers la Terre est dans l'obscurité. Quand la Lune est à 180° du Soleil, c'est-à-dire que la Terre est entre le Soleil et la Lune, le côté de la Lune qui fait face à la Terre reçoit la lumière du Soleil (excepté dans le cas particulier d'une éclipse); c'est alors que la Lune nous apparaît comme un globe brillant. C'est là l'époque de la pleine Lune. »

L'explication des autres phases de la Lune se borne à faire remarquer que, lorsque la Lune est à 90° du Soleil, elle nous apparaît comme demi-pleine, et que, généralement parlant, la partie éclairée de la Lune augmente graduellement à mesure qu'elle s'éloigne du Soleil, et qu'au contraire la partie obscure augmente en proportion de son rapprochement de cet astre. La Lune étant une sphère, les cornes en deviennent plus ou moins pointues, selon que la distance de la Lune au Soleil varie.

Éclipses. — Le Chapitre sur les éclipses contient, comme on

va le voir, des choses fort intéressantes. On notera surtout la couleur de la Lune pendant les éclipses de Lune, couleur décrite avec soin par les astronomes indiens, et l'on verra que cette teinte enfumée qu'on remarque pendant certaines éclipses de Lune n'est pas caractéristique de l'atmosphère des climats du nord, comme on l'a dit plus d'une fois, puisque cette teinte se retrouve sous toutes les latitudes et dans tous les climats.

Voici à peu près de quelle façon s'expriment les astronomes indiens à ce sujet.

Comme la Lune fait sa révolution dans un cercle plus petit que l'orbite solaire, la Lune rattrape la Terre. Voilà pourquoi, lors d'une éclipse de Soleil, c'est le bord occidental (par rapport à nous) qui est obscurci le premier, tandis que l'éclipse du bord oriental n'a lieu qu'à la fin de l'éclipse et est le dernier à sortir de l'ombre projetée par le corps opaque de la Lune.

Quand le Soleil et la Lune sont en opposition, l'ombre de la Terre enveloppe la Lune et, comme il arrive alors que la Lune se trouve complètement plongée dans les ténèbres, l'éclipse est visible sur toute la surface de la Terre, ce qui n'a pas lieu pour les éclipses de Soleil qui ne sont visibles que sur certains points du globe. Or, comme le Soleil est un corps immense, en comparaison de la Terre, l'ombre projetée par celle-ci est un cône dont le sommet est à une distance considérable de la Lune. Il est facile de trouver, par les proportions, la longueur de l'ombre terrestre et son diamètre, à l'endroit où la Lune y pénètre.

Lors d'une éclipse de Lune, l'ombre de la Terre est située soit vers le nord, soit vers le sud de la Lune, selon que la latitude céleste de notre satellite est sud ou nord.

Comme l'ombre qui enveloppe la Lune est bien plus considérable qu'elle, une éclipse de Lune dure donc pendant tout le temps que celle-ci se trouve plongée dans le cône d'ombre.

Le sommet du cône d'ombre est toujours à 180° du Soleil. Or, quand le lieu du nœud ascendant de la Lune est égal au lieu de l'ombre, il y aura éclipse de Lune ou de Soleil.

Dans l'éclipse de Soleil, la Lune joue le rôle d'un nuage qui couvre le Soleil, tandis que, lors d'une éclipse totale de Lune, la Lune disparaît complètement dans l'ombre.

Disons maintenant que cette explication des éclipses n'a jamais

été faite pour le commun des mortels. Elle est pour les castes privilégiées et surtout pour celle des Brahmines.

Bhâskara lui-même n'écrit pas pour le peuple, mais bien pour les gens de sa caste.

Il cherche parfois à réconcilier la Fable avec la Science, et, bien entendu, il n'y arrive pas.

Aux Indes le peuple croit communément que les éclipses de Soleil et de Lune sont causées par un démon appelé Râhu. Ce démon, qui a une queue de dragon, n'aime ni la Lune ni le Soleil, qui, il y a fort longtemps de cela, lui ont joué un très vilain tour. Un jour que Râhu voulait goûter à l'*Amrita* ou ambroisie des dieux, il prit la forme d'un des immortels et se glissa au milieu d'eux. Il eut sa part du festin et but l'ambroisie. Le Soleil et la Lune s'aperçurent que Râhu n'était pas un vrai dieu et en conséquence ils informèrent les dieux de leur découverte. Comme toujours, ceux-ci entrèrent dans une grande colère et mirent Râhu à la porte. Il alla se réfugier dans le ciel des étoiles. C'est pour se venger du Soleil et de la Lune que, toutes les fois que ces astres sont à sa portée, Râhu, sans autre forme de procès, avale tantôt le Soleil, tantôt la Lune, causant ainsi l'éclipse de l'un ou de l'autre de ces astres.

Il s'agit maintenant de savoir quand l'éclipse sera partielle ou totale. « Pour trouver la grandeur d'une éclipse, dit Bhâskara, on soustrait la latitude de la Lune, à l'époque de la syzygie, de la demi-somme des diamètres du corps céleste qui doit être éclipsé et de celui qui éclipsera l'autre. Cette différence donnera le maximum de la partie éclipsée. Si cette quantité est plus grande que le diamètre du disque éclipsé, l'éclipse sera totale ; s'il est plus petit, l'éclipse sera partielle. S'il arrive que la latitude de la Lune soit plus grande que la moitié de la somme mentionnée plus haut, il n'y aura pas d'éclipse.

» Pour trouver le milieu de l'éclipse on cherchera séparément la moitié de la demi-somme et de la demi-différence des diamètres du corps éclipsé et du corps qui éclipsera l'autre. On soustraira alors le carré de la latitude de la Lune qu'on aura évalué au moment de la syzygie des carrés de ces demi-sommes et de ces demi-différences et l'on extraira la racine carrée de ces résultats. Ces racines, multipliées par 60 et divisées par le mouvement diurne de la Lune, donneront la durée de l'éclipse. »

Maintenant voici les remarques dont nous avons parlé au sujet de la couleur de la Lune lorsqu'elle est en partie éclipsée :

« Quand la partie éclipsée du disque lunaire, dit Bhâskara, est plus petite que la moitié de ce disque, elle paraît comme enfumée; quand la partie éclipsée est de plus de la moitié, elle prend une teinte noirâtre; si la partie éclipsée est de plus des trois quarts du disque, elle prend une couleur cuivrée et quand l'éclipse est totale la Lune prend une teinte d'un fauve noirâtre.

IV.

DES PLANÈTES.

Mercure, Vénus, Mars, Jupiter et Saturne étaient les seules planètes connues des anciens Hindous. Dans leur système astronomique, la Terre, comme nous l'avons déjà dit, occupe le centre de l'Univers. Le Soleil, la Lune et les cinq planètes se meuvent autour d'elle, dans des orbites dont les centres ne coïncident pas avec l'orbite terrestre, le centre du zodiaque étant le seul, disent-ils, jouissant de cette propriété. Cela étant, lorsqu'un observateur cherche une planète, il ne la trouve pas à sa place moyenne dans le zodiaque. Il est donc nécessaire, pour connaître la place occupée par une planète, de faire une correction pour passer du lieu moyen au lieu vrai et il faut aussi se rendre compte du mouvement des planètes.

« Le mouvement des planètes, dit Bhâskara, a lieu vers l'est et si les planètes ont l'air d'être fixes cela tient à ce que la sphère céleste se meut vers l'ouest avec une très grande rapidité. Les planètes, ajoute-t-il, sont comme l'insecte qui marche en sens contraire du mouvement de la roue d'un potier. Bien qu'il marche, il semble ne pas bouger. »

Les astronomes indiens ont arrangé les mouvements des planètes en huit classes qui sont les suivantes :

1° *Vakrâ,* mouvement décroissant et rétrograde;

2° *Atvakrâ,* mouvement croissant et rétrograde;

3° *Vikalâ,* mouvement où la planète semble, à certaines époques, rester stationnaire;

4° *Manda*, mouvement direct et croissant, plus petit que le mouvement moyen;

5° *Mandatarâ*, mouvement direct décroissant, plus grand que le mouvement moyen;

6° *Samâ*, mouvement moyen uniforme;

7° *Atisîghra*, mouvement direct croissant, plus grand que le mouvement moyen;

8° *Sîghra*, mouvement direct décroissant, plus petit que le mouvement moyen.

Nous ne donnons cette nomenclature que pour faire voir que les astronomes indiens avaient reconnu que les planètes semblent décrire des courbes fort peu régulières autour du Soleil, ou, comme ils le disaient, autour de la Terre.

Ils vont nous donner maintenant la manière de trouver l'endroit précis où se trouve une planète, à un moment donné.

S'il s'agit de trouver le lieu occupé par une planète, soit avant, soit après minuit, multipliez le mouvement diurne de la planète par le temps donné en ghatikas (1). Vous diviserez alors le produit par 60 et vous ajouterez ce quotient, en minutes, à l'endroit où la planète se trouve à minuit. S'il s'agit de trouver le lieu, avant minuit, vous soustrairez ce quotient, toujours en minutes, de l'endroit que la planète occupera à minuit.

C'est ce problème que les astronomes indiens appellent le problème de la *place instantanée, Tâtkâlika*.

Déclinaison des planètes. — Pour trouver la déclinaison moyenne d'une planète, les astronomes indiens se servent de la longitude. Celle-ci connue, ils multiplient le sinus de la longitude de la planète par 1037. Ce nombre représente la valeur donnée par les Indiens au sinus de la plus grande déclinaison moyenne des planètes. Divisez ensuite ce produit par un rayon égal à 3438, puis cherchez l'arc dont le sinus est égal à ce quotient; cet arc sera la déclinaison cherchée.

Comme nous avons eu plus d'une fois occasion de le remarquer,

(1) Période de 24 minutes.

tout ceci est donné sans preuve et semble avoir été le résultat de la pratique, corrigée par l'expérience.

Cette déclinaison ainsi obtenue est celle que les Indiens nomment la *déclinaison moyenne* de la planète, c'est-à-dire que c'est la déclinaison de son point correspondant sur l'écliptique. Pour passer de cette déclinaison moyenne à la vraie déclinaison, on n'a qu'à augmenter ou à diminuer cette déclinaison moyenne de la latitude, selon que la latitude et la déclinaison seront ou non de même nom.

Longueur du jour d'une planète. — Pour résoudre ce problème, les astronomes de l'Inde multiplient le mouvement diurne, en minutes, par le nombre de *prânas* (espace de 4 secondes de temps) qu'aura le signe du zodiaque dans lequel se trouve la planète, lorsqu'elle se lève; puis ils divisent ce produit par le nombre de minutes contenues dans un signe du zodiaque, et ils ajoutent ce quotient, réduit en prânas, au nombre de prânas contenus dans un jour sidéral. Ce total représente ce qu'ils appellent le jour et la nuit d'une planète pour un lieu donné.

Conjonctions. — Les astronomes indiens regardaient généralement les conjonctions des cinq premières planètes comme des combats qu'elles se livraient entre elles. Quant aux conjonctions de ces cinq planètes avec la Lune, on les considérait comme une association et les conjonctions avec le Soleil étaient une sorte d'absorption dans ce globe. Dans ces combats de planètes, la victoire est, disent-ils, à la plus brillante; aussi Vénus est presque toujours sûre de la victoire, soit qu'elle soit au nord ou au sud de son antagoniste.

Quand on désire connaître l'époque de la conjonction de deux planètes, on cherche la place exacte qu'elles occuperont à un temps donné antérieur à la conjonction. On multiplie alors la différence de ces lieux, en minutes, par le mouvement diurne de chaque planète, et l'on divise alors les deux produits par la différence entre ces mouvements diurnes, pourvu toutefois que ces mouvements soient semblables, c'est-à-dire qu'ils soient tous deux ou directs ou rétrogrades.

Dans le cas où l'une des planètes aurait un mouvement rétro-

grade, on diviserait les deux produits trouvés ci-dessus par la somme des mouvements diurnes. On donne à ce dernier résultat le nom de changement des planètes. Quand on aura obtenu les points occupés par les deux planètes à un temps donné, on procédera comme suit :

Si la conjonction a eu lieu, on soustraira les changements des lieux occupés par les planètes à une certaine heure, mais, si la conjonction doit avoir lieu, on ajoutera ces mêmes changements.

Il est évident que cette règle ne peut servir que pour les planètes qui se meuvent vers l'est. Si elles ont un mouvement rétrograde, c'est l'inverse qui aura lieu.

Quand une seule des deux planètes a un mouvement rétrograde, on ajoute le changement à la place occupée, si la conjonction a eu lieu, et, si elle n'a pas encore eu lieu, on le soustrait.

En suivant cette marche, les points occupés sur l'écliptique par les planètes en question coïncident, pourvu qu'on ait fait la correction des *changements*. Il ne reste plus alors qu'à diviser la différence qu'il y a entre les points occupés par les planètes, à un moment donné, par le diviseur qui a servi à trouver les changements, et le quotient qui en résultera donnera en jours, en ghatikâs (24^m), en palas (24^s), en prânas (4^s), l'intervalle qui devra s'écouler entre le temps donné et le moment de la conjonction.

Levers et couchers héliaques des planètes et des étoiles. — Il est à peine besoin de dire que les astronomes indiens avaient remarqué ces levers et ces couchers des planètes. Voici les quelques remarques qu'ils avaient faites à ce sujet.

Jupiter, Mars et Saturne ont un coucher héliaque dans l'horizon occidental quand ces planètes sont situées au delà du Soleil, et elles ont un lever héliaque dans l'horizon oriental quand elles sont en deçà du Soleil. La même chose a lieu pour Vénus et Mercure quand ces planètes ont un mouvement rétrograde. La Lune, dont le mouvement est plus rapide que celui du Soleil, a aussi un coucher héliaque, à l'est, quand elle est située en deçà du Soleil, et un lever héliaque, à l'ouest, quand elle est au delà de cet astre. Il en est de même de Mercure et de Vénus.

V.

LE ZODIAQUE INDIEN.

Nous n'entrerons pas dans des dissertations plus ou moins oiseuses au sujet du zodiaque indien que les uns prétendent avoir été imité des Grecs, tandis que les autres, avec des arguments non moins plausibles, affirment dater d'une époque bien antérieure à celle de la civilisation grecque. La question n'est pas de savoir si les Grecs ont pris leur zodiaque chez les Indiens, mais tout simplement de faire connaître ce qu'est ce zodiaque qui, chose étrange, est à peine connu en Europe, même des savants. Nous nous bornerons donc tout simplement à en faire la description.

Au lieu de nous servir de l'expression zodiaque indien, c'est les zodiaques indiens que nous aurions dû dire. En effet, l'Inde possède deux zodiaques : l'un se rapportant au Soleil et l'autre à la Lune, le premier bien connu et se composant des douze signes ordinaires du zodiaque et l'autre comprenant 27 stations se rapportant à la révolution de la Lune autour de la Terre.

Voici les noms des douze signes du zodiaque en sanskrit et en français :

1. Mèsha,	le Bélier,
2. Vrisha,	le Taureau,
3. Mithuna,	les Gémeaux,
4. Karkati,	l'Écrevisse,
5. Sinha,	le Lion,
6. Kanyâ,	la Vierge,
7. Tulâ,	la Balance,
8. Vrishchica,	le Scorpion,
9. Dhanus,	le Sagittaire,
10. Makara,	le Capricorne,
11. Kumbha.	le Verseau,
12. Mîna,	les Poissons.

Les Indiens représentent ces signes de la manière suivante : Les deux premiers signes ont la figure des animaux qui en sont l'emblème.

Les Gémeaux sont représentés par une jeune fille tenant un luth et par un jeune homme qui est à ses côtés et qui est armé d'une massue.

Cancer et Leo sont respectivement le crabe et le lion.

Une femme dans une nacelle qui vogue est la Vierge. D'une main elle tient une lampe et de l'autre un épi de riz.

Le signe de la Balance nous montre un homme tenant une balance d'une main et un poids de l'autre.

Le Sagittaire c'est l'archer bien connu, moitié homme moitié cheval.

Le Capricorne c'est une antilope.

Le Verseau est un homme qui porte une cruche sur l'épaule et qui en verse l'eau et les Poissons sont deux poissons tournés en sens inverse l'un de l'autre.

Tel est le zodiaque solaire des Indiens qui ne diffère que bien peu de celui que nous connaissons. Quant au zodiaque lunaire, il n'en est pas de même, comme on va le voir par ce qui suit.

Nous avons déjà dit que ce zodiaque se compose de 27 signes. Il s'ensuit donc que chaque signe a une valeur de 13°20′.

Voici les noms de ces 27 signes avec la signification. Ces noms sont suivis du nombre d'étoiles contenues dans le signe parce que, sur les représentations indiennes de ce zodiaque, les différentes parties de l'animal ou de l'objet représenté contiennent certaines étoiles qu'on reconnaîtra pour n'être autres que celles de constellations bien connues.

ZODIAQUE LUNAIRE.

		Étoiles.
1. Asvini,	*cheval,*	3
2. Bharani,	*pudendum muliebre,*	3
3. Kritika,	*flamme,*	6
4. Rohini,	*char,*	5
5. Mrigasiras,	*antilope,*	3
6. Ardra,	*étoile,*	1
7. Punarvasu,	*maison,*	4
8. Pushya,	*flèche,*	1
9. Aslesha,	*roue,*	5
10. Magha,	*palais,*	5
11. Purva phalguni,	*lit,*	2
12. Uttara phalguni,	*autre lit,*	4
13. Hasta,	*une main,*	5
14. Chitra,	*une perle,*	1
15. Svati,	*un corail.*	3

		Étoiles.
16. Visacha,	*une guirlande de feuilles,*	4
17. Anuradha,	*un autel,*	4
18. Jyestha,	*un pendant d'oreille,*	3
19. Mula,	*une queue de lion,*	11
20. Purvashadha,	*un sofa,*	2
21. Uttarashadha,	*une défense d'éléphant,*	2
22. Sravana,	*trois pieds d'homme,*	3
23. Dhanishta,	*un tambour à cordes,*	4
24. Satabhisha,	*un bijou rond,*	91
25. Purva bhadrapada,	*une tête à deux faces,*	2
26. Uttara bhadrapada,	*un canapé,*	2
27. Revati,	*un petit tambour à cordes.*	31

En suivant ces signes sur une carte céleste, on n'a pas la moindre difficulté à reconnaître les étoiles qui composent le zodiaque lunaire. On se souviendra que chaque signe équivaut à 13°20′. Si l'on commence à lire la carte céleste par *Aries,* on ne trouvera absolument rien; mais si l'on commence au signe suivant, c'est-à-dire à *Taurus,* il en sera tout autrement et l'on pourra suivre ce zodiaque lunaire d'un bout à l'autre. C'est là, sans doute, une preuve de l'antiquité de ce zodiaque, puisqu'à cette époque le Soleil entrait, à l'équinoxe du printemps, dans le signe de *Taurus* et non dans celui d'*Aries.*

VI.

DES INSTRUMENTS ASTRONOMIQUES.

Nous en arrivons maintenant à une partie qui est sans contredit la plus intéressante, puisque c'est en quelque sorte par elle que nous allons être à même de nous former une idée exacte de la manière dont les anciens Indiens ont réussi à faire les découvertes astronomiques dont nous avons parlé.

Nous allons donc passer en revue l'arsenal scientifique des astronomes hindous; nous verrons qu'il était fort modeste, si modeste même qu'on se demande comment ils ont réussi à posséder des connaissances aussi étendues en Astronomie. L'astronome indien Bhâskara dit, il est vrai, que de tous les instruments il n'en est pas de meilleur que le génie, et je crois, ma foi, qu'il a raison.

Le premier instrument dont parlent les astronomes indiens est

bien connu en Europe : c'est la sphère armillaire qui ne diffère guère de la nôtre que par la construction.

Les sphères armillaires indiennes sont généralement construites en bambou poli. Les cercles sont gradués sur ce bois. Dans les belles sphères, le zodiaque est une large bande sur laquelle les signes sont sculptés. Un petit globe de bois placé au centre représente la Terre. Ces sphères, comme les nôtres, contiennent tous les principaux cercles : zodiaque, écliptique, équateur, etc., etc. Il est donc inutile d'en dire plus à ce sujet.

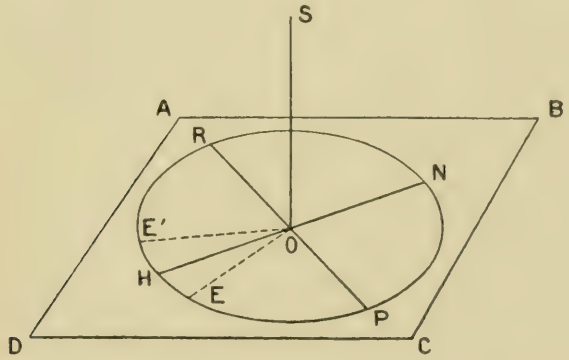
L'instrument qui va maintenant nous occuper est d'une construction fort simple, quoique d'une utilité incontestable.

Il est évident qu'un des principaux besoins de l'astronome, c'est de connaître les points cardinaux. Or voici la méthode dont se servent les astronomes indiens.

Sur une pierre parfaitement horizontale ABCD (*fig.* 1), ou sur une planchette de niveau, on décrira un cercle de rayon quelconque. Au centre O de ce cercle on placera un style OS.

Quelques minutes avant midi, on marquera sur la pierre le point où l'ombre projetée par le style coupe le cercle soit E ; le même nombre de minutes après midi s'étant écoulé, on marquera de nouveau le point où l'ombre touche le cercle en E′. On joindra

Fig. 1.



alors E et E′ à O et on divisera l'angle EOE en deux parties égales par la ligne OH. On prolongera cette ligne jusqu'à ce qu'elle coupe le cercle en N et la ligne NH sera la ligne Nord-Sud, le point H étant évidemment le Sud et N le Nord. La ligne RP passant par le centre O, et perpendiculaire à la droite NH, donnera la ligne Est-Ouest, P étant l'Est et R l'Ouest. De là, on déduira facilement

toutes les aires de vent du compas, comme on peut du reste le faire et comme nous l'avons souvent fait avec une montre; puisque la petite aiguille passe deux fois dans vingt-quatre heures successivement par tous les points de la rose des vents, il s'ensuit qu'à n'importe quel instant du jour, en pointant la petite aiguille vers le Soleil, le point sud doit se trouver sur la bissectrice de l'angle formé par la petite aiguille et la ligne qui joint le centre du cadran au chiffre XII. C'est donc là encore le système hindou [1].

Les astronomes indiens se servaient beaucoup du gnomon. C'est du reste, comme on le sait, un instrument aussi utile que simple. En général, les gnomons indiens ont d'assez grandes dimensions, quoique le style soit habituellement assez petit. C'est avec ces gnomons que les Indiens calculent les azimuts et les hauteurs des astres et surtout du Soleil.

Ils ont aussi des gnomons dont la surface polie reflète les astres. Dans ce cas, le style se reflète aussi dans cette espèce de miroir sur lequel on a tracé des lignes ou tendu des fils croisés qui permettent de suivre l'astre avec une grande facilité et qui, avec l'habitude, donnent de bons résultats.

Dans ce cas, il faut que l'œil reste constamment à la même place. Cela peut s'obtenir, comme j'ai vu un Hindou le faire, en plaçant devant ce gnomon, dont les dimensions sont généralement petites, une planchette percée d'un petit trou par lequel l'œil regarde. Quand l'observation demande une plus grande précision, on place, à l'endroit de ce trou, un petit tube de bambou qui fait

---

[1] Cette méthode m'a été indiquée en 1869 par un capitaine suédois de la marine marchande. Depuis lors, je l'ai souvent pratiquée et je l'ai enseignée à un grand nombre de jeunes gens. Elle est d'une application extrêmement facile. Il suffit que le Soleil soit visible, que la montre dont on se sert soit bien réglée et qu'elle indique l'heure moyenne du lieu et non celle du premier méridien à moins qu'on n'en soit pas fort éloigné. On peut aussi négliger l'équation du temps qui ne causera jamais une erreur de plus de 2°. Pour connaître le sud et, par suite, toutes les aires de vent, dirigez la petite aiguille de la montre vers le Soleil et divisez en deux parties égales l'angle formé par cette aiguille et la ligne qui joint le centre du cadran au chiffre XII. La bissectrice indiquera la direction de la ligne sud-nord. Supposons que la petite aiguille soit sur la douzième minute, soit entre 2^h et 3^h, le sud sera sur la ligne qui passera par le centre du cadran et la sixième division.

On voit que c'est là aussi un moyen facile de corriger le compas de la variation.

alors l'office d'une lunette par laquelle l'œil vise toujours le même champ du gnomon.

Le style des gnomons hindous se compose généralement d'un morceau d'ivoire tourné et bien calibré du haut en bas.

On trouve aussi chez les astronomes indiens des demi-cercles et des quarts de cercle qui servent à la mesure des angles. Ils emploient aussi très fréquemment le cercle, qu'ils divisent, comme nous le faisons, en 360°.

Pour se servir de ce cercle, ils l'attachent par un fil ou par une chaînette qui peut se mouvoir sur la circonférence, de sorte qu'on peut fixer le cercle à tel ou tel degré. Ces cercles ont au centre un petit axe métallique qui sert à viser ou qui, dans le cas du Soleil, projette une ombre sur le cercle qu'on a soin de maintenir dans le plan de cet astre. Cette ombre projetée donne facilement la hauteur du Soleil.

Les Hindous déterminent aussi l'instant du passage du Soleil au méridien et par suite la ligne Nord-Sud au moyen de l'ombre projetée par le style du gnomon. En effet, lorsque cette ombre projetée atteint son minimum, c'est que le Soleil est à son maximum d'élévation et, par conséquent, au méridien. Les astronomes hindous suivent la courbe sur le gnomon et marquent les points où l'ombre s'arrête.

J'ai essayé cette méthode moi-même en faisant projeter l'ombre d'un petit style sur une feuille de papier collée sur une planche et divisée en petits carrés et je suis arrivé ainsi à des résultats fort satisfaisants. La plus grande cause d'erreur provient de la pénombre qui entoure le style et qui est d'autant plus marquée que la lumière est moins vive.

Les astronomes de l'Inde se servent aussi de cercles gradués en 360° et au centre desquels ils fixent une sorte d'aiguille ou de lunette sans verre qui permet de viser tel ou tel astre. Pour mesurer la hauteur du Soleil à l'aide de ces cercles, on fixe au centre un petit axe métallique. En tenant le cercle dans le même plan que le Soleil, l'ombre projetée par ce petit axe sur le cercle sert à indiquer la hauteur.

On voit aussi aux Indes des demi-cercles et des quarts de cercle qu'on emploie à peu près de la même manière que le cercle.

Nous allons voir maintenant comment les astronomes indiens

mesurent le temps. Ils divisent le jour et la nuit en douze heures chacun.

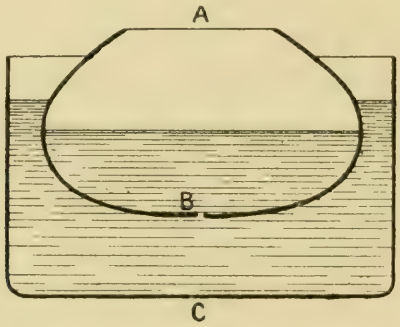
Ils divisent leurs heures en *ghongs,* espace de temps d'environ 22 minutes et demie. Il s'ensuit qu'il y a 32 *ghongs* dans le jour et le même nombre de *ghongs* dans la nuit, ou en tout 64 *ghongs* pour les vingt-quatre heures.

Huit de ces *ghongs* font un *pore*. Il y a donc 4 *pores* dans le jour et 4 dans la nuit, ce qui fait en tout 8 *pores*. On peut donc dire qu'un *pore* est un espace de trois heures.

L'instrument dont on se servait le plus communément autrefois et dont se servent encore nombre d'astronomes que la civilisation européenne n'a pas encore atteints est la *clepsydre*.

Cette clepsydre se compose d'un vase en cuivre A (*fig.* 2) percé

Fig. 2.



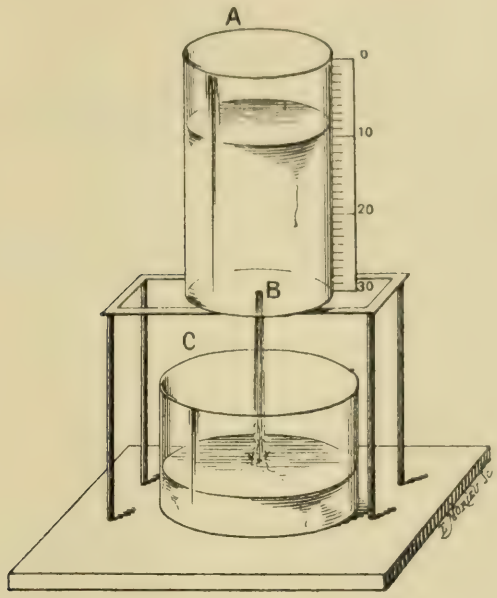
à sa partie inférieure d'un petit trou B et qu'on place sur l'eau contenue dans un récipient C. Naturellement, le vase A finit par s'emplir puisque l'eau du vase C y pénètre peu à peu par l'orifice B et il arrive un certain moment où le vase A s'enfonce soudainement dans le vase C dont il vient frapper le fond. Le bruit ainsi produit s'appelle le premier ghong. Ce ghong est en général une période d'un peu moins d'une demi-heure. Il est évident qu'on peut faire varier la durée de cette mesure en élargissant ou en rétrécissant l'orifice B.

Remarquons que la clepsydre permet de mesurer le temps avec une très grande exactitude, surtout si l'on apporte un certain soin à la construction du vase intérieur.

Il y a encore une clepsydre dont les astronomes se servent communément et qui est pourvue d'une échelle qui donne les petites divisions du temps ou les fractions de *ghongs*.

Elle se compose d'un cylindre creux A percé d'un petit trou B (*fig.* 3) par lequel l'eau s'écoule dans un vase inférieur C. L'échelle graduée est fixée au cylindre A. Ces clepsydres contiennent un *ghong*. J'en ai une dont l'échelle est fixée à l'intérieur du vase C. On compte alors le temps par l'élévation de l'eau dans ce vase.

Fig. 3.



Au nombre des instruments qui servent à la mesure du temps, il y a aussi des roues dont, paraît-il, on se sert encore aux Indes, et qui sont assez curieuses. Je regrette de ne les avoir jamais vues, chose peu étonnante, du reste, car les Hindous regardent ces machines comme des choses merveilleuses dont on ne doit pas permettre la vue aux profanes. Je ne décrirai ici qu'une de ces roues dont parle Bhâskara.

On remarquera qu'elle ressemble fort à une invention des chercheurs de mouvement perpétuel.

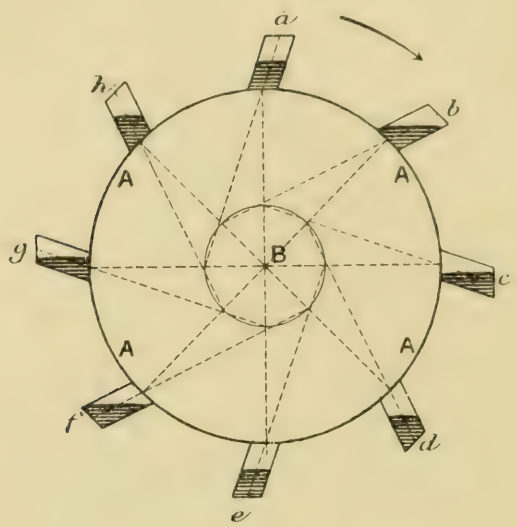
Or, comme Bhâskara en donne une description détaillée, on verra que nous ne sommes pas en présence d'une invention moderne.

Bhâskara dit que, lorsqu'on a mis cette roue en mouvement, elle tourne toute seule, mais il ne dit pas qu'elle continue de tourner sans jamais s'arrêter.

Voici en quoi elle consiste : Elle se compose (*fig.* 4) d'un

cercle en bois très léger A, ayant à son centre un axe B qui repose sur deux tourillons. Tout autour de cette roue, on fixe de petits tubes de bois bien calibrés, *a*, *b*, *c*, *d*, etc., et l'on a soin que l'axe de ces tubes s'écarte du centre de la roue. Cet écartement de l'axe doit être le même pour tous les tubes. Cela fait, on remplit ces

Fig. 4.



tubes de mercure jusqu'à leur milieu, après quoi on ferme hermétiquement les tubes. Il faut avoir grand soin que chaque tube renferme exactement la même quantité de mercure. La roue tourne dans le sens de la flèche.

Un Hindou de mes amis, qui habite Madras, m'assure qu'il a vu plus d'une fois ces roues en mouvement et qu'elles donnent de bons résultats au point de vue de la mesure du temps que l'on évalue par le nombre des révolutions de la roue. Il ajoute que plusieurs de ces roues enregistrent le nombre de révolutions qu'elles font et qui correspond à un temps donné.

Ici s'arrête cet article déjà trop long et pour lequel nous demandons l'indulgence du lecteur. C'est un peu à regret que nous laissons de côté une foule de choses que nous aurions plaisir à mettre au jour; malheureusement, cela nous forcerait de sortir des limites. Peut-être, un jour, reviendrons-nous sur cet intéressant sujet.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

TISSERAND (F.). — TRAITÉ DE MÉCANIQUE CÉLESTE. T. II, in-4°, XIV-552 p. Gauthier-Villars et fils, 1891.

Le second Volume du nouveau *Traité de Mécanique céleste* est, comme nous le pressentions en analysant le premier (¹), plus riche encore de faits nouveaux. Les théories relatives à la figure des corps célestes ont fait, dans ces dernières années, par les travaux d'un grand nombre de géomètres, d'importants progrès, et le perfectionnement des observations a permis de soulever, relativement au mouvement de rotation de la Terre, des problèmes dont la solution, sans doute, est encore réservée à l'avenir, mais à un avenir prochain, de sorte qu'il y a le plus grand intérêt à pousser l'étude mathématique de ce mouvement notablement plus loin qu'on ne l'avait fait jusqu'au milieu du siècle actuel.

D'autre part, M. Tisserand a voulu que son livre présentât, par l'enchaînement même des idées, un tableau fidèle des progrès successifs des théories qui en font l'objet. L'ordre qui en résulte est tel que la lecture de ce second Volume, consacré à des questions qui sont, à bon droit, regardées comme les plus ardues de la Mécanique céleste, est vraiment aussi facile et simple que celle du premier.

M. Tisserand ne s'est pas borné à l'exposé des méthodes et des développements analytiques; il en a fait la critique avec le plus grand soin, de sorte que son livre offre à la fois le tableau de l'état de la Science relativement à la figure et au mouvement de rotation des astres, mais aussi l'indication toujours claire et précise de ce qui reste à faire sur ce sujet.

En raison de la date récente d'un grand nombre des travaux rassemblés dans ce Volume et du peu de diffusion qu'a eu trop longtemps l'admirable Ouvrage de Clairaut auquel M. Tisserand a restitué ici la place d'honneur qui lui est due, il nous a paru

(¹) Voir *Bulletin des Sc. math.*, juillet 1889.

indispensable de donner à l'analyse du Tome II plus d'étendue que nous ne l'avions fait pour le Tome I.

Nous diviserons cette analyse en dix Sections comme il suit :

I (Chap. I à V). Étude de l'attraction d'un corps sur un point suivant la loi de Newton. — II (Chap. VI à XI). Figures ellipsoïdales ou annulaires d'équilibre d'une masse fluide homogène. — III (Fin du Chap. IX et Chap. XII). Travaux de Maxwell sur l'anneau de Saturne. — IV (Chap. XIII à XV). Théorie de Clairaut de l'équilibre d'une masse fluide hétérogène. — V (Chap. XVI et XVII). Fonctions de Legendre et de Laplace. — VI (Chap. XVIII et XIX). Théorie de Laplace de l'équilibre d'une masse fluide. — VII (Chap. XX et XXI). Résumé des résultats géodésiques. — VIII (Chap. XXII à XXVII). Mouvement de rotation de la Terre, fixité des pôles, constance du jour sidéral; précession et nutation. — IX (Chap. XXVIII). Libration de la Lune. — X (Chap. XXIX et XXX). Travaux relatifs à la rotation de la Terre dans diverses hypothèses sur l'état physique de sa masse interne. Variation de la hauteur du pôle. Examen de l'effet produit par diverses modifications de la distribution de la masse et par diverses actions s'exerçant à la surface. Ces deux derniers Chapitres ont été rédigés par M. Radau.

I. Les cinq premiers Chapitres, consacrés à l'étude de l'attraction d'un corps sur un point suivant la loi de Newton sont une introduction nécessaire aux questions traitées dans la suite de l'Ouvrage.

Les intégrales triples, qui représentent les composantes de cette attraction suivant trois axes rectangulaires, peuvent être remplacées, si le corps est homogène, par des intégrales doubles, utilisées par Gauss, étendues à toute la surface du corps. Elles sont, par rapport aux coordonnées du point attiré, les dérivées partielles du potentiel V, dont l'emploi fournit aussi des expressions simples des composantes de l'attraction suivant les directions qui s'offrent naturellement en coordonnées polaires. Si le point s'éloigne indéfiniment, le produit Vr tend vers la masse du corps. Une expression simple, due à Gauss, du potentiel d'un corps homogène, a été utilisée récemment par Mme Kowalewski.

Si le point est extérieur, on obtient l'équation

$$\Delta_2 V = \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0.$$

La transformation, due à Lamé, de cette équation en coordonnées orthogonales s'applique aisément aux coordonnées polaires, et au cas où un point est défini par trois sphères passant par l'origine et ayant leurs centres sur les trois axes. Si le point fait partie de la masse du corps, il est nécessaire de définir à nouveau les fonctions X, Y, Z, V; leurs expressions en coordonnées polaires montrent qu'elles sont finies et continues; elles satisfont aux mêmes relations que dans le premier cas, sauf à $\Delta_2 V = 0$. Si N désigne la normale extérieure à l'élément de surface $d\sigma$ et u la droite joignant cet élément au point attiré, l'intégrale $\int \frac{\cos(N, u)}{u^2} d\sigma$ est 0, 4π ou 2π, suivant que le point est extérieur ou intérieur, ou situé sur la surface.

Si le point est intérieur, il convient de donner à $\frac{\partial V}{\partial x}$ une forme qui permette le calcul de $\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}$. On en déduit que toujours $X = f\mu \frac{\partial V}{\partial x}$ et que $\Delta_2 V = -4\pi\rho$, équation due à Poisson. La démonstration suppose seulement que, dans une sphère très petite, ayant pour centre le point attiré, les dérivées de la densité soient continues et les dérivées secondes finies. Une des dérivées secondes du potentiel est discontinue quand le point traverse la surface. A propos de l'attraction d'une masse distribuée sur une surface, on montre sur des exemples particuliers ce théorème de Clausius que

$$\left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{+0} - \left(\frac{\partial V}{\partial n}\right)_{-0} = -4\pi\rho.$$

Le Chapitre II se termine par l'introduction du potentiel logarithmique $\int \rho \log \frac{1}{r} d\sigma$ dû à Neumann, utilisé pour l'étude de l'attraction d'un cylindre droit sur un point de sa section moyenne, même dans le cas où la hauteur de ce cylindre croît indéfiniment.

La considération des surfaces de niveau $V = \text{const.}$ facilite

l'étude de l'attraction. En chaque point de l'une d'elles, l'attraction lui est normale et varie en raison inverse de la distance à une surface de niveau infiniment voisine. L'emploi d'un théorème de Gauss permet de montrer, d'après Chasles, qu'en désignant par μ la masse d'un canal reliant orthogonalement deux éléments de deux surfaces de niveau, la différence des valeurs de l'attraction sur ces éléments est $4\pi f\mu$. En répandant sur les points d'une surface de niveau une matière de densité proportionnelle à l'attraction en ces points, on obtient une couche de niveau. La différence des masses de portions correspondantes de deux couches est égale à la masse attirante contenue dans le canal orthogonal qui les relie. Il s'ensuit qu'une couche exerce sur un point intérieur une action égale et opposée à celle de la partie du corps attirant qui lui est extérieur, et sur un point extérieur une action égale à celle de la partie du corps qui lui est intérieur. Green avait déduit aisément ces propriétés des deux théorèmes de la plus haute importance qui ont gardé son nom.

En employant des coordonnées polaires ayant pour pôle le point attiré, Lagrange ramène à des intégrales simples le potentiel et les composantes de l'attraction d'un ellipsoïde homogène sur un point intérieur. De ce que ces composantes demeurent constantes quand les axes de l'ellipsoïde varient dans un même rapport, il résulte que l'action d'une couche homogène comprise entre deux ellipsoïdes concentriques homogènes est nulle. Une substitution due à Jacobi donne aux intégrales des formes élégantes; une autre les ramène à des intégrales elliptiques. Ivory a ramené le cas où le point est extérieur au calcul de l'action d'un ellipsoïde homofocal, de même densité, passant par ce point. Une démonstration de Gauss est fondée sur les expressions des composantes données au début de l'Ouvrage. La méthode donne aussi le potentiel. M. Tisserand se borne à signaler la méthode géométrique de Chasles et celle de Dirichlet fondée sur l'emploi d'un facteur de discontinuité et renvoie à *History of the theories of attraction and the figure of the Earth* de Todhunter.

Si l'ellipsoïde homogène est de révolution, les intégrales de Lagrange et d'Ivory s'expriment par des fonctions circulaires inverses ou par des logarithmes, suivant que l'ellipsoïde est aplati

ou allongé. Des développements en séries montrent qu'en un point de la surface situé à la latitude dont le sinus est $\frac{1}{\sqrt{3}}$, l'attraction est la même que si la masse était condensée au centre. Après avoir étudié l'attraction de divers solides sur des points particuliers, M. Tisserand détermine le solide de révolution, de masse donnée, qui exerce la plus grande attraction sur le point où l'axe coupe la surface.

II. Les Chapitres VI, VII, VIII, X, XI et une partie du Chapitre IX se rapportent à la figure d'équilibre d'une masse fluide homogène.

Si les forces qui sollicitent les molécules d'une masse fluide ont un potentiel V, que cette masse, animée d'un mouvement de rotation uniforme, ait une vitesse angulaire ω autour de l'axe des x et soit en équilibre relatif, on a, pour toute surface de niveau, en particulier pour la surface extérieure, $V + \frac{\omega^2}{2}(y^2 + z^2) = \text{const.}$ Si X, Y, Z sont les composantes de l'action des molécules sur l'une d'elles suivant la loi de Newton et que $\Phi(x, y, z) = 0$ soit l'équation de la surface extérieure, on a

$$\frac{X}{\frac{\partial\Phi}{\partial x}} = \frac{Y + \omega^2 y}{\frac{\partial\Phi}{\partial y}} = \frac{Z + \omega^2 z}{\frac{\partial\Phi}{\partial z}}.$$

X, Y, Z dépendent de Φ d'après les formules compliquées données au Chapitre I; on ne peut que rechercher si des figures données sont admissibles.

On trouve qu'un ellipsoïde, de révolution autour de son petit axe, est une figure d'équilibre, pourvu que ω soit assez petit. Pour une masse donnée du corps, on trouve même, dans ce cas, deux ellipsoïdes, dont l'un tend vers une sphère quand ω tend vers 0 et l'autre vers un disque. En un point de la surface la pesanteur est normale et inversement proportionnelle à la distance du centre au plan tangent. Les surfaces de niveau sont homothétiques. L'aplatissement est à peu près les $\frac{5}{4}$ du rapport de la force centrifuge à la pesanteur en un point de l'équateur, formule qui, appliquée à la Terre, à Jupiter, à Saturne, donne pour chacun de ces astres un aplatissement trop fort. Si l'on se donne, à la fois, la

masse et la somme des moments des quantités de mouvement, il n'y a qu'un ellipsoïde possible.

M. Tisserand démontre, d'après Liouville, ce théorème de Jacobi qu'un ellipsoïde à axes inégaux peut aussi être une figure d'équilibre si ω^2 est $< 0,18709 . 2\pi f\rho$. Si ω tend vers 0, cet ellipsoïde tend à prendre la forme d'une aiguille à peu près ronde tournant autour d'une droite perpendiculaire à sa direction. Si, au lieu de se donner ω, on se donne la masse, on trouve soit une seule figure d'équilibre, ellipsoïde de révolution, soit un tel ellipsoïde et un autre à trois axes inégaux.

Un cylindre elliptique indéfini est aussi une figure d'équilibre, s'il tourne autour de son axe.

M. Poincaré a démontré, en partant du théorème de Green, que si ω^2 est $> 2f\pi\rho$, il y a des points où la résultante des forces est dirigée vers l'extérieur, de sorte que l'équilibre relatif est impossible quelle que soit la forme des corps.

M. Roche a discuté en 1849 l'équilibre d'un ellipsoïde fluide homogène, animé d'une rotation uniforme, en supposant que, outre leurs actions mutuelles, les molécules subissent l'attraction d'un point éloigné situé dans l'équateur, que l'ellipsoïde ait une révolution circulaire autour de ce point, de même durée que la rotation. C'est à peu près le cas de la Lune. M. Roche néglige le cube du rapport des dimensions de l'ellipsoïde à sa distance au point éloigné. L'équilibre serait possible pour un ellipsoïde à trois axes inégaux tournant autour du plus petit, le plus grand étant tourné vers la Terre et le rapport des aplatissements des deux sections méridiennes étant de quatre à un.

Une partie du Chapitre IX et le Chapitre X sont consacrés aux figures annulaires d'équilibre d'une masse fluide homogène analogue à l'anneau de Saturne, dont les éléments sont soumis à leurs actions mutuelles, à l'attraction de la planète et la force centrifuge. L'analyse de Laplace est fondée sur la substitution à l'anneau, dans le calcul de son action sur un de ses points, d'un cylindre indéfini ayant pour section droite la petite section méridienne passant par ce point. Pour l'équilibre, le rapport des densités de l'anneau et de Saturne devrait être plus grand que 1,89 ou 0,55 pour les deux anneaux intérieur et extérieur. Le théorème de M. Poincaré cité plus haut conduit aux limites beaucoup plus

faibles $\frac{1}{4.9}$, $\frac{1}{16.6}$. Laplace montre d'ailleurs que l'anneau serait instable.

Mme S. Kowalewski a repris la question en supposant l'anneau engendré par une courbe peu différente d'une ellipse tournant autour d'une droite parallèle à son petit axe cx_1. Désignant par $\sigma l x_1$ et $\sigma l y_1$ les coordonnées d'un point de la surface, où σl est un petit nombre fixe, elle pose

$$y = -\cos t \qquad \text{et} \qquad x_1 = \alpha \sin t + \alpha' \sin 2t + \alpha'' \sin 3t \ldots.$$

Si l'on s'en tient au premier terme, on retrouve l'ellipse de Laplace. L'emploi des deux premiers donne deux figures d'équilibre : une courbe ovoïde tournant la pointe vers Saturne et une seconde courbe analogue tournée tantôt dans le même sens, tantôt en sens contraire.

Si l'on ne tient pas compte de l'attraction d'une masse extérieure, on est en face d'un problème analogue à celui de l'équilibre d'une nébuleuse homogène, problème différent d'ailleurs de celui qu'offre la théorie cosmogonique de Laplace, puisque la nébuleuse de Laplace devait être fortement condensée au centre. M. Poincaré a démontré ce théorème énoncé par Thomson et Tait que parmi les figures d'équilibre il y a un anneau de révolution. M. Tisserand décompose l'énergie potentielle en deux parties, calcule la principale d'après une indication de M. Callandreau et trouve un résultat conforme à celui que donne l'analyse de Mme Kowaleski quand on néglige la masse de Saturne. A la fin du Chapitre XI, M. Tisserand résume les conclusions du Mémoire publié par M. Poincaré au Tome VII des *Acta mathematica* et rappelle les travaux de Liapounoff, Matthiessen et quelques autres.

III. La fin du Chapitre IX et le Chapitre XII renferment l'exposition des travaux de Maxwell sur l'anneau de Saturne.

Supposant d'abord que cet anneau soit rigide, Maxwell trouve que, s'il était homogène, il serait instable, et M. Radau a montré qu'un tel anneau ne pourrait être stable que s'il y avait dans sa masse des variations de densité considérables, ce qui ne paraît pas conforme à la réalité. M. Hirn, en 1872, est arrivé, sans avoir connaissance des travaux de Maxwell, à conclure, comme lui, qu'un

anneau solide mince, comme celui de Saturne, ne résisterait pas aux énormes pressions auxquelles il serait soumis.

L'anneau ne pouvant être solide, Maxwell le considère comme formé de satellites de même masse, mobiles d'un mouvement d'ensemble dans un même plan, placés vers les sommets d'un polygone régulier concentrique à Saturne et s'écartant peu de ces positions relatives. Le problème se ramène de suite à la résolution d'une équation de degré $4p$ dont les racines doivent, pour la stabilité de l'équilibre, avoir la forme $n\sqrt{-1}$.

Maxwell cherche une solution particulière du problème où figure un nombre entier et positif arbitraire, dont les diverses valeurs donneront l'intégrale générale. Il obtient une équation du quatrième degré dont les racines doivent être réelles. L'analyse montre que la stabilité est possible si le rapport de la masse de l'anneau à celle de la planète est moindre que $\frac{2}{p^2}$. M. Tisserand s'en tient à cette partie du Mémoire de Maxwell et se borne à reproduire les conclusions de la fin du Mémoire relatives, soit à un nuage de poussières météoriques qui ne pourraient avoir la même vitesse angulaire aux deux bords, soit à un anneau liquide continu incompressible qui devrait se décomposer en satellites. Maxwell conclut de l'ensemble de ses recherches que l'anneau est formé de parties solides ou liquides, mais indépendantes, ce qui est confirmé par la transparence de l'anneau qui a laissé voir le limbe sans réfraction, et par les recherches photométriques de Seeliger.

IV. La théorie de Clairaut de l'équilibre d'une masse fluide hétérogène, formée de couches ellipsoïdales, est l'objet des Chapitres XIII, XIV et XV. M. Hamy a démontré récemment qu'une masse fluide en équilibre relatif, dans laquelle la densité croît de la surface au centre, ne peut admettre des ellipsoïdes comme surfaces de séparation des couches successives. Mais si l'on néglige les puissances des *ellipticités* supérieures à la première, et celles de la vitesse angulaire de rotation, on trouve une solution. Toutes les surfaces sont de révolution autour de l'axe de rotation, aplaties suivant cet axe, et la vitesse angulaire est la même partout. M. Tisserand démontre avec Clairaut que les ellipticités et leurs rapports aux cubes des petits axes vont en augmentant de la sur-

face au centre. Désignant par e l'ellipticité de la surface, par g la pesanteur en un point de cette surface, de latitude ψ, par g'_1 la valeur de g et par $g'_1\varphi$ la force centrifuge à l'équateur, on a, quelle que soit la loi des densités, $g_1 - g'_1 = g'_1\left(\frac{5}{2}\varphi - e_1\right)$. De plus, e_1 est compris entre $\frac{\varphi}{2}$ et $\frac{5\varphi}{4}$, ces deux limites correspondant au cas où la masse est condensée au centre et à celui de l'homogénéité. L'application à la Terre donne l'aplatissement $\frac{1}{292,4}$, voisin de la valeur $\frac{1}{293,5}$ obtenue par Clarke; les aplatissements de la Terre, Jupiter, Saturne sont bien compris dans les limites indiquées.

La détermination des axes, des ellipticités et des densités des couches successives autres que la première dépend de $n+2$ équations à $3(n-1)$ inconnues. L'une de ces équations se déduit de la connaissance du rapport $\frac{A-C}{A}$ que fournit la théorie des mouvements de rotation, A et C étant les moments d'inertie principaux du corps considéré. A partir de $n=3$, le nombre des équations dépasse celui des inconnues. Néanmoins M. Hamy a montré que pour $n=3$ elles n'ont de solution que si l'on suppose $e_1 < \frac{1}{296,5}$.

Le Chapitre XIII se termine par le calcul du potentiel d'une planète constituée comme il est supposé ici, sur un point éloigné. En s'en tenant aux termes en $\frac{1}{r^3}$, il ne dépend que de la masse de la planète et de sa surface extérieure.

Si la masse fluide est formée d'une infinité de courbes ellipsoïdales, infiniment minces, dont la densité varie d'une manière continue, l'ellipticité e d'une de ces couches de demi-axe de rotation a et de densité ρ, et la densité moyenne D de la masse totale intérieure à cette couche, s'expriment par des intégrales définies qui seraient déterminées si l'on connaissait ρ en fonction de a, et il en est de même du rapport $\frac{A-C}{A}$. D'autre part, les valeurs e_1, Δ de e et D, pour la couche terminale, sont connues. Il est commode de transformer l'équation qui donne e en une équation différentielle du deuxième ordre. Si l'on pose $\rho = \rho_0(1 - A_1 a^{\alpha_1} - A_2 a^{\alpha_2} \ldots)$ et que l'on désigne $\frac{\rho}{\rho_0}$ par ζ, on trouve l'équation de Clairaut

$$e\left[2\zeta_1 + \left(\frac{d\zeta}{da}\right)_1\right] = \frac{5}{2}\varphi\zeta$$

Cette équation est ramenée à l'une des formes $\frac{dy}{dx} + y^2 = X$, $\frac{d^2y}{da^2} = \varphi(a)$, cette dernière employée par Legendre et Airy. M. Radau fait $d\log e = \eta\, d\log a$, ce qui donne

$$a\frac{d\eta}{da} + \rho\eta + \eta^2 + 2(1+\eta)\psi(a) = 0.$$

M. Callandreau a montré que $\frac{\eta}{3} < 1 - \frac{\rho_1}{\rho_0}$, et M. Poincaré que, dans le cas de la Terre, e ne peut dépasser $\frac{1}{297,3}$, si l'on admet, comme l'indique la théorie de la rotation, que $\frac{A-C}{A} = \frac{1}{305,6}$. Enfin, M. Callandreau a prouvé que, si $\frac{d^2\rho}{da^2}$ est < 0, η croît constamment de 0 à η_1.

Le Chapitre XIV se termine par l'examen, d'après M. Stieltjes, de certaines limites entre lesquelles est comprise la densité de la Terre.

Legendre, Laplace, Roche, Lipschitz, Maurice Lévy ont intégré l'équation de Clairaut dans certaines hypothèses sur la variation de la densité. Laplace notamment a supposé la Terre formée d'une substance unique en fusion, la variation de densité provenant seulement de la compressibilité. Il fait $d\rho = \psi(\rho)\, d\rho$ et suppose $\psi(\rho) = h\rho$. Il arrive à l'hypothèse de Legendre. Roche fait $\psi(\rho) = h\rho + h'\rho^2$. L'hypothèse de Laplace donne pour le coefficient de compressibilité 0,000 0024; celle de Roche 0,000 0045. Celui du mercure est 0,000 0029, celui de l'eau 0,000 0050. L'exposé de ces applications se termine par un théorème mis en lumière par M. Saigey, d'après lequel la pesanteur augmente quand on descend dans le sol et passe par un maximum qui, dans l'hypothèse de M. Roche, a lieu à une profondeur égale à $\frac{1}{7}$ du rayon, l'augmentation n'étant que de $\frac{1}{20}$ de la valeur à la surface.

V. Les Chapitres XVI et XVII sont une introduction nécessaire à la théorie de Laplace. Désignant par Δ la distance d'un point attiré r, θ, ψ à un point r', θ', ψ' d'une masse attirante, par σ l'angle des droites qui vont de l'origine à ces deux points et par P_n une fonction entière de $\cos\sigma$, on a

$$\Delta^{-1} = \sum^{\infty} P_n \frac{r'^n}{r^{n+1}}, \qquad V = \sum^{\infty} \frac{Y_n}{r^{n+1}}.$$

Y_n étant exprimée au moyen de P_n par une intégrale triple qui, en posant $\cos\theta = \mu$, devient une fonction entière du degré n de μ, $\sqrt{1-\mu^2}\cos\psi$, $\sqrt{1-\mu^2}\sin\psi$, satisfaisant à une équation aux dérivées partielles du second ordre déduite de $\Delta_2 V = 0$. Si l'on réduit le corps à un point, on voit que P_n doit satisfaire à la même équation; si l'on place ce point attirant sur Ox, ce qui revient à faire $\sigma = 0$, P_n deviendra X_n fonction seulement de μ satisfaisant à l'équation différentielle bien connue de Legendre.

On obtient des développements de X_n suivant les puissances descendantes de μ, suivant les cosinus de multiples de θ, ce dernier montrant que X_n est compris entre -1 et $+1$. On établit la relation récurrente entre trois fonctions consécutives, une autre entre ces trois fonctions et la dérivée de l'une d'elles, les valeurs bien connues de $\int_{-1}^{+1} X_m X_n \, d\mu$ et un peu plus loin celles d'une intégrale plus générale. La représentation de X_n par une intégrale définie montre que cette fonction tend vers 0 si n croît indéfiniment. On trouve la valeur de $\int_{-1}^{+1} X_{2n}(1+k^2\mu^2)^{-\frac{2n+3}{2}} d\mu$ qui est nulle si l'on y remplace X_{2n} par X_{2n+1}. On montre que X_n est, à un facteur constant près, la $n^{\text{ième}}$ dérivée de $(\mu^2-1)^n$, d'où il résulte que l'équation $X_n = 0$ a ses racines réelles. On déduit aussi de cette expression que $(2n+1)X_n$ est la différence des dérivées de X_{n+1} et X_{n-1}.

On trouve aisément que Y_n est une somme de termes de la forme $\sqrt{1-\mu^2}^{\,i}\cos i(\psi - \psi_i^{(n)})\frac{d^i \mathfrak{M}_n}{d\mu^i}$, $\mathfrak{M}_n$ ne différant que par un facteur constant de X_n. Cette somme renferme $2n+1$ constantes arbitraires qui sont déterminées par la forme du corps. On en déduit l'expression de la fonction entièrement déterminée P_n, expression à laquelle on parvient aussi directement par une méthode remarquable due à Jacobi.

L'intégrale $\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} Y_n Z_m \, d\psi$, où Z_m désigne une fonction analogue à Y_n, est nulle si m n'est pas égal à n. La valeur de cette intégrale s'obtient sans peine si $m = n$ et en particulier, si $Z_m = P_n$, elle donne la formule importante

$$Y_n = \frac{2n+1}{4\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} Y_n P_n \sin\theta' \, d\theta' \, d\psi'.$$

D'autre part, on démontre que toute fonction de θ et ψ donnée arbitrairement entre les limites o et π de θ, o et 2π de ψ et finie entre ces limites peut être développée en série convergente sous la forme $Y_0 + Y_1 + Y_2 + \ldots$, chacune des fonctions Y_n étant entièrement déterminée. M. Tisserand donne la démonstration de M. Darboux. Il mentionne en note celle, non rigoureuse, de Laplace, la démonstration de Poisson, insuffisante en ce qu'elle suppose des conditions superflues, celles de Dirichlet et de Ossian Bonnet.

VI. Pour calculer le potentiel, sur un point extérieur, d'un sphéroïde peu différent d'une sphère, on le suppose décomposé en couches d'égale densité séparées par des surfaces de niveau dont l'équation dépend d'un paramètre a. La densité est fonction de a. Les couches étant à peu près sphériques, on pose $r' = a(1 + \alpha u')$ α étant très petit et u' fonction de θ', ψ' et de a.

On néglige α^2, on suppose u' développé en fonctions de Laplace $u' = U'_0 + U'_1 + \ldots$. Si a est le rayon de la sphère de même volume que celui renfermé à l'intérieur de la couche a, U'_0 est nul.

Si, d'autre part, l'origine est au centre de gravité du corps, le terme du potentiel qui dépend de U_1 disparaît, et l'on trouve

$$V = \frac{M}{r} + 4\alpha\pi \sum_{n=2}^{n=\infty} \frac{1}{(2n+1)r^{n+1}} \int_0^{a_1} \rho \frac{\partial}{\partial a}(a^{n+3} U_n)\, da.$$

Laplace applique cette formule à l'équilibre d'un sphéroïde soit fluide et limité par une surface de niveau, soit ayant intérieurement un noyau solide dont la surface peu différente d'une sphère est aussi une surface de niveau. Les points de la surface extérieure doivent satisfaire à l'équation

$$\frac{V}{M} + \frac{\varphi}{2a_1^3} r^2 \sin^2\theta = \text{const.},$$

φ étant le rapport de la force centrifuge équatoriale à l'attraction pour la surface extérieure. En remplaçant dans cette équation V par la valeur précédente, on est conduit à désigner par Y_n ce que devient U_n à la surface extérieure. On observe ensuite que toute fonction qui se déduit de $F(a)U_n$ par différentiation ou intégration relative à a est encore une fonction de Laplace de même rang, de sorte que l'équation obtenue est une somme de fonctions de

Laplace auxquelles s'ajoute $\frac{\varphi}{2a_1}(\cos^2\theta - \frac{1}{3})$, qui est une fonction Y_2, et la constante est une fonction Y_0. D'autre part, on voit tout de suite que si W_n est une fonction de Laplace, la condition $W_0 + W_1 + W_2 + \ldots = 0$ entraîne $W_n = 0$, de sorte que l'on obtient $Y_1 = 0$ et une équation déterminant chacune des fonctions $Y_2, Y_3, \ldots$. Enfin, on admet que la Terre tourne autour d'un axe principal d'inertie. Cela donne deux conditions qui, par cette remarque que $\sin\theta\cos\theta\cos\psi$ et $\sin\theta\cos\theta\sin\psi$ sont des fonctions Y_2, se simplifient et permettent de faire disparaître de Y_2 deux des cinq constantes arbitraires qui proviennent de U_2. On trouve

$$Y_2 = A_1(\cos^2\theta - \tfrac{1}{3}) + \sin^2\theta(A_2\cos 2\psi + B_2\sin 2\psi).$$

Si $Y_3, Y_4, \ldots$ sont négligeables, l'équateur est un plan de symétrie.

Le calcul de la pesanteur se fait en la confondant avec sa composante suivant le rayon vecteur. Dans le cas de la Terre, si l'on admet que la surface est un ellipsoïde de révolution, il ne subsiste que Y_2 et l'on retrouve le théorème de Clairaut.

Il reste à se préoccuper de l'équilibre de la masse intérieure. A cet effet, on calcule le potentiel du corps sur un point de sa masse en le décomposant par une surface de niveau passant par le point en une couche sphéroïdale et un noyau. On calcule le potentiel d'une couche sphéroïdale sur un point intérieur, en supposant le rayon vecteur du point moindre que tous ceux de la couche, condition qui ne peut être toujours réalisée, et l'on obtient le potentiel cherché W comme la somme de deux potentiels distincts. Ce potentiel doit satisfaire à l'équation de l'équilibre relatif

$$\frac{W}{4\pi} + \frac{\omega^2}{8\pi f} r^2 \sin^2\theta = \text{const.}$$

On a aussi

$$r = a[1 + \alpha(U_1 + U_2 + \ldots)],$$

et il faut déterminer $U_1, U_2, \ldots$. On néglige α^2 et $\alpha\omega^2$ et l'on égale à zéro les termes qui contiennent des fonctions de Laplace des ordres $1, 2, \ldots, n$. On obtient pour U_n une équation que l'on ramène à une équation différentielle linéaire du second ordre déterminant U_n en fonction de a. Posant $\rho = \rho_0(1 - A_1 a^{\alpha_1} + A_2 a^{\alpha_2} \ldots)$,

on trouve

$$U_1 = 0.$$

On admet ensuite que U_n soit développé en série suivant les puissances ascendantes de a et l'on trouve que le premier terme dépend de a^{n-2}. On montre que U_n est une fonction croissante de a et enfin que U_n est nul si $n > 2$. La détermination de U_2 est ensuite aisée et l'on obtient finalement l'expression du rayon vecteur et l'aplatissement de chaque couche dont la valeur est identique à celle de Clairaut.

La méthode de Laplace n'est pas absolument rigoureuse, les développements étant fondés sur celui de l'inverse de la distance de deux points suivant les puissances du rapport des rayons vecteurs, ce rapport n'étant pas toujours nécessairement moindre que un. Néanmoins il est possible que le développement du potentiel qui s'en déduit par intégration soit convergent dans des cas où celui de l'inverse de la distance ne le serait pas. Il en est ainsi pour le cas d'un ellipsoïde homogène, et M. Callandreau a pu démontrer que dans le cas d'un corps homogène, de révolution, ayant un équateur, si la série $\frac{M}{r} + \sum \frac{Y_n}{r^{n+1}}$ est convergente, elle représente le potentiel jusqu'à la surface du corps.

M. Tisserand termine le Chapitre XIX par l'étude de quelques questions importantes. Si le corps est de révolution et les méridiens identiques quant aux densités, on peut déduire le potentiel relatif à un point quelconque de celui qui concerne un point de l'axe ayant même rayon vecteur.

On en conclut le potentiel d'un ellipsoïde homogène pour un point quelconque et la formule s'applique à la surface même de l'ellipsoïde si $b < a\sqrt{2}$.

De là, on déduit le potentiel d'un corps de révolution formé de couches ellipsoïdales homogènes et le résultat obtenu montre que le développement converge très vite, les termes successifs étant successivement de l'ordre des puissances paires de l'excentricité. D'autre part, si le point attiré est très éloigné, le rapport de deux termes consécutifs est de l'ordre de r^{-2}, et dans les applications à l'Astronomie on peut presque toujours se borner aux deux premiers termes.

Suivent le calcul de l'énergie potentielle de deux corps célestes et

l'indication du résultat obtenu par M. Callandreau dans le cas où les deux corps sont formés de couches ellipsoïdales peu aplaties.

Enfin M. Tisserand démontre, d'après M. Poincaré, ce beau théorème de M. Stokes que le potentiel relatif à l'attraction exercée sur un point extérieur par une planète tournant d'un mouvement uniforme autour d'un axe fixe et dont la surface libre et de niveau est supposée connue ne dépend pas de la constitution interne. Il s'ensuit que, si la surface limite est une surface de niveau et est un ellipsoïde de révolution, la pesanteur à la surface suit la loi de Clairaut, quelle que soit la distribution des densités.

VII. Les Chapitres XX et XXI contiennent un résumé des résultats géodésiques. La surface des mers, abstraction faite de toute autre action que la pesanteur et la force centrifuge, est une surface de niveau. Prolongée indéfiniment par la condition d'être partout normale à la pesanteur, elle constitue le *géoïde*. On ne peut faire de mesures en aucun point de cette surface. On est réduit à les faire à la surface physique des continents et à admettre, au moins en première approximation, que la verticale en un point du continent se confond avec la verticale au point où elle rencontre le géoïde.

Les géodésiens déterminent par des arcs de méridien mesurés à diverses latitudes l'ellipsoïde de révolution qui, dans son ensemble, en diffère le moins.

Dans ces mesures on admet que les projections sur le géoïde et sur l'ellipsoïde de révolution qu'on lui substitue des divers rayons lumineux allant d'un sommet d'une triangulation à une autre, sont des lignes géodésiques. Pour la résolution des triangles on emploie le théorème de Legendre étendu par Gauss à un triangle géodésique tracé sur une surface quelconque. Les dimensions du méridien conclues de deux arcs diffèrent beaucoup suivant le choix de ces deux arcs, par suite des anomalies locales du géoïde. Il convient de conclure le méridien de l'ensemble des mesures. Clarke a déduit de quarante-quatre arcs de méridien et de six arcs de parallèle l'aplatissement $\frac{1}{293,46 \pm 1,07}$ inconciliable avec la théorie de la forme de la Terre; Bessel et Airy avaient obtenu $\frac{1}{299}$.

M. Tisserand pense qu'il n'est pas établi que les trois arcs d'une

même ellipse qui s'adaptent assez bien avec les trois réseaux anglo-français, russe et indien, une fois ramenés dans un même plan par une rotation autour de l'axe de la Terre, se trouveraient sur une même ellipse. D'autre part, les arcs dont il s'agit proviennent de mesures qui n'embrassent que le $\frac{1}{12}$ de la surface de la Terre, de sorte qu'on ne peut répondre de l'erreur probable trouvée 1,07.

La détermination du méridien d'après l'ensemble de toutes les triangulations effectuées en tous sens repose sur celle de la longitude, de la latitude et de l'azimut d'un arc géodésique d'un ellipsoïde de révolution dont on connaît la longueur et les longitude, latitude et azimut de l'autre extrémité. Ce problème a été résolu par Jacobi. M. Tisserand démontre les formules approchées données par Legendre sans s'astreindre à suivre la méthode de l'illustre géomètre. On parvient aux *coordonnées géodésiques* dont les différences avec les *coordonnées astronomiques* constituent les attractions locales qui dans la plaine de Moscou varient de $-8''$ à $+8''$. M. Helmert espère publier le Tableau des déviations de la verticale dans toute l'Europe. On pourra alors chercher à les atténuer en fondant sur elles une nouvelle détermination des dimensions du globe. Le Chapitre XX se termine par l'indication du parti qu'on peut tirer des déviations de la verticale, produites par une montagne ou par l'arrivée de la marée dans un canal, pour calculer la densité moyenne de la Terre. Ce procédé paraît inférieur à l'emploi de la balance de Cavendish.

La variation de la longueur du pendule à seconde permet aussi de déterminer la forme de la Terre; il en a été fait un assez grand nombre de mesures dans l'hémisphère sud et plusieurs dans des îles de l'Océan. On réduit ces déterminations à la surface des mers prolongées, au moyen de la formule de Bouguer établie en tenant compte de l'attraction de toutes les masses qui dépassent le niveau de la mer. La discussion de quarante-neuf déterminations par Airy montre, en général, un défaut de pesanteur sur les continents et un excès sur les îles, le nombre des oscillations du pendule variant de cinq à six par jour. Clarke a discuté cent quatre observations. Il résulte de l'examen de la question par M. Tisserand que, s'il n'est pas exact de penser que les montagnes sont venues s'ajouter avec leurs masses sur une surface de niveau ré-

gulièrement remplie, il n'est pas non plus rigoureusement vrai qu'au-dessous de chaque montagne il y ait un défaut de densité compensant rigoureusement l'excès.

Le Chapitre XXI se termine par un exposé rapide de la méthode de la condensation de M. Helmert. Se fondant sur ce que le développement du potentiel sur lequel est basée la théorie de Laplace ne peut être employé jusqu'à la surface même, M. Helmert mène une surface S′ parallèle à la surface S des mers à une distance de 21^{km} approximativement égale à la différence entre le plus grand et le plus petit rayon de S et imagine que l'on condense sur S′ la masse comprise entre S et S′. Le développement du potentiel relatif à un point de S devient légitime.

Une formule de M. Bruns permet de calculer le soulèvement ou l'abaissement produit par la condensation de chaque point de la surface terminale de niveau. C'est au plus 8^m à 10^m, de sorte qu'il n'y a pas à en tenir compte. Il en est de même du centre de gravité et des moments principaux d'inertie; seulement il y a une différence sensible dans l'action des masses condensées sur la verticale de la station. M. Helmert montre que l'on peut exclure de la condensation une couche de densité uniformément égale à 2,8, ce qui permet de ne tenir compte que de la matière en excès ou en déficit au-dessus ou au-dessous du niveau des mers. M. Tisserand donne les formules de réduction pour les îles et pour les côtes.

Désignant par l la longueur du pendule à seconde observée, par l' la longueur calculée en ayant égard à la condensation, par k et k' les longueurs correspondantes à la latitude 45°, M. Helmert montre que les valeurs de k' s'accordent mieux que celles de k et que les valeurs de k' pour les continents et les côtes sont égales; mais il subsiste pour les îles un excès de pesanteur qui cependant n'est que le tiers de ce qu'il était pour les valeurs de k. M. Faye attribue au refroidissement qui résulte de la basse température du fond des mers les excédents de matière qui se trouvent au-dessous des Océans.

Reprenant dans la méthode de la condensation la détermination de la forme de la Terre, M. Helmert trouve pour l'aplatissement

$\frac{1}{299,26 \pm 1,26}$. En se servant de deux inégalités lunaires dues à l'ellipticité de la Terre, il trouve $\frac{1}{297,8 \pm 2,2}$.

M. Tisserand conclut qu'il n'est pas certain que le nombre $\frac{1}{293}$ de Clarke, incompatible avec la fluidité de la Terre, soit préférable à $\frac{1}{297}$ et que, par suite, il n'est pas établi que la Terre soit solide comme Roche l'avait affirmé en 1881.

VIII. Les Chapitres XXII, XXIII, XXIV, XXV sont consacrés aux équations différentielles du mouvement de rotation de la Terre, XXVI à la fixité des pôles et à l'invariabilité de la vitesse de rotation, XXVII aux formules de précession et de nutation.

La Terre est assimilée à un corps solide. Les coordonnées x, y, z d'un de ses points par rapport à des axes fixes dans l'espace sont des fonctions linéaires des coordonnées x_1, y_1, z_1 du même point par rapport à des axes fixes dans l'intérieur de la Terre, et ces fonctions ne renferment pas le temps explicitement; les coefficients sont des fonctions du temps dont on a aisément les expressions au moyen des angles φ, θ, ψ d'Euler. On introduit les composantes p, q, r par rapport à Ox, Oy, Oz de la rotation instantanée; ce sont des fonctions de φ, θ, ψ et de leurs dérivées et l'on exprime au moyen de p, q, r la *force vive* et le couple résultant des quantités de mouvement. L'application des équations de Lagrange conduit sans peine aux équations d'Euler dont les seconds membres dépendent des dérivées partielles de la fonction des forces par rapport à φ, θ, ψ. Cette fonction s'exprime d'abord au moyen des moments d'inertie principaux de la Terre en son centre de gravité, de ses moments d'inertie par rapport aux droites qui joignent ce centre de gravité à ceux du Soleil et de la Lune, des longueurs ρ, ρ' de ces droites et des masses du Soleil et de la Lune. On obtient pour les seconds membres des équations d'Euler des formes très simples ayant ρ^5 et ρ'^5 en dénominateur. On introduit des variables canoniques $\frac{\partial T}{\partial \varphi}$, $\frac{\partial T}{\partial \theta}$, $\frac{\partial T}{\partial \psi}$, et l'on a un système d'équations canoniques dont les seconds membres sont les dérivées partielles de $\Omega = T - U$. Le rapport de U à T étant moindre que $\frac{1}{4000000}$, on peut en première approximation faire $U = 0$, ce qui donne les équations du mouvement non troublé,

c'est-à-dire d'un corps solide tournant autour d'un point fixe quand il n'y a pas de forces extérieures.

M. Tisserand effectue l'intégration par la méthode élémentaire, en remplaçant φ, θ, ψ par des quantités analogues φ_0, θ_0, ψ_0 rapportées au plan invariable; il mentionne le Mémoire de Jacobi obtenant au moyen des fonctions Θ les neuf cosinus des angles des axes mobiles avec les axes fixes, la démonstration des mêmes formules, obtenue par M. Hermite au moyen de l'équation de Lamé et la représentation géométrique du mouvement due à Poinsot, puis il expose la marche suivie par M. Radau pour l'intégration par la méthode de Hamilton-Jacobi.

Le carré du module des fonctions elliptiques introduites est le produit d'un facteur σ dépendant de $C - A$ par $\frac{B - A}{C}$. La grandeur du premier facteur est liée à celle des variations de latitude, d'où l'on conclut qu'il est moindre que $\frac{2}{10^9}$ et les observations du pendule montrent que $\frac{B - A}{C}$ est bien moindre que $\frac{1}{300}$. Cette petitesse du module permet de remplacer les expressions rigoureuses de p, q, r, φ_0, θ_0, ψ_0 par leurs termes principaux et l'on obtient sans peine les expressions suffisamment approchées de φ, θ, ψ.

On passe au mouvement troublé par la méthode de la variation des constantes arbitraires qui conserve les mêmes formules pour les deux mouvements troublé ou non troublé. Pour éviter que par le calcul des dérivées partielles de U le temps ne s'introduise en dehors des signes sinus ou cosinus, on fait un changement de variable analogue au changement bien connu du moyen mouvement dans la théorie des mouvements de translation. Dans le calcul des équations définitives on utilise une relation simple dont Serret a démontré l'exactitude si loin que l'on pousse les développements suivant les puissances de σ^2.

La fonction perturbatrice se compose de deux parties dont l'une a en facteur $\frac{2C - A - B}{C}$, l'autre $\frac{B - A}{C}$, quantités très petites; on en obtient aisément le développement en série limité aux termes du second ordre par rapport aux excentricités des orbites du Soleil et de la Lune, les coefficients dépendant aussi de l'incli-

naison de l'écliptique sur un écliptique fixe, de l'inclinaison de l'orbite de la Lune et de l'équateur sur l'écliptique; on s'en tient au même ordre de grandeur numérique : il faut pour cela conserver les termes du quatrième ordre par rapport à ce dernier angle.

La quantité σ^2 d'où dépend l'angle formé par l'axe instantané de rotation avec l'axe d'inertie se décompose en 2 parties f_1^2 et $f_1'^2$, dont les variations réduites d'ailleurs à leurs parties principales se montrent extrêmement petites. Le déplacement du pôle P de rotation autour du pôle C d'inertie peut être représenté par un mouvement en un jour sur un cercle ayant au maximum $0^m,60$ de rayon, dont le centre décrit en trois cent cinq jours un autre cercle ayant le point C pour centre et au plus 15^m de rayon. L'angle formé par l'équateur avec le plan du couple résultant n'a que des inégalités dont l'ensemble ne peut dépasser $0'',019$. L'élément σ n'a pas d'inégalité séculaire. M. Tisserand a montré dans les *Comptes rendus* qu'en réduisant U à sa partie non périodique et supposant $A = B$, on peut intégrer rigoureusement les équations du mouvement de la Terre. La vitesse angulaire de rotation peut être regardée comme constante; l'intégrale $\int \omega\, dt$ peut être regardée comme étant de la forme $\alpha + \beta t$ et le jour sidéral est constant. Cette conclusion subsiste en deuxième approximation. L'introduction seule de causes perturbatrices autres que les attractions du Soleil et de la Lune sur le globe regardé comme solide peut la modifier, par exemple le frottement des marées.

Pour la suite de l'intégration, on confond l'axe du couple résultant, l'axe principal d'inertie et l'axe de rotation, et les angles ψ et θ déterminent l'équateur de l'époque t par rapport au plan fixe de coordonnées. L'intégration par approximation, abstraction faite des termes périodiques, donne aisément

$$\psi = \text{const.} + at + bt^2, \qquad \theta = \text{const.} + ct^2,$$

les termes en t^3 sont négligeables dans *la pratique actuelle* de l'Astronomie. En remplaçant dans les termes périodiques ψ par at et θ par une valeur θ_1 très voisine de la valeur initiale de θ, et regardant comme uniforme le mouvement du nœud de la Lune, on trouve aisément les termes Ψ et Θ qui complètent les valeurs précédentes ψ_m et θ_m de ψ et θ.

En les supprimant on définit l'équateur et l'équinoxe moyen. L'arc ψ_m, où l'on suppose nulle la constante, est la précession luni-solaire. La représentation géométrique de la précession et de la nutation est bien connue.

On déduit immédiatement de ce qui précède la position de l'équateur par rapport à l'écliptique mobile; on définit à cette occasion la précession générale ψ''_m, l'obliquité moyenne θ''_m et l'obliquité vraie. Ayant $\psi'' = Pt + P't^2$, P est la constante de la précession égale, d'après Bessel, à 50″,23572.

Si ☊′ est la longitude du nœud moyen de la Lune comptée sur l'écliptique mobile à partir de l'équinoxe moyen, le terme principal de Θ est de la forme $N \cos ☊'$. N est la constante de la nutation trouvée par Péters égale à 9″,223.

Adams a montré que, si l'on envisage des intervalles de temps considérables, ψ_m se compose d'un terme proportionnel au temps suivi de termes à longue période et θ_m d'une constante suivie aussi de termes à longue période.

M. Tisserand fait suivre cette indication d'une courte notice historique.

IX. Les lois précises de la libration de la Lune ont été découvertes par Dominique Cassini, publiées en 1721 par son fils dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences* et vérifiées par Tobie Mayer dont les observations, faites en 1748-49, sont discutées dans son Traité *sur la rotation de la Lune et le mouvement apparent des taches* (Nuremberg, 1750).

Après en avoir donné l'énoncé et les conséquences relativement aux plans de l'écliptique, de l'orbite et de l'équateur de la Lune, M. Tisserand en expose la théorie en prenant pour point de départ les équations d'Euler utilisées pour l'étude du mouvement de la Terre. L'action du Soleil est à peu près insensible et il n'y a à tenir compte que de celle de la Terre dont la masse est supposée réunie en son centre de gravité. L'angle θ étant petit (1°35′), on néglige θ^2. L'axe de rotation étant à peu près fixe à la surface de la Lune, $\frac{p}{r}$ et $\frac{q}{r}$ sont très petits, et l'on néglige dans la troisième équation d'Euler le terme $(B - A)pq$. On définit le premier méridien lunaire qui coupe le plan des axes A et B d'inertie en un

point G dont la distance η à l'axe A est constante d'après les lois de la libration. Les variations de η sont au moins fort petites.

L'équation différentielle du second ordre qui donne η a été intégrée par Gyldén en regardant le mouvement de la Lune autour de la Terre comme circulaire.

On exprime η en fonction du temps par une amplitude elliptique dont le module doit être très grand, d'où il suit que l'axe d'inertie A fait un petit angle avec la direction moyenne de la Terre. En tenant compte de l'excentricité et des inégalités du mouvement elliptique sous la forme $V = c + mt + \Sigma H \sin(ht + h')$, on obtient une équation linéaire du second ordre, à coefficients constants, à second membre, dont l'intégration est immédiate. A cause de la présence du facteur $\frac{B - A}{C}$ les termes provenant des diverses inégalités sont insensibles, sauf ceux qui proviennent de l'équation du centre et de l'équation annuelle. L'oscillation de la valeur de η (libration réelle) renferme trois termes dont deux sont sensiblement $-133'' \sin \odot + 22'' \sin \mathbb{C} + Q \sin(0,03\,mt + F)$. Le dernier terme (libration arbitraire) a une période de $2^{\text{ans}},32$, son coefficient est fort petit.

Néanmoins ce terme, dont le coefficient est une constante arbitraire d'intégration, suffit à expliquer comment la Lune nous montre toujours la même face sans admettre qu'à l'origine la chose ait eu lieu en toute rigueur.

M. Tisserand intègre les deux premières équations d'Euler en posant avec Lagrange $\sin\theta \sin\varphi = s$, $\sin\theta \cos\varphi = s'$. Il simplifie les équations différentielles en s et s' en conservant tous les termes du premier et du second ordre par rapport à θ, à l'excentricité de l'orbite lunaire, à l'inclinaison sur l'écliptique de l'orbite apparente de la Terre vue de la Lune. En remplaçant dans des termes du second ordre θ et φ par des valeurs approchées, on arrive à deux équations différentielles du second ordre à coefficients constants, à seconds membres. La discussion des valeurs de s et s' obtenues en négligeant aux seconds membres les termes du second ordre montre que les deux lois de Cassini relatives à la constance de θ et à la coïncidence des nœuds résultent l'une de l'autre.

M. Tisserand tient compte ensuite des termes du second ordre négligés et retrouve ainsi les formules complètes établies pour la

première fois par M. Ch. Simon. Il montre avec la plus parfaite simplicité les raisons pour lesquelles certains termes avaient échappé à l'attention de Lagrange, Laplace et Poisson. Ce beau Chapitre se termine par la mise en nombres qui conduit à des développements en série de φ, θ, ψ, développements qui montrent que les lois de Cassini ne sont pas absolument rigoureuses.

Il résulte des valeurs trouvées que la valeur de $\frac{C-A}{B}$ est seize fois plus forte que celle que donne la théorie de la figure de la Lune. La Lune en se solidifiant s'est déformée; la masse et l'aplatissement étant fort petits, la présence des hautes montagnes suffit peut-être à expliquer cet écart.

X. La précision des mesures géodésiques et astronomiques ne permet plus d'admettre avec Laplace et Poisson que le mouvement de la Terre est rigoureusement le même que si elle était solide, qu'elle tournât à fort peu près autour d'un de ses axes d'inertie, les deux autres étant sensiblement égaux. Dès 1839, Hopkins dans ses *Researches in Physical Geology* étudie le mouvement de la Terre supposée formée d'une croûte solide et d'un noyau liquide homogène ou hétérogène, en négligeant le frottement. Hennessy en 1851, Plana en 1853, Barnard en 1874, ont discuté le Mémoire de Hopkins à divers points de vue. Sir W. Thomson en 1863, dans son Mémoire *On the rigidity of the Earth,* affirme qu'aucune masse liquide continue ayant environ 9600^{km} de diamètre ne peut exister à l'intérieur de la Terre sans modifier certains phénomènes. En particulier, la flexibilité nécessaire de la croûte solide diminuerait notablement le phénomène des marées, et ceux de la précession et de la nutation. Delaunay a combattu cette dernière conclusion abandonnée depuis par Sir W. Thomson. G.-H. Darwin a combattu l'hypothèse d'une écorce même en se fondant sur la résistance des matériaux. Depuis, divers géologues ont admis un noyau solide séparé de la croûte superficielle par une couche pâteuse; certains physiciens supposent que l'intérieur de la Terre pourrait être gazeux.

Il est incontestable qu'il y a un reste de mobilité de la croûte solide et Gyldén, Darwin, Schiaparelli se sont placés à ce point de vue.

L'effet du déplacement d'une masse importante μ sur le centre de gravité demeurera insensible. Les modifications de la direction des axes principaux d'inertie sont de l'ordre de μ et celles de leurs longueurs de l'ordre de μ^2 ; si cependant la différence A — B est très petite, les modifications de A et de B sont de l'ordre de μ. On calcule aisément la déviation de l'axe polaire. L'auteur fait application des résultats aux divers déplacements de masse qui se produisent sous nos yeux.

L'observation a révélé en divers lieux des variations de la latitude, ou mieux de la hauteur du pôle céleste au-dessus de l'horizon, tenant à un déplacement de l'axe instantané de rotation qui ne coïncide pas rigoureusement avec l'axe d'inertie. Il est aisé de déduire du mouvement des axes principaux celui de l'axe de rotation. La nutation luni-solaire rapportée primitivement à l'axe d'inertie OC n'en est modifiée que de quantités insensibles. Le phénomène de la nutation diurne signalé par Euler, dont la période est un peu plus courte que le jour sidéral, est tout à fait insensible pour l'axe instantané OI et se réduit au mouvement de l'axe principal OC autour de OI. La différence de cinq minutes produit à la longue, en une période de dix mois environ, dite cycle eulérien, un déplacement du pôle I à la surface du globe; déplacement que l'on n'a d'ailleurs pas réussi à mettre en évidence par les variations de latitudes, pas plus qu'une variation semi-diurne produite dans la nutation par la différence B — A des moments principaux équatoriaux d'inertie.

La théorie du mouvement de rotation d'un système de forme variable est due à Lagrange. On en obtient les équations en écrivant les équations du principe des aires qui ont lieu dans le mouvement d'un corps variable autour de son centre de gravité. Elles conduisent à des équations entre les coordonnées $x_1 y_1 z_1$ d'un point relatives à des axes mobiles et les rotations p, q, r de ces axes mobiles autour des droites fixes qui marquent leurs positions instantanées.

Si le système est rigide, on suppose naturellement les axes x_1 $y_1 z_1$ fixes dans le corps. Si le système est variable, on n'a guère d'indications générales. Il n'est pas sans inconvénient de les faire coïncider avec les axes principaux; M. Gyldén les choisit de façon à annuler les moments des quantités de mouvement relatif, ce qui

ne détermine que leur rotation, mais pas leur position instantanée. Ces conditions étaient satisfaites dans le Mémoire de Liouville de 1857, où les axes x, y, z étaient les axes principaux d'inertie parce que Liouville supposait le corps constamment symétrique par rapport à ses plans principaux. Le Chapitre XXX contient une exposition du Mémoire de Gyldén et de deux autres Mémoires du même auteur sur *la rotation d'un corps solide dont la surface est recouverte par une masse liquide*. Gyldén trouve que par suite des érosions produites par le travail des eaux la différence C — A, si elle était d'abord petite, doit augmenter et que le pôle de rotation doit décrire autour du pôle d'inertie une spirale qui l'en rapproche. M. Tisserand reproduit sommairement les recherches de Darwin, de Sir W. Thomson, qui montrent en particulier que le changement séculaire de l'obliquité est très petit; il montre d'après Helmert que la marée ne peut modifier la position du pôle que d'une quantité insensible, s'occupe de la possibilité d'un ralentissement de la rotation de la Terre produite par le frottement des marées et de son influence sur l'accélération séculaire de la Lune et enfin des variations de la verticale produites par les actions du Soleil et de la Lune, recherches théoriques qui, toutes, sont développées au delà de la limite de la précision des observations. B. B.

FORSYTH (R.). — THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE. 1 vol. gr. in-8°; XXII-682 p.

« C'est dans la théorie des fonctions que la Science mathématique a fait, depuis une quarantaine d'années, les plus remarquables progrès. »

Je ne sais si le jugement que M. Forsyth émet ainsi au début de la préface de son Livre ne demanderait pas quelques réserves; mais on ne saurait contester la faveur dont cette théorie des fonctions, depuis de longues années, jouit auprès des mathématiciens; elle a été leur déesse : elle a eu des prêtres illustres qui se sont consacrés à elle tout entiers, des dévots innombrables et des sacri-

ficateurs d'occasion; elle a vu ses domaines s'accroître d'une façon prodigieuse et inattendue; elle a projeté sa lumière dans des régions où l'on ne soupçonnait pas qu'il existât quelque chose; elle a renouvelé les principes de sa propre religion : cette religion a été si scrupuleusement purifiée, elle a été constituée d'une façon si indépendante que quelques-uns de ses adeptes en arrivent à se demander pourquoi on la ferait servir à autre chose qu'elle-même, pourquoi on l'appliquerait à ce monde des réalités grossières à qui elle n'emprunte rien, avec qui elle n'a rien à faire. Peut-être y a-t-il là un danger, et convient-il de revenir à ces problèmes réels, qui pendant longtemps ont été la préoccupation principale des géomètres, qui ont provoqué les plus belles recherches théoriques, et qui semblent la meilleure pierre de touche pour juger de la valeur des théories abstraites. On peut croire d'ailleurs qu'il y a un mouvement de réaction dans ce sens et comme un retour vers la *Philosophie naturelle,* pour employer la belle expression des compatriotes de M. Forsyth, qui d'ailleurs ne l'ont jamais négligée.

S'il en est ainsi, et si l'on peut espérer que les richesses accumulées dans la théorie des fonctions trouveront là leur emploi, il est temps d'en faire l'inventaire, et d'en faciliter l'acquisition à tous. Ceux même qui ne goûtent que ce genre de richesse et qui ne songent qu'à l'accroître ne pourront s'en plaindre. Il semble donc que le Livre de M. Forsyth vienne à son heure et qu'il soit destiné à rendre des services durables.

Il va sans dire que ce Livre ne peut être complet, mais il touche à tous les sujets essentiels. Il a été fait avec un grand soin. L'auteur a voulu se placer successivement aux divers points de vue, de manière à bien montrer au lecteur ce que l'on découvre de chacun d'eux. Celui-ci, après avoir suivi M. Forsyth partout, aura de la Science une idée d'ensemble. Les renvois bibliographiques abondent, de façon à permettre à chacun de compléter ses connaissances. L'auteur a fait grande attention à bien définir les termes techniques et à donner les principaux équivalents dans les diverses langues : il a même pris la précaution de réunir ces termes techniques dans un *glossaire,* avec l'indication des pages où se trouvent les définitions. Une table des matières bien détaillée, une liste des auteurs cités avec les renvois aux pages correspon-

dantes, terminent le Volume. Il convient de signaler encore, dans le même ordre d'idées, les nombreux exemples que M. Forsyth a placés çà et là dans le texte, exemples dont les uns ont été imaginés par l'auteur, dont les autres ont été tirés de Mémoires divers, ou même ont été l'objet de questions d'examen. Cette façon de faire, qui est habituelle dans les livres d'enseignement anglais, est excellente.

L'Ouvrage peut être divisé en cinq Parties : nous allons passer rapidement en revue les matières qu'elles contiennent.

Théorie des fonctions uniformes (p. 1-148, Chap. I-VII. — Un Chapitre d'*introduction* générale contient les définitions essentielles, la notion de fonction d'une variable complexe (admettant *une* dérivée), les équations aux dérivées partielles fondamentales, l'explication des termes *monogène, uniforme, multiforme, branche, point d'embranchement, holomorphe, zéro, pôle, méromorphe,* etc. L'auteur passe ensuite aux intégrales prises entre des limites imaginaires : le théorème fondamental de Cauchy est démontré par la méthode de Riemann ; il en développe les conséquences immédiates, et l'applique au calcul de quelques intégrales définies, puis aux développements en séries (série de Taylor, théorème de Laurent). Il donne la définition des singularités polaires et essentielles, et l'idée de la continuation (ou prolongement) d'une fonction. Le théorème sur la *continuation par symétrie,* dont M. Schwarz a su tirer tant de parti, sert d'exemple. Les propositions élémentaires qui permettent de reconnaître qu'une fonction est entière ou rationnelle, d'après ses singularités, sont des conséquences immédiates des théorèmes fondamentaux sur le développement en série. La construction d'une fonction transcendante entière dont les zéros sont donnés (Weierstrass), l'application aux fonctions $\sin z$, σz, la notion de genre (Laguerre), quelques détails sur les diverses façons dont on peut représenter une fonction uniforme admettant un nombre fini de singularités essentielles, un résumé des recherches de M. Mittag-Leffler sur la construction de fonctions uniformes avec une infinité de singularités essentielles prescrites à l'avance, diverses propositions relatives à la nature des fonctions définies par des séries de fonctions, aux espaces lacunaires, enfin des indications (d'après M. Mittag-

Leffler et M. Guichard) sur la classification des singularités, sont l'objet des trois derniers Chapitres de cette première Partie.

Théorie des fonctions multiformes et des fonctions uniformes périodiques (p. 149-311, Chap. VIII-XIII). — Après avoir donné quelques exemples de fonctions multiformes, M. Forsyth étudie en particulier les fonctions algébriques autour de leurs points d'embranchement (méthode de Puiseux, systèmes cycliques, rôle des points doubles); une première étude des intégrales des fonctions algébriques est faite dans le sens de Cauchy : l'auteur s'arrête quelque temps sur les intégrales de fonctions uniformes et développe en particulier quelques-uns des résultats obtenus par M. Hermite sur les intégrales de la forme

$$\int_{t_0}^{t} \frac{F(t_1 z)}{G(t_1 z)} dt_1.$$

Il traite ensuite des intégrales elliptiques, de manière à mettre en évidence les périodes; il consacre un Chapitre aux propositions générales concernant les fonctions doublement périodiques, un autre aux fonctions σu, ξu, $\wp u$ de M. Weierstrass, pour lesquelles il donne même les équations aux dérivées partielles; il s'occupe des fonctions doublement périodiques de seconde et de troisième espèce, et en particulier du rôle des fonctions de seconde espèce dans l'intégration des équations linéaires à coefficients doublement périodiques (équation de Lamé).

Enfin, dans un Chapitre spécial, il détermine la nature des fonctions qui admettent un théorème algébrique d'addition.

Méthode de Riemann (p. 312-490, Chap. XIV-XVIII. — Jusque-là c'est le point de vue de Cauchy qui domine, et l'exposition ne diffère pas au fond de celle qui a été adoptée dans la plupart des Ouvrages classiques publiés en France sur ce sujet (Briot et Bouquet, Jordan, Hermite, etc.). Si M. Forsyth introduit en particulier les importants résultats que l'on doit à M. Weierstrass, il ne s'est nullement astreint à rester dans le cadre rigide où se complaît l'illustre géomètre. Les idées de Riemann vont maintenant être développées avec détail. Dans les deux premiers Chapitres sont développés, d'une part, les théorèmes

généraux relatifs aux surfaces plusieurs fois connexes, aux systèmes de coupures nécessaires pour les rendre simplement connexes, à la nature des circuits qu'on peut tracer sur elles, d'autre part, la construction des surfaces de Riemann, qui est exposée avec grand soin, avec des figures ingénieusement disposées, les propriétés essentielles de ces surfaces, relatives à leur nombre de feuillets, à leur ramification, à leur degré de connexion, la forme *canonique* qu'on peut leur assigner quand les points d'embranchement sont tous simples; enfin la façon dont une surface de Riemann permet d'envisager une fonction algébrique d'une variable comme une fonction uniforme d'un point de cette surface. Regardant ensuite l'équation entière qui définit une telle fonction algébrique comme donnée et supposant construire la surface de Riemann qui lui est associée, M. Forsyth étudie les intégrales sur les lignes tracées sur la surface, expose la théorie des modules de périodicité, montre le rôle des valeurs de la variable qui rendent l'intégrale infinie et développe la distinction entre les trois espèces d'intégrales. Pour aller plus loin, et même pour compléter les démonstrations antérieures, il est nécessaire d'établir, pour une surface de Riemann donnée, l'existence d'une fonction uniforme, continue, sauf le long des coupures qui réduisent la surface à être simplement connexe, et qui admette pour ces coupures des modules de périodicité dont les parties réelles soient arbitrairement données, problème dont Riemann avait fondé la solution sur le principe de Dirichlet. M. Forsyth le traite en suivant surtout la méthode que l'on doit à M. Schwarz. Dès lors, l'étude des trois espèces de fonctions sur une surface de Riemann, de leurs modules, de leurs formes normales, le problème de l'inversion pour les fonctions de première espèce, peuvent être abordés sans difficulté. Le lecteur se trouve ainsi en possession des bases de la théorie des fonctions abéliennes. Signalons encore dans le même Chapitre la démonstration du théorème de Riemann-Roch, la construction de l'équation fondamentale relative à une surface de Riemann donnée, puis l'étude des fonctions à multiplicateurs (Appell), généralisation des fonctions doublement périodiques de seconde espèce, enfin l'étude, au point de vue des solutions uniformes, des équations de la forme

$$f\left(w, \frac{dw}{dz}\right) = 0.$$

Représentation conforme (p. 491-581, Chap, XIX-XX). — Le premier des deux Chapitres consacrés à la représentation conforme est de nature très élémentaire; M. Forsyth conseille avec raison au lecteur de l'étudier après les cinq premiers Chapitres de son Ouvrage. Après avoir posé, comme Gauss le fait, le problème de la représentation conforme de deux surfaces, il étudie le problème de la carte pour les surfaces de révolution et, en particulier, pour la sphère, puis il développe une suite d'exemples intéressants de représentations conformes en se donnant la fonction qui définit cette représentation : il insiste naturellement sur les transformations linéaires, en vue des derniers Chapitres de son Ouvrage. Le problème de la représentation conforme sur un cercle d'une aire plane limitée par un contour simple donné, de façon que le centre du cercle corresponde à un point donné de l'aire, fait l'objet du second Chapitre : la solution est fondée sur le *théorème de l'existence* développé antérieurement à propos des surfaces de Riemann. L'auteur expose ensuite les méthodes données par M. Beltrami et M. Cayley pour réaliser cette solution et traite plusieurs exemples : polygone convexe, triangle et quadrilatère, courbe convexe considérée comme cas limite d'un polygone convexe, figure convexe limitée par des arcs de cercle (équation hypergéométrique), cas particuliers du croissant et du triangle; relation avec la théorie des polyèdres réguliers, etc.).

Fonctions fuchsiennes (p. 619-658, Chap. XXI-XXIII). — Dans cette dernière Partie, M. Forsyth initie le lecteur aux éléments de la théorie dont on doit les principaux développements à M. Poincaré. Un Chapitre est consacré à l'étude des groupes discontinus formés par des substitutions linéaires et en particulier aux groupes fuchsien et kleinéen, ainsi qu'aux décompositions correspondantes du plan. L'autre Chapitre est consacré aux fonctions qui se reproduisent par les substitutions d'un groupe, fonctions qu'il propose d'appeler *automorphes*. Il étudie d'abord les groupes relatifs aux substitutions linéaires qui permettent de passer d'un point regardé comme la perspective stéréographique d'un point d'une sphère à la perspective du même point de la sphère après une rotation autour d'un diamètre; ces groupes sont liés aux polyèdres réguliers. Les fonctions modulaires fournissent ensuite un exemple de fonctions automorphes se reproduisant

pour un groupe de substitutions en nombre infini. Enfin M. Forsyth enseigne à construire ces séries convergentes que M. Poincaré a appelées *fonctions thêtafuchsiennes*, et à en déduire les fonctions fuchsiennes; il termine en donnant quelques indications sur le rôle de ces fonctions dans la théorie des équations différentielles linéaires.

REVUE SEMESTRIELLE DES PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES rédigées sous les auspices de la Société mathématique d'Amsterdam, par *P.-H. Schoute, J. Korteweg, W. Kapteyn, J.-C. Kluyver, P. Zeeman,* avec la collaboration de MM. van Aller, de Boer, Cardinaal, Coelingh, Escher, Mantel, Molenbroek, van Mourik, Paraira, Rahusen, Schouten, Tesch, Versluys, de Vries et de Mlle Wijthoff. Tome I, Ire Partie. 1 vol. in-8°, 104 p. Amsterdam, Versluys; 1893.

Nous avons le devoir d'adresser nos meilleurs souhaits à cette nouvelle publication, qu'entreprend la *Société mathématique d'Amsterdam* : elle a pour but de faire connaître, *sans délai,* le titre et le contenu principal des Mémoires de Mathématiques publiés dans les principaux journaux scientifiques (1) : elle répond ainsi à un besoin incontestable; les analyses un peu détaillées, comme celles que nous essayons de faire ici, deviennent naturellement impossibles dans ces conditions ; mais dans un temps où la production scientifique est si considérable, où elle se manifeste dans un si grand nombre de journaux, les travailleurs peuvent désirer d'être informés rapidement, de connaître au moins par le titre ou une analyse sommaire les Mémoires publiés sur les sujets qui les préoccupent afin de pouvoir recourir à ces Mémoires, s'épargner des efforts inutiles, éviter enfin des réclamations de priorité. Ces informations, ils les trouveront d'une façon commode, dans la *Revue semestrielle.* Plusieurs de ceux qui sont à la tête de cette publication ont été d'excellents collaborateurs pour le *Bulletin;*

---

(1) Les titres des Mémoires sont précédés d'indications qui correspondent au système de classification adopté par la *Commission permanente du Répertoire bibliographique.*

nous osons espérer qu'ils nous continueront leur concours, d'autant que les deux publications, qui ont un terrain commun, ne poursuivent pas le même but: l'une complétera ce qui peut manquer à l'autre. Encore une fois, nous souhaitons bon succès à nos confrères, dans l'œuvre très utile qu'ils ont entreprise.

J. T.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

J. TANNERY et J. MOLK. — ÉLÉMENTS DE LA THÉORIE DES FONCTIONS ELLIPTIQUES. Tome I : *Introduction. Calcul différentiel* (Ire Partie). 1 vol. in-8°; x-246 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893.

Dans la Préface de son *Traité des fonctions elliptiques*, Halphen déplore que les mathématiciens soient encore les seuls à savoir se servir de ces fonctions, bien qu'elles soient enseignées partout. Les fonctions elliptiques, dit-il, semblent traverser une période de transition; et, dans l'espoir de hâter la fin de cette période, il avait entrepris son œuvre si malheureusement interrompue.

Le livre de MM. Tannery et Molk est un nouveau pas fait dans la même voie, et il faut donc tout d'abord féliciter les auteurs d'avoir, selon leur expression, osé l'écrire. En le prenant pour guide, on se familiarisera rapidement avec cette belle théorie des fonctions elliptiques, dont l'étude semble avoir été jusqu'ici le privilège de quelques géomètres particulièrement éminents; on se rendra un compte exact de l'importance théorique et pratique de ces fonctions, et, en même temps, l'on acquerra toutes les connaissances nécessaires pour traiter complètement et discuter dans tous les détails les problèmes si fréquents dont la solution exige leur emploi.

MM. Tannery et Molk ont écrit leur livre pour les étudiants de nos Facultés : il doit se raccorder avec leur enseignement et restera élémentaire. Toutefois, rien de ce qui est essentiel n'y sera laissé de côté, et, après l'avoir lu, on se trouvera entièrement préparé pour aborder avec fruit l'étude des Mémoires originaux, et pénétrer ainsi jusqu'au fond des questions plus difficiles qui n'auront pu qu'être sommairement indiquées : c'est dire que les étudiants ne seront pas les seuls à profiter de cette lecture. D'ailleurs on trouvera réunies dans ce livre (le nom des auteurs nous en était à l'avance un sûr garant) toutes les qualités qui font la perfection d'un ouvrage didactique : il faut admirer en particulier la rigueur absolue des démonstrations, dont l'élégance n'est cependant pas

diminuée; le soin avec lequel les points les plus délicats sont signalés à l'attention, en même temps que complètement élucidés; et surtout l'enchaînement des idées, qui n'a rien d'artificiel, et est partout celui-là même que la logique impose.

Les méthodes qui s'offrent comme point de départ d'une théorie des fonctions elliptiques sont nombreuses, et il ne faut pas s'étonner de cette multiplicité qui tient certainement à la nature même de ces fonctions et à leurs propriétés si diverses. Parmi toutes ces méthodes, aucune ne doit être reconnue comme supérieure aux autres d'une façon absolue : pour s'en convaincre, il suffit de se rappeler qu'on est amené aux fonctions elliptiques aussi bien par les spéculations purement théoriques de l'Analyse et de la Théorie des nombres que par les applications les plus simples du Calcul intégral, de la Géométrie, de la Mécanique et de la Physique; et, en effet, comme l'a dit si justement M. Hermite, rappelant précisément que la série $\Theta(x)$ de Jacobi se trouve déjà dans les recherches de Fourier sur la théorie de la chaleur, les travaux des géomètres dans différentes directions sont si étroitement liés qu'ils se rencontrent, malgré la diversité de leurs buts, dans les mêmes théories analytiques.

La voie suivie par M. Weierstrass est celle qu'ont adoptée MM. Tannery et Molk : elle est tout à fait logique et naturelle dès que l'on envisage la double périodicité des fonctions elliptiques comme leur propriété capitale; elle est en même temps simple et facile.

Les notations employées par MM. Tannery et Molk sont aussi celles de M. Weierstrass, sauf quelques modifications qui seront signalées. Toutefois, les auteurs nous annoncent qu'ils laisseront une place considérable aux fonctions et notations de Jacobi, qui permettent mieux la séparation des périodes. En fait, la multiplicité des notations, comme celle des méthodes dont je parlais plus haut, est dans la nature des choses, et, si elle semble d'abord être une gêne et un ennui, en réalité, on doit la considérer comme une richesse. C'est l'opinion qu'expriment les auteurs dans leur Préface, et je crois qu'il faut partager complètement cette manière de voir.

L'ouvrage de MM. Tannery et Molk comprendra quatre volumes; le premier, dont je vais essayer de rendre compte, contient

une Introduction et la première partie du Calcul différentiel, c'est-à-dire l'exposition des propriétés essentielles de la fonction σu, et de celles qui en dérivent.

La théorie des fonctions elliptiques est, en se plaçant au même point de vue que les auteurs, un Chapitre particulier de la théorie des fonctions d'une variable imaginaire. Celle-ci comprend d'ailleurs deux séries de propositions bien distinctes; les unes, fondées sur la considération des intégrales prises entre des limites imaginaires, sont entrées depuis longtemps dans l'enseignement; les autres, auxquelles on est amené principalement par la considération des séries ordonnées suivant les puissances entières de la variable, sont moins bien connues, surtout au point de vue théorique : leur démonstration rigoureuse présente en effet des difficultés spéciales, qu'on est trop souvent tenté de résoudre par à peu près. Aussi MM. Tannery et Molk ont-ils mis en tête de leur ouvrage une Introduction dans laquelle ils exposent les propositions fondamentales de la théorie des séries et produits infinis, ainsi que les résultats essentiels obtenus dans la théorie des fonctions par M. Weierstrass et M. Mittag-Leffler. C'est un véritable service rendu par les auteurs, que de nous offrir ainsi un guide sûr dans ces théories si délicates, et de nous donner d'une façon tout à fait rigoureuse la démonstration de propriétés qui sont, à la vérité, d'un usage courant, mais auxquelles on ne réfléchit pas toujours comme il conviendrait.

Cette Introduction, que je résumerai très sommairement, contient trois Chapitres. Dans le premier, intitulé : *Des séries et produits infinis à termes constants,* MM. Tannery et Molk donnent d'abord la définition des séries et produits infinis absolument convergents, à simple ou double entrée, et plus généralement à entrée p^{uple}; puis ils montrent que ces séries et ces produits infinis jouissent de toutes les propriétés essentielles des sommes d'un nombre limité de termes et des produits d'un nombre limité de facteurs. Comme application, ils considèrent la série à double entrée $\sum \frac{1}{(\alpha A + \beta B)^n}$, qui joue un rôle si important dans la théorie des fonctions elliptiques : si A et B désignent deux nombres dont le rapport ne soit pas réel, et si la sommation est étendue à toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles de α et β (la

combinaison $\alpha = 0$, $\beta = 0$ exclue), cette série est absolument convergente si n est un entier égal ou supérieur à trois.

Le second Chapitre est consacré à l'étude des séries et produits infinis dont les termes dépendent d'une variable. Les auteurs définissent d'abord les séries uniformément convergentes et démontrent les théorèmes fondamentaux relatifs à ces séries; abordant ensuite l'étude particulière des séries entières, ils prouvent que ces séries, comme aussi les séries de séries entières, peuvent être traitées comme des polynômes entiers sous des conditions énoncées d'une façon précise. Puis, dans un paragraphe dont je recommanderai spécialement la lecture, ils montrent comment, en introduisant la notion de la continuation des fonctions, on peut sortir du cercle de convergence dans lequel sont enfermées les fonctions auxquelles on est conduit par la considération des séries entières; ils insistent sur les précautions à prendre dans l'application de cette théorie délicate, et en particulier sur la notion de coupure, qui s'introduit d'elle-même. Un exemple termine le Chapitre et met en lumière l'importance du procédé de continuation des fonctions : c'est la démonstration du théorème fondamental relatif à l'existence des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène.

Le troisième Chapitre contient la démonstration des théorèmes si importants et tout à fait généraux de M. Weierstrass et de M. Mittag-Leffler. Le théorème de M. Weierstrass permet de trouver l'expression la plus générale d'une fonction transcendante entière dont on donne les zéros, et par suite aussi des fonctions univoques dans tout le plan qui n'ont pas d'autres singularités que des pôles à distance finie, et dont on donne les zéros et les pôles, puisqu'une telle fonction est le quotient de deux fonctions entières. Quant au théorème de M. Mittag-Leffler, il a pour objet de trouver l'expression la plus générale d'une fonction univoque dans tout le plan, et présentant en des points donnés des discontinuités polaires ou essentielles prescrites à l'avance.

La première partie du Calcul différentiel, qui forme avec l'Introduction la matière du Volume, contient deux Chapitres. Le premier est consacré à des considérations générales sur les fonctions périodiques. Après avoir défini les fonctions simplement périodiques, MM. Tannery et Molk montrent comment on serait

naturellement amené à les considérer, quand même on ne connaîtrait pas les fonctions trigonométriques; il suffit de résoudre, à l'aide du théorème de M. Weierstrass, le problème suivant : Construire une fonction entière dont les zéros, tous simples, forment une progression arithmétique indéfinie. Ils considèrent ensuite les fonctions univoques admettant deux périodes et démontrent à leur égard par une méthode particulièrement simple, dont le principe est dû, je crois, à M. Weierstrass, les propositions fondamentales suivantes :

Si une fonction univoque $f(u)$ est régulière en un point u_0 et ne se réduit pas à une constante, il existe un nombre positif ε, tel que la valeur absolue de toute période de cette fonction soit certainement supérieure à ε;

Si une fonction $f(u)$, définie comme précédemment, admet deux périodes a et b dont le rapport soit réel, elle est simplement périodique;

Si la fonction $f(u)$ admet deux périodes a et b dont le rapport soit imaginaire, il existe un couple de périodes α, β (couple primitif) de la fonction $f(u)$, tel que toute période de cette fonction soit une fonction linéaire homogène à coefficients entiers de α, β; en particulier, la fonction $f(u)$ ne peut avoir plus de deux périodes distinctes.

Les auteurs démontrent ensuite le théorème fondamental de Liouville : *Toute fonction entière transcendante ou non, qui est doublement périodique, se réduit à une constante.* Considérant alors exclusivement les fonctions doublement périodiques univoques dans tout le plan et qui n'admettent pas d'autres singularités à distance finie que des pôles, ils donnent l'expression générale de ces fonctions; cette expression dépend d'une nouvelle fonction transcendante entière σu admettant pour zéros simples tous les nombres $ma + nb$, a et b désignant un couple primitif de périodes, m et n deux nombres entiers quelconques. L'étude de cette fonction σu, construite d'abord par Eisenstein, mais sous une forme peu maniable, s'impose donc d'une façon nécessaire. C'est elle qui fait l'objet du second Chapitre, intitulé : *La fonction σu et les fonctions qui en dérivent.*

Ce Chapitre est divisé en six paragraphes, que je vais analyser successivement.

I. Si l'on désigne les périodes par $2\omega_1$ et $2\omega_3$, la fonction σu est définie par l'égalité

$$\sigma u = u \prod_s \left[\left(1 - \frac{u}{s}\right) e^{\frac{u}{s} + \frac{1}{2}\frac{s^2}{u^2}} \right],$$

où s doit être remplacé par toutes les valeurs que prend l'expression $2m\omega_1 + 2n\omega_3$, quand on y met à la place de m et n les différents nombres entiers positifs, négatifs ou nuls, à l'exclusion de la combinaison $m = 0$, $n = 0$. Le produit infini qui figure au deuxième membre est d'ailleurs absolument convergent, puisque la série à double entrée

$$\sum_{m,n} \frac{1}{(2m\omega_1 + 2n\omega_3)^\alpha}$$

est absolument convergente lorsque α est un entier plus grand que deux.

La fonction $\frac{\sigma' u}{\sigma u}$ est désignée, avec Halphen, par ζu; cette fonction engendre elle-même par différentiation la fonction

$$pu = -\zeta' u,$$

et les dérivées successives de pu.

En même temps que les deux demi-périodes ω_1 et ω_3, il convient de considérer une troisième demi-période ω_2 que MM. Tannery et Molk définissent par la relation entièrement symétrique

$$\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0.$$

C'est la seule modification un peu importante que les auteurs aient apportée aux notations de M. Weierstrass et de M. Schwarz; comme on le sait, en effet, appelant ω et ω' les deux demi-périodes primitives, M. Weierstrass définit la troisième demi-période ω'' par la relation $\omega'' = \omega + \omega'$. Cette modification, qui est tout à fait justifiée par la raison de symétrie, est en outre très avantageuse : elle permet, en effet, de condenser beaucoup les formules et d'en

écrire une seule lorsque, autrement, il faut dans la plupart des cas en écrire trois.

Le premier problème qui se présente dès qu'on a donné la définition des fonctions σu, ζu, pu, est de rechercher comment varient ces fonctions lorsque l'argument augmente de $2\omega_\alpha$: pour le résoudre, après avoir remarqué que $2\omega_1$ et $2\omega_3$ constituent un couple primitif de périodes pour la fonction pu et ses dérivées, on obtient les formules suivantes :

$$\zeta(u+2\omega_\alpha) = \zeta u + 2\eta_\alpha,$$
$$\sigma(u+2\omega_\alpha) = -e^{2\eta_\alpha(u+\omega_\alpha)}\sigma u,$$

dans lesquelles on fait

$$\zeta\omega_\alpha = \eta_\alpha.$$

D'ailleurs, on a

$$\eta_1 + \eta_2 + \eta_3 = 0$$

et

$$\eta_\alpha\omega_\beta - \eta_\beta\omega_\alpha = (2k+1)\frac{\pi i}{2},$$

$2k+1$ désignant un nombre entier impair.

II. Dans ce paragraphe, MM. Tannery et Molk établissent d'abord la formule

$$pu - pa = -\frac{\sigma(u+a)\sigma(u-a)}{\sigma^2 u\,\sigma^2 a},$$

et en déduisent les formules d'addition des fonctions ζu et pu, ainsi que l'équation à trois termes relative à la fonction σu. Ils montrent ensuite l'existence de la relation fondamentale

$$p'^2 u^2 = 4(pu - e_1)(pu - e_2)(pu - e_3),$$
$$= 4p^3 u - g_2 pu - g_3,$$

où l'on fait

$$e_\alpha = p\omega_\alpha.$$

Cette formule permet d'exprimer toutes les dérivées de pu en fonction rationnelle entière de pu et $p'u$; elle permet aussi de trouver les développements de σu, ζu, pu suivant les puissances croissantes de l'argument. Les coefficients de ces développements, qui dépendent des séries à double entrée $\sum \frac{1}{s^{2n}}$, jouissent de la propriété très remarquable d'être des polynômes entiers à coefficients rationnels par rapport aux deux invariants g_2 et g_3.

Les fonctions σu, ζu, $\wp u$ peuvent donc être considérées comme des fonctions de u, de g_2 et de g_3; elles vérifient alors des équations d'homogénéité qu'il est facile de former.

III. En groupant convenablement les facteurs qui composent le produit infini qui sert de définition à σu, on peut mettre cette fonction sous la forme d'un produit infini à simple entrée; on obtient la formule

$$\sigma u = e^{\frac{\eta_1 u^2}{2\omega_1}} \frac{2\omega_1}{\pi} \sin \frac{\pi u}{2\omega_1} \prod_{n=1}^{n=\infty} \left[1 - \frac{\sin^2 \pi \frac{u}{2\omega_1}}{\sin^2 \pi \frac{n\omega_3}{\omega_1}} \right],$$

qui est à rapprocher de celle qui donne $\sin x$ sous forme de produit infini. Par différentiation, on obtient des formules correspondantes pour ζu et $\wp u$.

Entre autres applications, ces résultats servent à démontrer la relation précise

$$\eta_1 \omega_3 - \eta_3 \omega_1 = \pm \frac{\pi}{2} i,$$

où l'on doit prendre le signe supérieur ou le signe inférieur suivant que la partie réelle de $\frac{\omega_3}{\omega_1 i}$ est positive ou négative.

IV. Il convient de considérer, en même temps que la fonction σu, trois autres fonctions qui jouent par rapport à σu le même rôle que le cosinus par rapport au sinus. Ce sont les cofonctions $\sigma_\alpha u$ définies par l'égalité

$$\sigma_\alpha u = \frac{e^{-\eta_\alpha u} \sigma(u + \omega_\alpha)}{\sigma \omega_\alpha} = \frac{e^{\eta_\alpha u} \sigma(\omega_\alpha - u)}{\sigma \omega_\alpha};$$

les dérivées logarithmiques de ces fonctions sont les fonctions $\zeta_\alpha u$, définies encore par l'égalité

$$\zeta_\alpha u = \zeta(u + \omega_\alpha) - \eta_\alpha.$$

Ces notations présentent de grands avantages; elles permettent en particulier de définir sans ambiguïté les radicaux $\sqrt{\wp u - e_\alpha}$ et $\sqrt{e_\beta - e_\alpha}$, par les formules

$$\sqrt{\wp u - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha u}{\sigma u}, \qquad \sqrt{e_\beta - e_\alpha} = \frac{\sigma_\alpha \omega_\beta}{\sigma \omega_\beta}.$$

Les auteurs démontrent pour ces nouvelles fonctions les formules qui correspondent à celles qu'ils ont données pour la fonction σu; puis ils cherchent comment se modifient σu, $\sigma_\alpha u$, ζu, $\zeta_\alpha u$, pu lorsque l'argument augmente d'une demi-période ω_α et donnent les formules propres à résoudre ce problème. Ils en déduisent l'expression de $p\frac{u}{2}$ et, en particulier, de $p\frac{\omega_\alpha}{2}$. Pour terminer, ils envisagent le cas particulier très important dans les applications où ω_1 et $\frac{\omega_3}{i}$ sont réels et positifs, et cherchent comment varient les fonctions définies jusqu'à présent, lorsque l'argument prend toutes les valeurs réelles ou imaginaires; ils montrent aussi comment, dans ce cas particulier, on peut exprimer ω_1 et ω_3 en fonction des invariants g_2 et g_3 par des intégrales définies d'une façon précise.

V. Dans ce paragraphe, MM. Tannery et Molk abordent le problème de la transformation, en le limitant au cas où l'on substitue au couple de périodes $(2\omega_1, 2\omega_3)$ un couple équivalent $(2\Omega_1, 2\Omega_3)$.

Les fonctions σu, ζu, pu formées au moyen du nouveau couple sont manifestement identiques aux fonctions σu, ζu, pu formées au moyen de l'ancien. Mais il n'en est pas de même en général pour les fonctions $\sigma_\alpha u$, $\zeta_\alpha u$; suivant les cas, ces fonctions restent invariables ou bien sont remplacées par les mêmes fonctions rangées dans un autre ordre; les quantités e_α jouissent de la même propriété; quant aux radicaux $\sqrt{e_\beta - e_\alpha}$, ils se remplacent aussi les uns les autres au signe près. L'ensemble des résultats est résumé dans des Tableaux qui permettent de voir immédiatement dans quel cas l'on se trouve suivant la nature des coefficients de la substitution faite sur les périodes.

VI. Les auteurs traitent maintenant le problème de la transformation des fonctions σ dans le cas général, où l'on fait sur les périodes une substitution linéaire quelconque à coefficients entiers et à déterminant non nul. Ils montrent d'abord qu'il suffit de résoudre le problème suivant : Exprimer les fonctions σu, $\sigma_\alpha u$, ζu, $\zeta_\alpha u$, pu formées avec les périodes $\frac{2\omega_1}{n}$, $2\omega_3$ au moyen des fonctions correspondantes formées avec les périodes $2\omega_1$, $2\omega_3$ (n étant

un entier positif). La question est résolue par un groupement convenable des facteurs primaires de la fonction $\sigma\left(u \,\middle|\, \frac{\omega_1}{n}, \omega_3\right)$. On obtient ainsi de nombreuses et belles formules susceptibles, d'ailleurs, d'être transformées de bien des façons.

Les cas de n égal à deux et de n impair sont traités séparément : du reste, il est clair que leur étude est équivalente à celle du cas général.

Si $n = 2$, le problème se résout complètement à l'aide de formules explicites; si n est impair, la solution dépend finalement de la recherche de la quantité

$$P_1 = \wp\left(\frac{2\omega_1}{n}\right) + \wp\left(\frac{4\omega_1}{n}\right) + \ldots + \wp\left(\frac{(n-1)\omega_1}{n}\right),$$

et des fonctions symétriques des quantités dont P_1 est la somme : cette recherche ne doit être faite que plus tard.

Quelques propositions très importantes relatives à la théorie des substitutions linéaires à coefficients entiers faites sur deux variables terminent le Volume. H. Andoyer.

ROST (G.). — Untersuchungen ueber die allgemeinste lineare Substitution deren Potenzen eine endliche Gruppe bilden. Inaugural-Dissertation. 28 p. in-4°. Leipzig, Teubner, 1892.

La dissertation inaugurale de M. Rost a pour objet la belle question d'Algèbre que voici : Trouver la substitution linéaire la plus générale

$$(A) \qquad x'_\rho = \sum_{\sigma=1}^{\sigma=n} a_{\rho\sigma} x_\sigma, \qquad \rho = 1, 2, \ldots, n$$

telle que les puissances de cette substitution forment un groupe fini. Cette question est identique à la suivante : Trouver les n^2 éléments $a_{\rho\sigma}$, de manière que la puissance $p^{\text{ième}}$ de la substitution (A) soit la substitution identique. M. F. Prym a donné une intéressante solution de cette question dans le cas où $p = 2$ [1]. C'est cette so-

---

[1] *Ueber orthogonale, involutorische und orthogonal- involutorische Substi-*

lution qu'a généralisée M. Rost, et il est juste de reconnaître que cette généralisation exigeait quelque effort d'invention. Nous résumons rapidement son travail dans les lignes qui suivent.

Désignons en général par A l'ensemble des n^2 éléments

$$a_{\rho\sigma} \qquad (\rho, \sigma = 1, 2, \ldots, n),$$

par A^p l'ensemble des n^2 éléments $a_{\rho s}^{(p)}$ de la $p^{\text{ième}}$ puissance de la substitution (A), par Δ l'ensemble des éléments de la substitution identique, c'est-à-dire des éléments $\delta_{\rho\sigma}$ qui sont nuls ou égaux à un, suivant que ρ est différent de σ ou égal à σ, le problème posé revient à déterminer les éléments $a_{\rho\sigma}$ par la condition

$$A^p = \Delta,$$

en entendant, par cette équation symbolique, que les éléments correspondants dans les deux ensembles A^p, Δ doivent être identiques. En supposant que l'ensemble A vérifie cette condition, on reconnaît sans peine que, si l'on pose

$$f(z) = \begin{vmatrix} a_{11} - z & \ldots & a_{1n} \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} - z \end{vmatrix},$$

on doit avoir

$$f(z) = (\omega - z)^{m_1}(\omega^2 - z)^{m_2} \ldots (\omega^p - z)^{m_p},$$

en désignant par ω une racine primitive de l'équation

$$z^p - 1 = 0$$

et par $m_1, m_2, \ldots, m_p$ un système de nombres entiers positifs ou nuls, liés par la condition

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = n.$$

Ce système de nombres entiers, c'est la *caractéristique* du système A. M. Rost montre qu'on peut les obtenir en fonction entière des éléments du système A.

---

tutionen (*Abhandlungen d. Math. Classe der K. Gesellschaft d. Wissenschaften zu Göttingen*, t. XXXVIII).

Considérons maintenant le système T de n^2 éléments

$$\begin{matrix} \tau_1, & 0, & \ldots, & 0, \\ 0, & \tau_2, & \ldots, & 0, \\ \cdot, & \cdot\cdot, & \cdots, & \cdot, \\ 0, & 0, & \ldots, & \tau_n, \end{matrix}$$

où, parmi les éléments $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$, il y en a r_1 égaux à ω, r_2 égaux à $\omega^2, \ldots, r_p$ égaux à ω^p; il est clair que le système T sera un des systèmes cherchés, c'est-à-dire que l'on aura

$$T^p = \Delta,$$

et que la caractéristique de ce système sera $(r_1, r_2, \ldots, r_p)$.

L'auteur établit les propositions suivantes : considérons le système de n^2 éléments $d_{\rho\sigma}$ définis par l'égalité

$$d_{\rho\sigma} = a_{\rho\sigma}^{(p-1)} + a_{\rho\sigma}^{(p-2)}\tau_\sigma + a_{\rho\sigma}^{(p-3)}\tau_\sigma^2 + \ldots + a_{\rho\sigma}\tau_\sigma^{p-2} + \delta_{\rho\sigma}\tau_\sigma^{p-1},$$

où $a_{\rho\sigma}^{(p-1)}, a_{\rho\sigma}^{(p-2)}, \ldots, \delta_{\rho\sigma}$ ont le sens précédemment expliqué, le déterminant $D_{(\tau)}$ des éléments $d_{\rho\sigma}$ est nul si la caractéristique $(r_1, r_2, \ldots, r_p)$ du système T est différente de la caractéristique $(m_1, m_2, \ldots, m_p)$ du système A. Considérons d'un autre côté les systèmes T qui admettent la caractéristique $(m_1, m_2, \ldots, m_p)$; l'un d'eux sera le système Ω formé comme le système T écrit plus haut, mais dans lequel les m_1 premiers éléments de la diagonale sont égaux à ω, les m_2 suivants à $\omega^2, \ldots$, les m_p derniers à ω^p; les autres systèmes T de caractéristique $(m_1, m_2, \ldots, m_p)$ se déduiront de Ω par des permutations des éléments en diagonale. *Parmi ces systèmes, il y en a un au moins pour lequel le déterminant* $D_{(\tau)}$ *défini plus haut n'est pas nul.* La considération du déterminant $D_{(\tau)}$ est le point essentiel du travail de M. Rost : les propriétés qu'on vient d'énoncer lui permettent d'effectuer la réduction à la forme canonique de tout système A satisfaisant à la condition énoncée, et d'établir ainsi la proposition suivante qui donne la solution du problème posé au début.

Si l'on désigne par B un système de n^2 éléments dont le déterminant ne soit pas nul, d'ailleurs arbitraire, on obtiendra toutes les solutions de l'équation symbolique

$$A^p = \Delta$$

en définissant A par l'équation symbolique

$$A = B^{-1}\Omega B,$$

c'est-à-dire que les éléments du système A sont les éléments de la substitution composée avec les substitutions (B) dont les coefficients sont les éléments de B, (Ω) dont les coefficients sont les éléments de Ω, et (B^{-1}) qui est la substitution inverse de B. Le problème est ainsi entièrement résolu; mais M. Rost en complète la solution en réduisant au moindre nombre possible les paramètres arbitraires qui y figurent. J. T.

BAILLAUD (B.). — Cours d'Astronomie a l'usage des étudiants des Facultés des Sciences. *Première Partie :* Quelques théories applicables à l'étude des Sciences expérimentales. 1 vol. in-8°, VI-285 p. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1893.

Un livre qui traite de l'Astronomie ne peut être écrit que par un astronome, cela est bien clair, au moins pour ceux qui pensent que l'on ne doit écrire que sur des sujets que l'on possède à fond, dans le détail et dans l'ensemble; mais, si ce livre est, en outre, écrit par un professeur qui a l'habitude des étudiants, de ce qu'on peut leur apprendre et de ce qui les intéresse, il pourra être lu par ceux qui ne savent pas déjà ce qu'il contient, par ceux qui cherchent à acquérir des connaissances, non à compléter et à mieux organiser celles qu'ils ont.

Tel est l'Ouvrage dont notre collaborateur, M. Baillaud, offre aujourd'hui au public le premier Volume. Ce premier Volume porte en sous-titre : *Quelques théories applicables à l'étude des Sciences expérimentales,* et ce sous-titre exprime bien l'objet que l'auteur a eu en vue. Ce Volume, en effet, intéresse autant le physicien que l'astronome et, à cet égard, il y avait un intérêt évident à le séparer de ce qui doit suivre. Pour ceux même qui veulent étudier l'Astronomie, cette séparation était désirable : la façon dont on obtient les données expérimentales de l'Astronomie, la critique de ces données, qui permet d'en déterminer le degré d'approximation, n'ont rien à faire avec la Mécanique

céleste, et, pour ce qui concerne les conséquences qu'on peut en tirer relativement au mouvement des astres, rien n'empêche celui qui veut se borner à des vues théoriques sur l'Astronomie à admettre qu'on sait déterminer ces données et le degré d'erreur dont elles peuvent être entachées : l'Astronomie est aujourd'hui une science assez avancée pour qu'il convienne d'en séparer nettement la partie expérimentale et la partie théorique. Seuls, les astronomes de métier sont tenus d'en posséder également bien les deux parties.

Les Chapitres I, II et IX intéresseront tous ceux qui désirent savoir comment, des données numériques de l'expérience, on peut, dans n'importe quelle Science, s'élever aux lois des phénomènes. Les deux premiers Chapitres se rapportent à la critique de ces données, le dernier à la façon dont on peut les mettre en œuvre, au moyen de l'interpolation.

Il n'est pas possible aujourd'hui de rien écrire sur la théorie des erreurs sans subir l'influence du beau livre de M. J. Bertrand sur le Calcul des probabilités; du moins, celui qui le ferait prouverait ou qu'il n'a pas lu le livre de M. Bertrand, ou qu'il n'en a pas compris la critique ingénieuse et aiguisée. Tel n'est pas assurément le cas de M. Baillaud, qui a su largement puiser à cette excellente source, tout en ayant soin de rester strictement dans son sujet, qui a scrupuleusement montré les points qui restaient douteux dans la théorie et qui surtout s'est appliqué à montrer comment elle devait être appliquée.

Le Chapitre I est intitulé : *Principes généraux du Calcul des probabilités;* on y trouvera, outre les définitions essentielles et l'établissement de quelques formules indispensables (formules de Wallis, de Stirling, etc.), la démonstration du théorème de Bernoulli et son application aux phénomènes naturels. Le Chapitre suivant est intitulé : *Loi de probabilité des erreurs. — Combinaison des observations.* L'auteur y expose, d'après Gauss, la loi de probabilité des erreurs, telle qu'elle résulterait d'hypothèses bien connues, qu'il est inutile d'énumérer ici. Il en déduit la méthode des moindres carrés, la façon dont on détermine la valeur la plus probable d'une quantité mesurée directement, soit que les observations aient ou non le même poids : une intéressante application est faite aux quarante observations que Bessel a données

de l'anneau de Saturne. Il passe ensuite à la détermination d'inconnues liées par des équations données à des quantités mesurées directement et aux questions qui s'y rapportent, touchant la détermination des valeurs les plus probables et des erreurs moyennes des observations et des inconnues. La méthode de Cauchy, relative à la détermination d'une seule inconnue donnée par une suite d'équations linéaires, est appuyée sur une ingénieuse remarque, due à M. Tisserand.

Le dernier Chapitre, avons-nous dit, se rapporte à la théorie de l'interpolation. Le point de départ est la formule d'interpolation de Newton, à laquelle l'auteur rattache la théorie des différences, qu'il expose avec une parfaite élégance. La formule de Newton est susceptible de formes diverses, dont quelques-unes sont particulièrement appropriées aux applications. Les coefficients, par les relations qu'ils offrent entre eux, donnent lieu à des remarques intéressantes. L'auteur montre aussi comment on peut déduire des valeurs d'une fonction les valeurs de l'intégrale de cette fonction ou encore de ses dérivées des divers ordres : une intéressante application numérique est tirée, ainsi d'ailleurs que plusieurs développements théoriques, du *Lehrbuch zur Bahnbestimmung der Kometen und Planeten* de M. Oppolzer. Après avoir exposé la méthode des quadratures de Gauss, M. Baillaud montre comment on peut interpoler au moyen des fonctions trigonométriques, soit que l'on veuille substituer à la série de Fourier un développement analogue, mais limité, soit que l'on veuille calculer approximativement les coefficients de cette série. Il rappelle enfin une élégante formule de Jacobi qui permet d'avoir sous le signe $\int$, au lieu de $\cos ix$ ou $\sin x$, la puissance $i^{\text{ième}}$ de $\sin x$ et qui, en particulier, conduit à une expression simple des fonctions de Bessel.

Les Chapitres III, IV, V et VI se rapportent à l'Optique. Considérant, en général, un instrument d'Optique comme formé d'une série de surfaces sphériques réfringentes dont les centres sont situés sur un axe, on montre d'abord, en suivant la belle méthode de Gauss, que, en négligeant les quantités du troisième ordre par rapport aux inclinaisons des rayons sur l'axe, tout point lumineux qui émet de la lumière homogène donne une image et que les

images de points situés dans un plan perpendiculaire à l'axe sont eux-mêmes dans un plan perpendiculaire à l'axe. La considération des points et des plans principaux, des foyers et des plans focaux, fournit une construction simple du rayon émergent et de l'image d'un point donné. M. Baillaud montre aussi le parti que l'on peut tirer des *points nodaux* de M. Listing qui jouissent de cette propriété que, si un rayon incident passe par l'un, le rayon émergent passe par l'autre et soit parallèle au rayon incident, ainsi que du *plan de Bravais* qui est un plan perpendiculaire à l'axe, tel que tout point lumineux situé dans ce plan ait son image dans le même plan. Ces éléments se relient d'ailleurs de la façon la plus naturelle aux éléments de Gauss. La théorie générale est appliquée aux cas les plus simples et les plus intéressants dans la pratique.

L'auteur passe ensuite à la théorie de la dispersion et de l'achromatisme : il étudie successivement, à ce point de vue, le prisme et les systèmes de prismes, l'aberration de réfrangibilité dans les lentilles, les conditions d'achromatisme d'un objectif astronomique, l'achromatisme des oculaires des lunettes astronomiques.

Mais la théorie de Gauss n'est qu'une première approximation et il est nécessaire de se rendre compte des écarts qu'elle peut offrir avec la réalité. Diverses questions essentielles dans la pratique se posent d'elles-mêmes : En ne considérant que des rayons primitifs peu inclinés sur l'axe, quelles sont les combinaisons de surfaces réfringentes qui rendent minimum l'*image* et quelles sont celles qui font que les images de points situés dans un plan perpendiculaire à l'axe soient aussi situées dans un tel plan et que le rapport des distances des images à l'axe soit égal au rapport des distances des points lumineux à cet axe? Les questions de cette nature sont, en général, très compliquées et les réponses diffèrent suivant les questions. Le cas d'une lentille est traité avec tous les détails nécessaires, de manière à permettre au lecteur d'aller plus loin, s'il le veut.

La nature de l'image dépend, comme on sait, de la théorie des congruences de droites : M. Baillaud expose, de cette théorie, ce qui est nécessaire à son objet.

Après quelques détails indispensables sur la théorie de la

vision, M. Baillaud passe en revue les principaux instruments d'Optique : loupe, lunette astronomique, microscope composé, télescopes divers.

Le Chapitre VII est consacré aux instruments d'Astronomie. L'auteur s'occupe d'abord des instruments qui servent à mesurer le temps : il décrit avec détail la pendule construite par M. Fénon pour la salle méridienne de l'observatoire de Toulouse; cette étude lui permet, pour ce qui concerne les chronomètres, de n'insister que sur les différences que ces instruments présentent avec les pendules. Les principaux instruments qui servent à déterminer les directions, à mesurer les angles et les longueurs (niveau, vernier, microscope micrométrique, cercle méridien, équatorial) sont étudiés avec les détails nécessaires au praticien ; les causes d'erreur, les corrections qu'elles comportent, sont analysées avec soin. On remarquera les figures qui représentent les instruments installés par M. Gautier à l'observatoire de Toulouse. L'équatorial coudé, l'altazimut, le sextant et l'héliomètre sont décrits d'une façon plus sommaire.

Enfin, le Chapitre VIII, qu'il nous reste à signaler, contient tout d'abord les renseignements indispensables sur les diverses unités qu'on emploie pour mesurer un arc et d'intéressantes remarques sur la précision que comportent les calculs numériques, en raison des erreurs dont sont entachées les données et de la nature des Tables que les calculateurs ont à leur disposition. Ce Chapitre se termine par des éléments de Trigonométrie sphérique, présentés avec toute la simplicité désirable. J. T.

DUHEM. — Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique. Cours professé à la Faculté des Sciences de Lille. 2 vol. in-4°. lithogr., 378-310 p. Paris, Hermann, 1891.

M. Duhem réunit deux qualités qui s'excluent souvent : une grande érudition et un esprit très systématique. Ces qualités, auxquelles il faut joindre un rare talent d'exposition, se retrouvent dans toutes ses publications, qui forment aujourd'hui un ensemble considérable. Les Mathématiques y tiennent une grande place;

pourtant, son œuvre est bien l'œuvre d'un physicien et c'est la réalité qu'il a toujours en vue : ce n'est pas l'intérêt propre des développements mathématiques qu'il cherche, et il lui importe peu qu'une formule ait une apparence plus ou moins compliquée; c'est un rôle de coordination que les Mathématiques ont à jouer : elles mettent dans les choses une unité que l'expérience est incapable à découvrir; elles montrent l'identité logique, là où l'expérience laisse supposer quelque analogie. Tirer toutes les conséquences logiques d'un principe très général, montrer clairement ce qu'il contient et ce qu'il ne contient pas, et les points où l'expérience doit intervenir pour apporter quelque chose de réellement nouveau, tel est le but qu'il poursuit, et, sans doute, il contribuera ainsi, dans une large mesure, à l'organisation de la Science actuelle.

Dans ce cours professé à la Faculté de Lille que nous analysons, l'objet essentiel de l'auteur est l'étude des systèmes déformables, à liaisons bilatérales et indépendantes du temps, tels que, dans toute *modification virtuelle,* le travail des forces intérieures soit la variation $-\delta F$ d'une fonction $-F$ de la forme

$$F = \int \varphi(T, \alpha, \beta, \ldots, \lambda)\, dv;$$

l'intégrale est étendue à tous les éléments dv du volume du système : T est la température de cet élément; $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ sont les autres paramètres qui, par hypothèse, suffisent à en déterminer l'état, dans les diverses transformations qu'il peut subir; F est le *potentiel thermodynamique interne* du système.

Pour déterminer le mouvement du système, on exprimera que le travail virtuel des forces d'inertie est égal à $\delta T_e - \delta F$, en désignant par δT_e le travail élémentaire des forces extérieures. Les conditions d'équilibre s'obtiennent en écrivant que δT_e est égal à δF. Dans les modifications où la forme et la température varient seules, les paramètres indépendants $\alpha, \beta, \ldots, \lambda$ déterminent la position, la vitesse, la forme de chaque élément matériel. Dans une modification virtuelle ces paramètres subissent des variations arbitraires, T reste constant. Le principe de d'Alembert fournit donc assez d'équations pour déterminer les variations de tous les paramètres, sauf celles de la température : pour celle-ci, une nouvelle relation sera nécessaire.

Afin de pouvoir écrire explicitement ces équations, l'auteur établit les formules données par Cauchy sur les déformations infiniment petites d'un corps : il est alors en mesure de définir la *pression* à l'intérieur d'un système quelconque dont le potentiel thermodynamique interne est de la forme précédemment indiquée; quand un tel système est en équilibre, on peut supprimer une partie du système et maintenir l'autre en équilibre, à condition d'appliquer sur chaque élément de la surface rendue libre une force de l'ordre de cet élément. Le mode de déduction employé par l'auteur est très intéressant, parce qu'il permet d'éviter l'introduction d'hypothèses particulières; il est toutefois obligé d'admettre en général que la pression est déterminée d'une façon unique. C'est d'ailleurs une supposition dont il se débarrasse dans les théories qui suivent, et qui se rapportent les unes aux modifications finies, les autres aux modifications infiniment petites.

Dans le premier cas, on ne s'occupe que des corps pour lesquels la fonction φ précédemment définie ne dépend que de la densité ρ et de la température T. Il peut exister de tels systèmes à une, deux, trois dimensions : dv est suivant les cas un élément de longueur, de surface ou de volume; ces systèmes sont des *fils,* ou des *membranes*, parfaitement flexibles, ou encore des *fluides*.

Dans le second cas, quel que soit le corps considéré, mais pourvu que son état à chaque instant diffère infiniment peu de son état primitif, la déformation d'un élément est définie par les trois *dilatations* et les trois *glissements* de Cauchy; φ dépend de ces six quantités et de T; l'étude des modifications infiniment petites d'un corps à partir de son *état naturel* est la théorie de l'*élasticité;* l'état naturel est l'état d'équilibre (qu'on suppose exister) du corps, quand aucune force n'agit sur lui. On admet de plus que la température est la même pour tous les points et qu'elle reste constante. La théorie comprendra comme cas particulier les déformations infinitésimales des fils, des membranes, des liquides; elle rendra compte approximativement des modifications très petites d'un corps quelconque, et l'approximation sera d'autant plus grande que le corps sera plus *élastique*.

Mécanique des fluides. — Le problème de l'Hydrodynamique est susceptible de deux formes différentes; on peut se proposer

de suivre à chaque instant dans sa position, son volume, sa température un élément physique particulier, ou bien de déterminer l'état du fluide en un point géométrique donné, c'est-à-dire la densité, la température et la vitesse (u, v, w) d'un point matériel qui coïncide avec ce point géométrique. Les trois équations de Lagrange répondent à la première question, les trois équations d'Euler à la seconde; celles-ci portent sur les cinq fonctions u, v, w, ρ et π de x, y, z, t : π est la pression. L'auteur déduit du principe de d'Alembert ces trois équations et, en outre, l'équation de continuité et la relation

$$\varphi(\rho, T) - \rho \frac{\partial}{\partial \rho} \varphi(\rho, T) - \pi = 0,$$

qui caractérise le fluide considéré. Pour déterminer les six fonctions u, v, w, ρ, π, T, il est nécessaire d'ajouter une relation supplémentaire; celle-ci exprime la loi de propagation de la chaleur dans le fluide.

Pour une loi de conductibilité quelconque, le problème est extrêmement compliqué. Dans la suite, M. Duhem supposera que π est une fonction de ρ; cette hypothèse est réalisée dans les seuls cas qui aient pu être abordés : fluide incompressible, fluide parfaitement conducteur à température uniforme et constante, fluide très peu conducteur à détente adiabatique.

Après avoir développé les théorèmes classiques sur le potentiel des vitesses, la théorie de M. Brillouin sur l'influence du frottement, les propriétés des mouvements tourbillonnants, M. Duhem fait une étude très intéressante et très détaillée des petits mouvements. Les quatre fonctions u, v, w, $\frac{1}{\rho}$ et le potentiel des vitesses satisfont à l'équation

$$a^2 \quad V = \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}. \tag{1}$$

M. Duhem établit, d'après M. Beltrami, la proposition fondamentale que voici et qui est due à Kirchhoff : soit V une fonction de x, y, z, t qui satisfait à l'équation (1) à l'intérieur d'une surface fermée S et r la distance d'un point x_0, y_0, z_0 à un point de cette surface, l'intégrale

$$\int \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial n_i} \left[r V \left(x, y, z, t - \frac{r}{a} \right) \right] dS,$$

où $\frac{\partial}{\partial n_i}$ désigne la dérivée prise suivant la normale intérieure à l'élément dS et que l'on suppose étendue à toute la surface S, est égale à o ou à $-4\pi V(x_0, y_0, z_0, t)$ suivant que le point x_0, y_0, z_0 est extérieur ou intérieur à la surface. Ce théorème permet de former la fonction V, quand on connaît, pour $t = 0$, les valeurs de V et de $\frac{\partial V}{\partial t}$; mais, comme le remarque l'auteur, il y a ici une différence essentielle avec les fonctions harmoniques; les intégrales V de l'équation (1) ne sont pas nécessairement analytiques; en outre, deux fonctions V peuvent se raccorder en tous les points d'une surface, ainsi que $\frac{\partial V}{\partial t}$ et $\frac{\partial V}{\partial n}$, sans que l'une soit le prolongement analytique de l'autre.

Ces propositions générales permettent de traiter la propagation d'un petit mouvement dans un fluide, la vitesse du son dans un gaz, dans un liquide, la propagation d'un petit mouvement dans un petit mouvement. Ce dernier problème est parfaitement élucidé; l'auteur y emploie et y développe de la façon la plus heureuse la méthode que l'on doit à M. Hugoniot.

La théorie des tuyaux sonores dans l'hypothèse des tranches, ou, si l'on veut, la théorie des ondes sonores planes, dépend de l'équation (1) lorsque V ne contient ni y, ni z. La théorie des ondes sphériques (périodicité, interférences, battements) résulte du théorème de Poisson ou du principe de Huygens. Poisson a établi les lois de la réflexion et de la réfraction des ondes planes; l'auteur les établit immédiatement par un procédé qui est dû à Green et à Lord Rayleigh.

L'auteur aborde ensuite l'étude des ondes périodiques quelconques. Lorsqu'une masse d'air est enfermée dans une surface S immobile ou animée d'un petit mouvement donné, le potentiel des vitesses ψ satisfait à l'équation (1) et à la condition

$$\frac{d\psi}{dn_i} + V_n = 0,$$

n_i étant la normale intérieure à S et V_n la composante suivant n_i de la vitesse du point de la paroi. V_n est une fonction donnée du temps t. Si le petit mouvement qui anime cette masse d'air est périodique, V_n, ψ sont des fonctions périodiques de t et ψ peut se

développer en une série de Fourier dont les coefficients sont des fonctions régulières θ de x, y, z, qui vérifient l'équation

$$\Delta\theta + K^2\theta = 0, \tag{2}$$

et telles que $\frac{\partial\theta}{dn_i}$ prenne en tout point de S une valeur donnée. Si, en particulier, les parois sont immobiles, les valeurs des $\frac{\partial\theta}{dn_i}$ sont toutes nulles. Il résulte des recherches de M. Poincaré à ce sujet que : la surface S étant donnée, pour une valeur quelconque de la constante K^2, toute intégrale θ de l'équation (2), régulière dans S, est déterminée par les valeurs de $\frac{\partial\theta}{dn_i}$ en tout point de S; mais pour des valeurs exceptionnelles de K^2, formant une suite discontinue, ces conditions définissent une infinité d'intégrales, comprises dans la formule $\theta_1 + \lambda\theta_2$, où λ désigne une constante arbitraire et θ_1, θ_2 deux fonctions de x, y, z.

Les valeurs singulières J_1, J_2, ... de la constante K^2 sont les valeurs maxima, minima, ou stationnaires de l'expression

$$J = \int_S \left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2\right] dS,$$

quand on y remplace U par une fonction arbitraire astreinte aux deux conditions

$$\int U\,dv = 0, \qquad \int U^2\,dv = 1,$$

où les deux intégrales sont étendues au volume enfermé par S.

Cette belle proposition s'établit en toute rigueur pour des surfaces S particulières (cylindre, parallélépipède rectangle, sphères concentriques). Après l'avoir montré, M. Duhem reproduit l'analyse de M. Poincaré, sujette à la même objection que la démonstration qu'a donnée Riemann du principe de Lejeune-Dirichlet. La théorie des résonateurs, en particulier, résulte immédiatement du théorème précédent.

L'auteur expose enfin, d'après Helmholtz, la théorie des tuyaux ouverts, elle repose sur d'importantes propriétés des intégrales de l'équation (2); ces propriétés résultent d'un théorème général relatif aux intégrales régulières dans S et dont le théorème de Kirchhoff est l'analogue, pour l'équation (1).

Mécanique des fils et des membranes. — Cette théorie est développée sur le même plan que la mécanique des fluides. Les questions de stabilité donnent lieu à de très intéressantes discussions, qui relèvent du calcul des variations. Pour étudier le mouvement d'un fil, ou d'une membrane, il est encore nécessaire d'avoir recours à une relation supplémentaire, analogue à celle qu'on a admise pour les fluides. Dans les petites oscillations, il est légitime d'admettre que la température reste constante. M. Duhem s'occupe particulièrement des petites oscillations autour d'une position d'équilibre stable.

Pour ce qui est des membranes, le cas le plus simple est le petit mouvement d'une membrane tendue sur un cadre plan, dans le voisinage de ce plan. Un tel mouvement se décompose en deux autres : une vibration transversale normale au plan du cadre et une vibration située dans ce plan. Ces vibrations se déterminent indépendamment l'une de l'autre. Les vibrations transversales dépendent de l'équation

$$a^2\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 V}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}.$$

L'étude approfondie que l'auteur fait de cette équation lui permet de montrer pourquoi les théorèmes de Kirchhoff et de Poisson n'ont pas ici de correspondant. Par contre, la théorie des vibrations périodiques d'une membrane plane est absolument semblable à celle des ondes périodiques. Elle dépend de l'équation

$$(3)\qquad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}+K^2\theta=0$$

analogue à l'équation (2), et jouissant de propriétés toutes semblables, mais que l'on peut, grâce aux travaux de M. Schwarz et de M. Picard, établir avec une *entière rigueur*. La théorie des sons propres et de la résonance des membranes peut dès lors se calquer sur la théorie des sons propres dans un espace quelconque. L'analogie se poursuit dans le cas simple des fils.

L'auteur indique ensuite une belle généralisation de ces résultats : il considère une membrane flexible tendue sur un cadre quelconque, elle affecte alors la forme de la surface minima déterminée par le contour que le cadre réalise ; autour de cette position d'é-

quilibre, elle peut vibrer; ici encore la vibration se décompose en une vibration normale et une vibration tangentielle et chacune de ces vibrations se détermine séparément; les vibrations normales dépendent d'une équation de la forme

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + g(x, y)\theta = 0.$$

Élasticité. — La théorie est réduite à ses principes essentiels : équations de l'équilibre et des petits mouvements d'un corps élastique, généralités sur la solution *unique* de ces équations, théorème de Clapeyron, étude sommaire des corps isotropes.

Acoustique. — On trouvera dans les Chapitres qui se rapportent à ce sujet tous les éléments de l'Acoustique proprement dite : l'anatomie de l'oreille, la théorie du timbre, celle des sons résultants, le caractère musical des sons, etc.

Cette rapide analyse suffira, nous l'espérons, à montrer l'importance et la variété des sujets traités par M. Duhem, ainsi que l'esprit dans lequel ils sont traités, comment ils sont déduits d'un principe général, et comment ainsi leurs analogies et leurs différences sont mises en pleine lumière. Ajoutons que, pour chaque sujet, l'historique est traité avec le plus grand soin; on lira en particulier, avec un grand intérêt, la belle discussion relative aux théories qui concernent l'élasticité. J. T.

STAHL (H.) und KOMMERELL. — Die Grundformeln der allgemeinen Flachentheorie. 1 vol. in-8°; VI-114 p. Leipzig; Teubner, 1893.

Ce petit Livre pourra rendre de grands services à ceux qui veulent étudier la Géométrie. Avant d'entreprendre une étude complète, où les divers points de vue s'éclairent l'un l'autre, mais où la richesse même des développements risque quelque peu d'égarer le lecteur inexpérimenté, la lecture d'un livre où les propositions fondamentales sont présentées d'une façon systématique et condensée peut être éminemment profitable. Tel est le Livre de MM. Stahl et Kommerell, qui est comme imprégné de la doctrine de Gauss.

Il comprend trois Chapitres :

Le premier est intitulé : *Étude d'une surface donnée*. Il contient l'introduction des éléments

$$(1)\quad \begin{cases} e = \sum\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2, & f = \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v}, \quad g = \sum\left(\frac{dx}{dv}\right)^2, \\ d = \sum a\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, & d' = \sum a\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}, \quad d'' = \sum a\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \end{cases}$$

où x, y, z sont les coordonnées d'un point d'une surface déterminée par les coordonnées curvilignes et où a, b, c sont les cosinus directeurs de la normale; les expressions des différentielles de a, b, c ainsi que des cosinus directeurs des tangentes aux deux courbes (u), (v); les notions de lignes de longueur nulle, de lignes isométriques, de représentation conforme, de lignes géodésiques, de lignes conjuguées, de lignes de courbure et de lignes asymptotiques. Il se termine par une application des théories précédentes à l'établissement des principales propriétés de la surface lieu des centres de courbure principaux d'une surface donnée.

Le second Chapitre a pour titre : *Étude d'une surface d'après des propriétés données*. On y trouvera tout d'abord la déduction des trois équations aux dérivées partielles auxquelles doivent satisfaire les quantités e, f, g, d, d', d'' et qui ne sont autre chose que les conditions d'intégrabilité du système (1) considéré comme un système d'équations aux dérivées partielles où x, y, z seraient les fonctions inconnues. A ces équations sont attachés les noms de Gauss, Mainardi, Codazzi. Après les avoir établies, on démontre la proposition réciproque, due à M. O. Bonnet. Le reste du Chapitre est consacré aux applications suivantes : étude des équations de Codazzi dans le cas où les paramètres u, v ont une signification particulière; surfaces à courbure moyenne constante, surfaces minima, surfaces où les lignes de courbure sont isométriques; systèmes triplement orthogonaux, représentation sphérique, coordonnées tangentielles, étude particulière des surfaces minima, comprenant les formules de M. Weierstrass, les exemples les plus simples des surfaces minima, la notion de surfaces adjointes, et quelques indications sur la détermination d'une surface minima passant par un contour donné.

Le troisième Chapitre a pour objet l'étude des courbes tracées

sur une surface. On y établit d'abord pour une courbe gauche quelconque les formules de Frenet-Serret et celles qui concernent les rayons de courbure, de torsion, de la sphère osculatrice. Puis, pour une courbe tracée sur une surface, on exprime en fonction de u et v ces divers rayons, les cosinus directeurs de la tangente, de la normale principale, de la binormale, enfin l'angle de la normale principale à la courbe et de la normale à la surface. Ces expressions, quand on particularise la courbe tracée sur la surface, permettent d'établir les propriétés les plus importantes des lignes de courbure, des lignes asymptotiques, des lignes géodésiques, etc. Les auteurs introduisent ensuite les notions de paramètres différentiels, et terminent par quelques indications sur les fonctions qui restent invariables quand on substitue aux variables u, v d'autres variables u_1, v_1.

De nombreuses indications bibliographiques permettent au lecteur, soit de remonter aux sources, soit de compléter ses connaissances sur les matières traitées par les auteurs. J. T.

MÉLANGES.

ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET DES LETTRES DE DANEMARK.

QUESTIONS MISES AU CONCOURS POUR L'ANNÉE 1893.

Question de Mathématiques.

(Prix : Médaille d'or de l'Académie.)

Les définitions algébriques des courbes et les déterminations des nombres de leurs points singuliers et de leurs tangentes singulières ne se laissent énoncer géométriquement que d'une manière assez négative, savoir en exprimant que les courbes réellement tracées ne sauraient avoir plus de tant et tant d'intersections, points singuliers, etc. Il n'en existe pas moins divers cas où l'on a obtenu des énumérations positives très claires de toutes les possi-

bilités différentes au point de vue projectif et compatibles avec ces déterminations négatives. C'est Newton qui, dans ses recherches sur les courbes du troisième degré, a commencé de pareils travaux; ils ont été continués par les grands géomètres du commencement de notre siècle; mais c'est surtout durant ces quelques vingt ou trente dernières années que l'œuvre a pris de l'extension.

Toutefois les résultats obtenus portent encore le cachet d'une certaine dissémination, bien que les procédés d'examen employés ne semblent avoir besoin de subir que de légères modifications pour devenir applicables à de plus vastes questions. Comme exemples des possibilités qui semblent se présenter sous ce rapport, on peut citer ce qui suit. Hilbert a lui-même étendu ses recherches sur les branches d'une courbe plane et algébrique aux courbes dans l'espace qui sont d'un certain ordre et du plus haut genre possible. Ces courbes se trouvent sur une surface du second ordre. Il semble que les recherches doivent pouvoir s'étendre aussi à d'autres courbes sur une pareille surface, courbes qui peuvent alors, algébriquement parlant, se définir par le nombre de leurs intersections avec les lignes droites de chacune des deux générations de la surface. Pour des courbes sur une surface du second ordre, il ne serait pas non plus impossible de trouver quelque chose qui répondît à la proposition très générale de Klein concernant les singularités réelles d'une courbe algébrique.

Dans le plan on pourrait peut-être également trouver une généralisation de la susdite proposition en remplaçant dans l'énoncé les tangentes rectilignes, tant simples que singulières, par des sections coniques tangentes satisfaisant aussi à d'autres conditions convenables.

Une classe de généralisations des résultats connus est en tout cas facile à trouver : ce sont elles qu'on en déduit à l'aide de transformations connues. Bien que la question qui va être proposée ici ne regarde pas ces extensions simples, il est possible que, après les avoir trouvées par le procédé indiqué et cherché à les établir plus tard par des procédés plus directs, on puisse s'en servir pour frayer la voie vers des généralisations réelles.

Considérant donc que *des recherches concernant des formes géométriques différentes au point de vue projectif, représentées par des équations algébriques d'une nature assez géné-*

rale, font entrevoir comme possible un certain rendement, l'Académie propose sa médaille d'or pour le meilleur travail, fournissant, à ce sujet, des résultats nouveaux. On désire également des explications sur les hypothèses purement géométriques capables de produire ces mêmes résultats par substitution à la définition au moyen des équations algébriques.

Les réponses aux questions peuvent être en langue danoise, suédoise, anglaise, allemande, française ou latine. Les Mémoires doivent être écrits lisiblement et marqués, non point du nom de l'auteur, mais d'une épigraphe, et accompagnés d'un billet cacheté, contenant le nom, profession et adresse de l'auteur avec la reproduction de l'épigraphe à l'extérieur. Aucun membre danois de l'Académie ne peut concourir pour un des prix proposés. A défaut d'autre prix désigné, c'est la médaille d'or de l'Académie (valeur : 320 couronnes) qui sert de récompense pour la solution satisfaisante des questions posées.

Les concurrents doivent faire parvenir leurs réponses avant la fin d'octobre 1893 au secrétaire de l'Académie, M. H.-G. Zeuthen, professeur à l'Université de Copenhague. Le jugement est porté durant le mois de février suivant, après quoi les auteurs peuvent retirer leurs réponses.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

MACFARLANE (A.). — PRINCIPLES OF THE ALGEBRA OF PHYSICS. 1 vol. in-8°; 117 p. Salem, Mass., 1891.

L'intéressant opuscule que publie M. Macfarlane soulève la question des notations dans la théorie des quaternions. Il y a, d'après l'auteur, un inconvénient notable à affecter du signe — la partie scalaire du produit de deux vecteurs, et cette convention ne lui paraît nullement nécessaire : il propose donc, pour définir la multiplication, d'adopter les conventions

$$ii = jj = kk = +1,$$
$$jk = -kj = i, \qquad \ldots,$$

en sorte que le produit des deux vecteurs

$$\mathbf{A} = a_1 i + a_2 j + a_3 k,$$
$$\mathbf{B} = b_1 i + b_2 j + b_3 k$$

serait

$$\mathbf{AB} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + (a_2 b_3 - a_3 b_2) i$$
$$+ (a_3 b_1 - a_1 b_3) j + (a_1 b_2 - a_2 b_1) k.$$

Tout en évitant de nous prononcer sur l'opportunité de ce changement aux habitudes, il convient de dire que l'ensemble des notations proposées par M. Macfarlane paraît très cohérent, et que son exposition des opérations élémentaires relatives aux vecteurs et aux quaternions est très claire. J. T.

DEMARTRES. — COURS D'ANALYSE DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE LILLE, rédigé par *E. Lemaire*. Première Partie : *Fonctions de variables réelles*. Deuxième Partie : *Propriétés des fonctions analytiques*. Paris, Hermann, 1893.

Le Cours d'Analyse de M. Demartres ne fait point double emploi avec les savants traités d'Analyse qui ont été publiés dans ces derniers temps. D'un caractère plus élémentaire, écrit avec beaucoup de

méthode et de clarté, il s'adresse surtout aux candidats à la licence et à l'agrégation, auxquels il rendra sans doute de grands services.

La première Partie contient le Calcul différentiel et le Calcul des intégrales définies. Dans une Introduction de quelques pages, l'auteur donne d'abord les propriétés fondamentales des fonctions continues et la définition analytique de l'intégrale définie. M. Demartres a eu raison, selon nous, de séparer ces notions du reste de l'Ouvrage. Indispensables à qui veut approfondir l'Analyse, elles sont de nature à arrêter le débutant au commencement d'un cours. Les premières leçons sont consacrées au calcul des dérivées des fonctions d'une ou de plusieurs variables, à la théorie des changements de variables et des déterminants fonctionnels. Viennent ensuite les propriétés fondamentales des séries et en particulier des séries entières, les formules de Taylor et de Maclaurin, et la détermination des maxima et des minima des fonctions d'une ou de plusieurs variables. On y trouve rappelée l'ingénieuse méthode de Fermat, que l'on chercherait vainement dans la plupart des traités analogues.

Dans les douze leçons suivantes, nous trouvons les procédés classiques d'intégration, les séries trigonométriques, le calcul des aires et des volumes. Il est difficile d'être bien neuf dans un pareil sujet. Nous devons signaler cependant le soin avec lequel l'auteur établit les formules si délicates de la différentiation sous le signe $\int$ et du changement de variables dans les intégrales multiples. Les exemples sont bien choisis et suffisamment nombreux.

La seconde Partie de l'Ouvrage est consacrée à la théorie des fonctions analytiques. L'auteur définit d'abord d'une façon précise ce que l'on entend par ces mots : *fonction analytique,* et rattache aux conditions trouvées quelques notions générales sur la transformation conforme et les courbes isothermes, qui doivent naturellement trouver place dans ce cours. Les deux Chapitres suivants contiennent la définition des fonctions élémentaires, l'extension des règles du Calcul différentiel aux fonctions analytiques, et l'étude des fonctions représentées par des séries entières. Nous devons citer la façon dont l'exponentielle e^x est introduite en s'appuyant uniquement sur la propriété exprimée par la relation

$$f(z)f(z') = f(z + z'),$$

sans ajouter aucune autre hypothèse. Les théorèmes classiques d'Abel sur les séries ordonnées suivant les puissances entières et positives d'une variable sont établis avec tout le soin que mérite un sujet aussi important.

Avec le Chapitre IV, nous entrons dans le Calcul intégral. Le théorème de Cauchy y est établi de deux façons entièrement différentes, et l'on en déduit immédiatement la formule fondamentale

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_{(C)} \frac{f(z)\,dz}{z-x}.$$

L'énoncé du problème de Dirichlet et sa solution dans le cas du cercle, qui viennent après, ne sont pas utiles pour la suite, mais la grande importance du sujet justifie suffisamment son introduction dans un cours un peu complet.

Les quatre Chapitres suivants renferment l'application des théorèmes généraux à l'étude des fonctions uniformes, les séries de Maclaurin, de Taylor, de Laurent, de Fourier, la classification des points singuliers, les théorèmes de Weierstrass, de Mittag-Leffler, la décomposition en facteurs primaires, etc. Il nous a semblé qu'il y avait quelque confusion entre les différentes espèces de singularités, dont les unes sont inhérentes aux fonctions elles-mêmes, tandis que les autres, en quelque sorte apparentes, proviennent uniquement de leur mode de représentation. De même, l'idée si importante du prolongement analytique par cheminement ne nous paraît pas mise en lumière avec toute la netteté et toute la généralité désirables. Mais ce ne sont là, dans tous les cas, que des critiques bien légères.

Les quatre leçons suivantes sont consacrées aux éléments de la théorie des fonctions doublement périodiques. M. Demartres introduit ces fonctions en recherchant les fonctions uniformes qui admettent un théorème d'addition algébrique. Une démonstration très simple lui permet d'établir qu'il n'y en a pas d'autres que les fonctions rationnelles de z, de $e^{\frac{i\pi z}{\omega}}$, et les fonctions doublement périodiques, n'ayant que des discontinuités polaires à distance finie. Inversement, des théorèmes généraux sur ces fonctions doublement périodiques, on déduit sans difficulté qu'elles possèdent un théorème d'addition. Pour obtenir leur expression générale,

l'auteur prend pour point de départ la décomposition en facteurs primaires, et il se propose de former une fonction entière admettant les zéros $a + 2m\omega + 2m'\omega'$. On est ainsi conduit par la voie la plus naturelle à la fonction σ, d'où se tirent immédiatement les fonctions ζ et $\wp$. Les propriétés fondamentales de ces fonctions sont établies en s'appuyant constamment sur les théorèmes généraux déjà obtenus, ce qui rend la plupart des démonstrations presque intuitives. M. Demartres donne aussi la définition des autres fonctions qui ont été introduites dans cette théorie, telles que les fonctions σ_1, σ_2, σ_3, λ, μ, ν, et les fonctions θ, avec quelques-uns de leurs développements en séries. Arrivé à ce point, le lecteur est vraiment en possession de la partie essentielle de la théorie des fonctions elliptiques.

Dans les dernières leçons, nous trouvons la définition des fonctions algébriques avec leurs propriétés fondamentales, l'étude de la périodicité des intégrales hyperelliptiques, l'inversion de l'intégrale elliptique de première espèce, et quelques notions sur les courbes de genre 1. L'inversion de l'intégrale elliptique est faite en détail avec beaucoup de soin et, pour permettre de mieux saisir les raisonnements, l'auteur a établi d'abord les propriétés fondamentales de e^u et de $\sin u$ en partant des intégrales élémentaires

$$u = \int_1^z \frac{dz}{z}, \qquad u = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}.$$

Cependant le raisonnement par lequel on établit que la fonction inverse est uniforme prête à une grave objection, qui est bien connue de tous ceux qui ont étudié cette théorie. On peut, il est vrai, ne pas soulever cette objection dans un cours destiné aux candidats à la licence.

La dernière leçon est particulièrement intéressante. L'auteur y fait connaître d'abord le lien intime entre la théorie des fonctions doublement périodiques et la théorie des courbes du premier genre; puis, comme application, il donne quelques propriétés de la cubique plane et de la biquadratique gauche.

On a pu juger, d'après ce compte rendu sommaire, de la solidité du cours que professe M. Demartres. La plupart des démonstrations sont présentées sous une forme très élémentaire, sans inutile appareil de calcul, et les leçons ont été rédigées avec soin par

M. Lemaire. L'étudiant qui se sera bien pénétré de l'Ouvrage aura un fond solide de connaissances, lui permettant d'aborder sans difficulté l'étude de traités plus complets ou plus spéciaux, et des Mémoires originaux. E. G.

GINO LORIA. — NICOLA FERGOLA E LA SCUOLA DI MATEMATICI CHE LO EBBE A DUCE, con 4 Tavole litografate. Genova, tipografia del R. Istituto dei sordomuti. 144 p. in-4°; 1892.

Dans l'*Aperçu historique* de Chasles, on lit deux phrases qui ont presque le caractère d'une énigme : « Le goût de cette Géométrie qui a donné tant d'éclat aux Sciences mathématiques, jusqu'il y a près d'un siècle, surtout dans la patrie de Newton, s'était affaibli depuis et aurait presque disparu, si les géomètres italiens ne lui fussent restés fidèles. On doit de nos jours au célèbre Fergola et à ses disciples, MM. Bruno, Flauti, Scorza, plusieurs écrits importants sur l'Analyse géométrique des Anciens, qui s'y trouve rétablie dans sa pureté originaire. » Cette école napolitaine a disparu si brusquement et si complètement, ses travaux, malgré l'estime qu'en faisait Chasles, ont en réalité joué un rôle si peu important dans la transformation et les développements de la Géométrie au cours de ce siècle, que M. Gino Loria n'a appris l'existence de cette école que par l'Ouvrage de Chasles et qu'il a éprouvé les plus grandes difficultés à se renseigner sur les circonstances de la vie du chef et des disciples et à débrouiller tant soit peu les particularités intéressantes pour l'histoire des Mathématiques. On doit d'autant plus lui savoir gré d'une publication qui jette une lumière suffisante sur un groupe d'hommes si voisins de nous et tombés si vite dans un oubli immérité. Il est vrai que tous leurs travaux sont loin d'avoir une égale valeur, mais l'ensemble en présente tant d'unité véritable, qu'on ne peut y méconnaître la puissance d'une idée fondamentale directrice et, précisément à ce titre, l'étude en est particulièrement intéressante.

Nicola Fergola, né à Naples le 29 octobre 1753, y mourut le 22 octobre 1822. L'enseignement mathématique de l'Université de Naples était très faible au temps de sa jeunesse; il s'instruisit de

fait lui-même et ouvrit vers 1775 une école privée d'enseignement supérieur, qu'il dirigea jusqu'en 1801. A cette date, il obtint à l'Université la chaire d'Analyse, la garda jusqu'en 1812 pour passer à celle de Synthèse, se retira la même année et continua jusqu'à sa mort à s'occuper d'enseignement privé. Il n'a publié que deux Traités analytiques : *des Sections coniques* (1814) et *des Lieux solides* (1818), réédités par Flauti (1828) après sa mort; environ neuf opuscules (anonymes, sauf un) et autant de Mémoires insérés dans les Actes de l'Académie des Sciences et Belles-Lettres de Naples. Flauti a tiré de ses papiers quelques Mémoires posthumes, qui ont paru dans les mêmes Actes, et un Volume sur l'invention géométrique (1842). M. Gino Loria lui reconnaît, à bon droit, une supériorité marquée sur ses disciples, au point de vue de la largeur d'esprit et des aperçus d'avenir.

Francisco Bruno, mort en 1862, a été professeur de Géométrie à l'Université de Naples jusqu'en 1860 et membre de l'Académie des Sciences de la même ville depuis 1835. Il n'a publié que deux opuscules en 1824 et 1825; sa réputation comme professeur paraît avoir été très grande.

Vincenzo Flauti (né le 21 juin 1782, mort le 20 juin 1863) fut pris comme adjoint de Vincenzo Giannattasio, quand Fergola laissa à ce dernier son école privée (1801). En 1803, il entrait à l'Université de Naples comme professeur de Mathématique synthétique, passait en 1806 à la chaire d'Analyse élémentaire, en 1812 à celle d'Analyse sublime, qu'il occupa jusqu'en 1849. De l'école napolitaine, il a été l'auteur le plus fécond, d'autant qu'il a publié divers Ouvrages élémentaires. Sa *Geometria di sito*, qui est en réalité un traité de Géométrie descriptive, a eu trois éditions (1815, 1821, 1842). De 1819 à 1857, seize Mémoires de lui ont été insérés dans les Actes de l'Académie de Naples.

Giuseppe Scorza, né à Gimigliano en janvier 1781, mort à Naples le 5 mai 1843, commença à étudier sous Fergola en 1795, et ouvrit à son tour en 1812 une école privée. En 1825, il obtint la chaire de Synthèse élémentaire à l'Université de Naples. Il a donné en 1815 une *Divination de la Géométrie analytique des Anciens*, intéressante étude sur le lieu à trois et quatre droites, et en 1828 une édition des six premiers Livres d'Euclide, où il s'est montré ardent défenseur du géomètre grec, et où il a essayé

de donner une démonstration du postulatum des parallèles. On semble devoir également lui attribuer deux écrits anonymes, notamment un *Éloge de Fergola* (1830), qui contient des critiques contre Flauti et des attaques contre Giannattazio.

Ce dernier, né à Solofra le 20 octobre 1759, mort le 6 décembre 1849, succéda à Fergola dans la direction de son école privée en 1801 et comme titulaire de la chaire de Synthèse à l'Université en 1812. Il a donné en 1791 et 1810 deux éditions des *Sections coniques* de Fergola où son nom paraît seul et qui sont antérieures à l'édition de Flauti qui porte celui de Fergola. Cette circonstance est mal expliquée.

M. Loria a dressé une liste des diverses productions de l'école napolitaine et donné quelques indications sur ses autres membres; il expose d'abord les travaux relatifs à la théorie des coniques, pour les applications du théorème de Ptolémée, les idées de Fergola sur les méthodes, la solution de divers problèmes particuliers, quelques recherches sur l'Analyse infinitésimale et sur des questions de Mécanique; il examine ensuite le cours de Mathématiques projeté et en partie exécuté par Flauti, et raconte la dispute qui s'éleva en 1839 entre les géomètres napolitains de l'école de Fergola et ceux qui tenaient pour les méthodes analytiques et dont les principaux étaient Tucci, de Angelis et Padula. Après des escarmouches provoquées par ces derniers, Flauti crut pouvoir les défier de résoudre trois problèmes, pour lesquels il proposa trois médailles. Deux furent décernées à son élève Trudi, qui les refusa; le troisième problème (inscrire dans une pyramide triangulaire quatre sphères tangentes entre elles et aux faces de la pyramide), proposé à tort comme nouveau [1], est en général impossible, comme l'avait remarqué Steiner dès 1826. Flauti ne sortit pas à son honneur de la polémique qui s'éleva à ce sujet et dans laquelle se distingua particulièrement Padula.

L'école de Fergola était dès lors sur son déclin; la seconde génération s'épuisait, une troisième ne se leva pas.

PAUL TANNERY.

---

[1] Il l'avait déjà été trois fois dans les *Annales mathematiques de Gergonne*.

MÉLANGES.

RÉSOLUTION D'UNE QUESTION RELATIVE AUX DÉTERMINANTS;

PAR M. J. HADAMARD.

1. Étant donné un déterminant

$$(1) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & \dots & l_1 \\ a_2 & b_2 & \dots & l_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & \dots & l_n \end{vmatrix},$$

dans lequel on sait que les éléments sont inférieurs en valeur absolue à une quantité déterminée A, il y a souvent lieu de chercher une limite que le module de Δ ne puisse dépasser.

On voit immédiatement que $|\Delta|$ est inférieur à $1.2.3\dots n A^n$. Mais il est clair que cette limite est trop élevée; car elle ne pourrait être atteinte que si tous les termes du déterminant avaient le même signe, ce qui est manifestement impossible.

Je me propose en conséquence de rechercher le maximum du déterminant Δ dans les conditions indiquées.

2. Sans rien supposer d'abord sur les modules des éléments $a_1, \dots, b_1, \dots$, désignons par $a_1^0, \dots, b_1^0, \dots$ leurs conjugués dont le déterminant Δ_0 sera le conjugué de Δ. Prenons, dans le déterminant Δ, p lignes quelconques pour en former un tableau rectangulaire (T), (T_0) étant le tableau correspondant du déterminant Δ_0; considérons le produit

$$P_p = (T)(T_0).$$

Si $p = n$, ce produit donnera $\Delta\Delta_0$, c'est-à-dire le carré du module de Δ; pour $p < n$, il fournira de même la somme des carrés des modules des différents déterminants que l'on déduit du tableau (T). Dans tous les cas, la quantité ainsi obtenue sera essentiellement réelle et positive [1].

---

[1] Nous n'avons pas à prendre en considération le cas de $P_p = 0$, le détermi-

Pour former le produit P_p, d'après les règles de la multiplication des déterminants, il faudra multiplier chaque ligne de (T) par chaque ligne de (T_0). Si l'on a choisi deux lignes correspondantes, par exemple les deux lignes de rang h, le résultat s_h donnera la somme des carrés des modules des éléments a_h, b_h, ..., l_h. Si au contraire on a pris deux lignes de rangs différents h et h', on trouvera l'expression

$$(2) \qquad s_{h,h'} = a_h a_{h'}^0 + b_h b_{h'}^0 + \ldots + l_h l_{h'}^0.$$

Nous remarquerons que $s_{h,h'}$ est conjugué de $s_{h',h}$.

Les quantités s_h et $s_{h,h'}$ seront les éléments du déterminant P_p. Si, par exemple, les lignes qui composent le tableau (T) sont les p premières, on aura

$$P_p = \begin{vmatrix} s_1 & s_{1,2} & \ldots & s_{1,p} \\ s_{2,1} & s_2 & \ldots & s_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{p,1} & s_{p,2} & \ldots & s_p \end{vmatrix},$$

et, si nous isolons la partie qui contient en facteur un élément principal, le dernier par exemple, nous pouvons écrire

$$(3) \qquad P_p = s_p P_{p-1} + Q_p,$$

où Q_p sera le déterminant

$$\begin{vmatrix} s_1 & s_{1,2} & \ldots & s_{1,p-1} & s_{1,p} \\ s_{2,1} & s_2 & \ldots & s_{2,p-1} & s_{2,p} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ s_{p-1,1} & s_{p-1,2} & \ldots & s_{p-1} & s_{p-1,p} \\ s_{p,1} & s_{p,2} & \ldots & s_{p,p-1} & 0 \end{vmatrix}.$$

Le mineur de ce déterminant, relatif à la $h^{\text{ième}}$ ligne et à la $h'^{\text{ième}}$ colonne, étant désigné par $\frac{\partial Q_p}{\partial(h, h')}$, nous constatons que les mineurs principaux sont des expressions Q_{p-1}, sauf le dernier qui est une expression P_{p-1}. Quant aux autres mineurs, nous remarquerons seulement que $\frac{\partial Q_p}{\partial(h, h')}$ est conjugué de $\frac{\partial Q_p}{\partial(h', h)}$.

---

nant Δ étant alors nul et, par suite, ne présentant aucun intérêt dans la question actuelle.

3. Cela posé, il est facile de démontrer que le déterminant Q_p est négatif ou nul, le dernier cas ne pouvant se présenter que si tous les éléments de la dernière colonne sont égaux à zéro.

Il suffit pour cela (h étant un quelconque des nombres 1, 2, ..., $p-1$) de considérer les quatre mineurs $\frac{\partial Q_p}{\partial(h,h)}$, $\frac{\partial Q_p}{\partial(p,p)}$, $\frac{\partial Q_p}{\partial(h,p)}$, $\frac{\partial Q_p}{\partial(p,h)}$. L'identité bien connue qui existe entre ces mineurs nous donne une relation de la forme

$$Q_p P_{p-2} = Q_{p-1} P_{p-1} - \left[\frac{\partial Q_p}{\partial(h,p)}\right]^2.$$

Les P étant positifs, nous voyons donc bien que Q_p est nécessairement négatif ou nul si cette conclusion a été démontrée pour Q_{p-1}. Nous pouvons dès lors l'admettre pour toute valeur de p, car elle est évidente pour Q_1, égal à 0, et Q_2, égal à $-|s_{1,2}|^2$.

De plus, Q_p ne saurait être nul que si Q_{p-1} l'est, c'est-à-dire (en admettant toujours que notre conclusion est établie pour Q_{p-1}) si tous les éléments de la dernière colonne sont nuls à l'exception du $h^{\text{ième}}$. Mais comme h est variable dès que p est au moins égal à 3, il ne peut y avoir aucun élément de la dernière colonne différent de zéro.

4. Revenons maintenant au déterminant P_p : nous sommes en mesure d'établir que ce déterminant est inférieur ou au plus égal à son terme principal $s_1 s_2 \ldots s_p$, l'égalité n'ayant lieu que si tous les éléments non principaux sont nuls.

En effet, nous pouvons admettre que le fait est vrai pour P_{p-1}, et dès lors l'équation (3) démontre l'inégalité $P_p < s_1 s_2 \ldots s_p$, puisque Q_p est négatif.

De plus, P_p ne peut être égal à $s_1 s_2 \ldots s_p$ que si, d'une part, P_{p-1} est égal $s_1 s_2 \ldots s_{p-1}$ et que, d'autre part, on ait $Q_p = 0$. D'après ce que nous avons vu plus haut, cette double condition exige que tous les éléments non principaux soient nuls.

En particulier, pour $p = n$, on a

$$|\Delta|^2 \leq s_1 s_2 \ldots s_n.$$

Lorsque les modules des éléments sont au plus égaux à 1, les s_h

ont pour valeur maximum n, et par suite $|\Delta|$ est au plus égal à $n^{\frac{n}{2}}$.

On voit que la valeur maximum du déterminant du $n^{\text{ième}}$ ordre est loin d'augmenter aussi rapidement que le produit $1.2\ldots n$. D'après la formule d'approximation de la fonction Γ, elle croît un peu plus vite que la racine carrée de ce produit.

5. Pour que Δ atteigne son maximum, il faut, en premier lieu, que tous les éléments aient pour module 1; puis que tous les $s_{h,h'}$ soient nuls ($h \neq h'$).

En écrivant l'équation $s_{h,h'} = 0$ pour toutes les valeurs de h', l'entier h restant fixe, on a un système d'équations linéaires et homogènes par rapport aux éléments de la $h^{\text{ième}}$ ligne, d'où résulte que chaque élément est proportionnel à la quantité conjuguée du mineur correspondant. Les formules relatives aux déterminants adjoints montrent même que les mineurs d'ordre k sont proportionnels aux mineurs complémentaires d'ordre $n - k$.

Nous sommes ainsi conduit aux déterminants appelés *inversement orthogonaux* par M. Sylvester (¹) et dont un exemple simple est fourni, pour une valeur quelconque de n, par le déterminant de Vandermonde formé avec les racines de l'équation binôme $x^n = 1$.

6. Pour $n = 3$, ainsi que l'a encore remarqué M. Sylvester, toutes les autres solutions se réduisent à celle-là, à des changements près que l'on peut appeler insignifiants, à savoir : permutation des lignes ou des colonnes; multiplication de tous les éléments d'une même ligne ou d'une même colonne par un même facteur. Mais il n'en est plus de même pour les valeurs de n supérieures à 3 et la formation d'un déterminant maximum comporte même beaucoup plus d'arbitraire que ne l'a supposé le géomètre anglais.

Reprenons en effet la méthode indiquée dans son Mémoire (²) pour construire un déterminant maximum d'ordre $n_1 n_2$ quand on

---

(¹) *Philosophical Magazine*, t. XXXIV, p. 461-475; 1867.

(²) P. 465, n° 6.

suppose connus deux déterminants maximum Δ_1 et Δ_2, d'ordre n_1 et n_2 respectivement : on écrit n_2^2 fois le déterminant Δ_1, savoir n_2 fois en ligne horizontale sur n_2 fois en ligne verticale, formant ainsi un tableau $(\mathfrak{T})$. Puis dans le déterminant Δ_1 qui occupe dans ce tableau le $h^{\text{ième}}$ rang en ligne horizontale et le $k^{\text{ième}}$ en ligne verticale, on multiplie tous les éléments par l'élément du déterminant Δ_2 dont les indices sont h et k. Le tableau $(\mathfrak{T})$ ainsi modifié donne un déterminant maximum, car les relations $s_{h,h'} = 0$ sont vérifiées.

Mais ces relations ne cessent pas d'avoir lieu si, dans tous les déterminants Δ_1 de la première colonne, on multiplie une ligne déterminée par un certain nombre de module 1. Or le nouveau déterminant obtenu par cette opération (que l'on peut évidemment varier de plusieurs façons) n'est pas réductible au précédent par les changements insignifiants dont nous avons parlé.

Par exemple, pour $n = 4$, M. Sylvester indique les deux types

$$(4) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

et

$$(5) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & 1 & i \end{vmatrix}.$$

Notre méthode conduit au déterminant

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & a & -a \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -a & a \end{vmatrix} \qquad (a = e^{i\theta}),$$

lequel donne bien les déterminants (4) et (5) pour $a = 1$ et $a = i$, mais en est essentiellement distinct pour une valeur quelconque de θ.

7. Lorsque n est une puissance de 2, le procédé dont nous venons de parler permet d'obtenir un déterminant maximum à élé-

ments réels. Peut-on trouver de tels déterminants pour d'autres valeurs de n?

Dans ce cas, chaque élément devra être égal à ± 1, et cela de telle façon que, considérant deux lignes quelconques et comparant les éléments correspondants, il y ait autant de concordances que de discordances de signes [1].

On voit aisément que ceci ne peut avoir lieu que pour n multiple de 4. En effet, si l'on ramène les éléments de la première ligne à être des 1, la seconde ligne devra contenir autant de $+1$ que de -1, ce qui exige déjà que n soit pair : $n = 2n'$. Si l'on suppose alors dans la seconde ligne les n' premiers éléments positifs et les autres négatifs, la somme des n' premiers éléments de la troisième ligne devra être nulle; donc n' doit être à son tour un nombre pair.

D'ailleurs il existe en effet des déterminants maximum réels pour des valeurs de n non puissances de 2. Pour $n = 12$, par exemple, on arrivera au résultat de la façon suivante :

On groupera les colonnes 3 par 3 en quatre séries.

La première ligne étant composée de 1, la seconde comprendra des 1 dans les deux premières séries et des -1 dans les deux dernières; la troisième ligne aura ses quatre séries composées alternativement de $+1$ et de -1. Dans les 9 lignes suivantes, la première et la dernière série comprendront chacune 2 éléments positifs et 1 négatif; la seconde et la troisième 2 éléments négatifs et 1 positif, d'après le Tableau suivant :

1	1	1	1
1	2	2	2
1	3	3	3
2	1	2	3
2	2	3	1
2	3	1	2
3	1	3	2
3	2	1	3
3	3	2	1

les numéros indiquant dans chaque série le rang de l'élément qui est seul de son signe.

---

[1] SYLVESTER, *Échiquier anallagmatique*.

Il existe aussi un déterminant maximum réel pour $n = 20$. Pour l'obtenir, ayant encore partagé les colonnes en 4 séries de 5 chacune, on composera les trois premières lignes comme dans le cas précédent. La quatrième ligne aura, dans la première et la dernière série, tous ses éléments positifs, sauf le premier; dans la deuxième et la troisième, tous ses éléments négatifs, sauf le premier. Chacune des seize lignes qui restent comprendra, dans la première et la dernière série, deux éléments négatifs; dans la deuxième et la troisième, deux éléments positifs, d'après le Tableau suivant :

12	23	23	23
13	23	45	45
14	45	23	45
15	45	45	23
45	12	24	24
45	13	35	35
23	14	24	35
23	15	35	24
35	35	12	25
35	24	13	34
24	35	14	34
24	24	15	25
34	34	34	12
34	25	25	13
25	34	25	14
25	25	34	15

Il y a donc lieu de se demander quelles sont les valeurs de n pour lesquelles existent des déterminants maximum à éléments réels [1].

De plus, on peut rechercher, pour les autres valeurs, quel est le plus grand module que puisse atteindre le déterminant lorsqu'on impose aux éléments la condition d'être réels.

---

[1] Les déterminants maximum que nous venons de former pour $n = 12$ et $n = 20$ mettent encore une fois en évidence l'arbitraire que comporte la question actuelle; car il est clair que ces nouveaux déterminants maximum ne peuvent se déduire des procédés donnés au n° 6.

SUR UNE FONCTION A ESPACE LACUNAIRE;

PAR M. E. GOURSAT.

Dans le tome XI du *Bulletin* (2e série, p. 114; 1887), j'ai établi, comme cas particulier d'un théorème très général sur les fonctions à espaces lacunaires, que la fonction représentée par la série

$$(1)\qquad F(z) = 1 + \frac{z}{2a-1} + \frac{z^2}{2a^2-1} + \ldots + \frac{z^n}{2a^n-1} + \ldots,$$

où le module de a est égal à l'unité et son argument incommensurable avec π, ne peut pas être étendue analytiquement au delà du cercle C de rayon *un*, ayant pour centre le point $z = 0$. On peut établir cette propriété de la fonction $F(z)$ par une voie plus élémentaire que je vais indiquer ici.

Ajoutons à la série (1) la série $\frac{1}{1-z}$,

$$\frac{1}{1-z} = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n + \ldots,$$

il vient

$$F(z) + \frac{1}{1-z} = 2 + z\left(\frac{1}{2a-1} + 1\right) + \ldots + z^n\left(\frac{1}{2a^n-1} + 1\right) + \ldots$$
$$= 2\left(1 + \frac{az}{2a-1} + \ldots + \frac{a^n z^n}{2a^n-1} + \ldots\right),$$

c'est-à-dire

$$(2)\qquad F(az) = \frac{1}{2}F(z) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-z}.$$

La relation (2) s'applique tant que le module de z est inférieur à un; changeons-y z en az. On trouve

$$F(a^2 z) = \frac{1}{2}F(az) + \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-az},$$

et, par suite,

$$F(a^2 z) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-az} + \frac{1}{4}\,\frac{1}{1-z} + \frac{1}{4}F(z).$$

Changeons de nouveau z en az, et ainsi de suite; nous trou-

vons la relation générale

$$(3)\quad F(a^n z) = \frac{1}{2^n} F(z) + \frac{1}{2^n(1-z)} + \frac{1}{2^{n-1}(1-az)} + \ldots + \frac{1}{2(1-a^{n-1}z)}$$

ou

$$(4)\qquad F(a^n z) - \frac{1}{2^n} F(z) = \varphi(z),$$

$\varphi(z)$ étant une fonction rationnelle de z qui admet les n pôles du premier ordre $1, \frac{1}{a}, \frac{1}{a^2}, \ldots, \frac{1}{a^{n-1}}$.

Supposons d'abord que l'argument de a soit commensurable avec π; si l'on prend pour n la plus petite valeur telle que $a^n = 1$, la relation (4) donne pour $F(z)$ une fraction rationnelle.

Supposons, au contraire, que l'argument de a soit incommensurable avec π; la théorie des fractions continues arithmétiques nous apprend que, sur tout arc fini de la circonférence C, il y a une infinité de points représentés par des puissances entières de a, soit positives, soit négatives. Cela posé, il est impossible que la fonction $F(z)$ reste holomorphe sur un arc fini AB de la circonférence C, aussi petit qu'on le suppose. En effet, sur cet arc AB, prenons un point M correspondant à une quantité imaginaire a^{-p}, puis un point N correspondant à une quantité imaginaire a^{n-p}, où n est supérieur à p. Le nombre n étant choisi de cette façon, imaginons que l'on fasse tendre le point z vers le point M, le point $a^n z$ tendra vers le point N et le premier membre de la relation (4) devra, par hypothèse, conserver une valeur finie. Or la fraction rationnelle $\varphi(z)$ admet le pôle a^{-p} et, par suite, le second membre augmente indéfiniment lorsque z tend vers le point M. On est donc conduit à une contradiction en supposant que la fonction $F(z)$ reste holomorphe sur l'arc AB.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

JORDAN (C.). — Cours d'Analyse de l'École Polytechnique. Deuxième édition, entièrement refondue. T. I. In-8°; XVIII-612 p. Paris. Gauthier-Villars et fils; 1893.

Il ne nous appartient assurément pas de faire l'éloge du *Cours d'Analyse* de M. Jordan; qu'il nous soit seulement permis de signaler parmi les raisons qui font rechercher cet Ouvrage, dont la première édition a été épuisée en peu d'années, l'extraordinaire richesse des matières qu'il contient. L'art de l'auteur pour présenter les choses sous leur forme la plus générale, la plus abstraite et la plus condensée à la fois est vraiment singulier : pour le lecteur qui veut se donner la peine de réfléchir, la clarté de l'exposition est d'ailleurs parfaite. Comme il est évident que M. Jordan n'a pas cherché d'autres lecteurs que ceux-là, le succès de son Livre a quelque chose de rassurant.

L'épithète *entièrement refondue* appliquée à cette seconde édition semble devoir être complètement justifiée, si l'on en juge par le premier Volume, dont les dimensions ont presque doublé. Nous nous attacherons à faire surtout ressortir les différences avec la première édition (¹).

On remarquera tout d'abord les huit premiers paragraphes du Chapitre premier où les principes sont exposés de la façon la plus solide et sous une forme qui, bien souvent, semble devoir être définitive. M. Jordan prend comme point de départ la notion d'*ensemble,* dans toute sa généralité; cette notion lui permet d'exposer, d'une manière extrêmement nette, le concept d'intégrale simple ou multiple et toutes les propriétés essentielles qui se rapportent à ce concept. C'est là, assurément, une justice rendue à l'œuvre de M. Cantor : il est impossible, à l'heure actuelle, de savoir si les développements considérables que ce géomètre a tirés de quelques idées simples ont une autre valeur que leur intérêt propre; mais l'importance philosophique de ces idées, quand on veut établir les principes de l'Analyse, sans faire appel à aucune idée étrangère,

(¹) Voir *Bulletin,* t. VI, p. 260.

n'est pas douteuse; elles deviendront classiques après l'exposition qu'en a donnée M. Jordan et le parti qu'il a su en tirer.

Le second Chapitre est consacré aux variables complexes : on y trouvera la notion de fonction synectique, les propositions fondamentales sur les intégrales prises entre des limites imaginaires, la définition des fonctions élémentaires et, en particulier, des fonctions algébriques.

Le Chapitre III, relatif aux séries et produits infinis, a reçu aussi des accroissements considérables qui se rapportent surtout aux séries dont les termes sont des fonctions, et, en particulier, des puissances de la variable. Le rôle essentiel de ces dernières séries, dans la théorie des fonctions, se trouve ainsi mis en pleine lumière.

Les applications géométriques du Calcul différentiel ont été exposées à peu près comme dans la première édition et il ne semble pas en effet qu'il y eût lieu d'améliorer cette excellente exposition. Toutefois la définition de courbure a été un peu modifiée de manière à s'appliquer sans difficulté dans le cas des courbes imaginaires et, en outre, le dernier Chapitre, sur les courbes planes algébriques, a été entièrement remanié : l'auteur a voulu y introduire les résultats principaux des recherches de MM. Cremona, Halphen et Nöther. Le développement attribué à ce Chapitre est amplement justifié par l'importance des applications que les théories qu'il contient trouveront dans le Calcul intégral.

J. T.

EBERHARD. — Zur Morphologie der Polyeder. 1 vol. in-8°, IV-245 p. Leipzig, Teubner; 1891.

Les recherches vraiment originales sur les polyèdres eulériens, publiées par M. Eberhard, vont combler, à ce qu'il nous semble, une lacune dans le développement de la Géométrie.

Après avoir exposé les définitions des polyèdres isomorphes et allomorphes, et quelques propositions préliminaires relatives aux nombres des faces, des sommets et des arêtes, l'auteur prouve la nécessité de distinguer les polyèdres *généraux*, où chaque sommet se trouve à l'intersection de trois faces, des polyèdres *singuliers* dont au moins un sommet appartient à plus de trois arêtes.

Il démontre que chaque polyèdre peut être déduit d'un tétraèdre par l'introduction successive de nouveaux plans contenant au plus *cinq* arêtes.

En désignant par X_k le nombre des polygones à k sommets d'un polyèdre général, l'auteur arrive à l'équation fondamentale

$$3X_3 + 2X_4 + X_5 - X_7 - 2X_8 - 3X_9 - \ldots = 12,$$

où ne figure ni le nombre total des faces, ni le nombre des hexagones d'entre elles. Cette observation suggère l'intercalation, dans la surface du polyèdre, d'un système d'hexagones (surface élémentaire) qui détermine sur le polyèdre transformé un ensemble d'arêtes que M. Eberhard désigne par réseau élémentaire.

Chaque polyèdre contient un certain nombre de réseaux élémentaires, dont l'un est déterminé par l'ensemble des faces. Par un nombre fini d'opérations, on parvient à décider si un polygone gauche formé d'arêtes est un réseau élémentaire.

L'équation fondamentale, mentionnée ci-dessus, peut être remplacée par

$$m = 3X_3 + 2X_4 + X_5 - 12 = X_7 + 2X_8 + 3X_9 + \ldots,$$

m étant un nombre entier positif ou zéro. L'auteur prouve que chaque valeur de m définit un ensemble de polyèdres (*Bereich*), qui se compose d'un nombre fini de systèmes pour lesquels X_3, X_4, ... conservent la même valeur; enfin chaque système (*Stamm*) comprend un nombre fini de polyèdres généraux.

J. DE VRIES.

J. FITZ-PATRICK et GEORGES CHEVREL. — EXERCICES D'ARITHMÉTIQUE, ÉNONCÉS ET SOLUTIONS; avec une préface de M. *J. Tannery*. Paris, Hermann; 1893.

Un recueil de près de cinq cents problèmes d'Arithmétique, variés, classés avec ordre, allant de la numération aux principes de la théorie des nombres, ne saurait être un livre banal. Unique en son genre, l'Ouvrage que nous présentons aux lecteurs du *Bulletin* nous paraît très propre à entretenir dans le jeune public de nos lycées et collèges, et même parmi leurs maîtres, ce culte de l'Arithmétique qui, concurremment avec celui de la Géométrie

pure, constituait autrefois le fonds de tous les programmes et restera nécessairement la base de tout solide enseignement.

Dans la belle préface qu'il a écrite pour ces Exercices, M. Tannery fait allusion à la suppression de l'Arithmétique dans certains programmes.

« N'y a-t-il pas quelque imprudence, dit-il, pour le bon équilibre des esprits, dans cet amoncellement de connaissances qu'on exige des candidats, à diminuer la charge par la base? Bien des jeunes gens pressés d'arriver entrent dans les classes préparatoires avec des connaissances insuffisantes et ne s'en inquiètent pas, pourvu que ces connaissances ne figurent pas au programme..... Peut-être serait-il sage de prévenir les candidats des dangers qu'ils courent en abordant trop tôt les parties élevées des programmes, et de laisser inscrites en tête de ces programmes les connaissances fondamentales qu'ils supposent. »

Ces réflexions d'un maître aussi autorisé pourraient sans doute être appliquées à bien d'autres parties de ces mêmes programmes; elles m'ont rappelé les pages qui terminent le rapport de l'illustre Chasles sur les progrès de la Géométrie.

Ce recueil est divisé en 16 Chapitres; chacun d'eux débute par un sommaire où sont présentés dans un ordre logique les faits de la théorie classique auxquels se rapportent les problèmes qui composent le Chapitre.

Nous avons ainsi un Chapitre sur la *numération;* un autre sur *l'addition et la soustraction,* puis d'autres sur la *multiplication;* sur la *division;* sur la *divisibilité* des nombres; *diviseurs communs* des nombres entiers; *nombres premiers; fractions; fractions décimales* et nombres décimaux; *rapports et proportions;* différents *systèmes de numération; carrés* et *racines* carrées; *cubes* et *racines* cubiques; *progressions;* etc.

Ces questions, comme je l'ai dit, sont très variées. Beaucoup sont élémentaires, et très propres aux élèves moyens; beaucoup aussi évoquent des souvenirs d'examens; un assez grand nombre sont empruntées à d'anciens traités ou à des recueils périodiques ou académiques. La plupart présentent par elles-mêmes un réel intérêt et de l'originalité; plusieurs même ont de la célébrité, soit

pour avoir occupé quelque grand géomètre, soit pour se trouver liées à une tradition ou à une grande théorie.

C'est ainsi que nous relevons le fameux problème des bœufs de Newton (question 233), l'épitaphe de Diophante (q. 213); quelques pages sur les nombres de la forme $2^{2^m}+1$ considérés par Fermat et Euler et tout récemment par M. E. Lucas et le P. J. Pervouchine. La question 39 n'est autre que le problème de Platon et de Pythagore, du triangle rectangle dont les côtés sont mesurés par des nombres entiers. La question 128 nous donne le théorème de Lamé sur une limite du nombre des opérations à faire dans la recherche du plus grand commun diviseur de deux nombres. Signalons encore quelques pages très instructives sur l'extraction approchée de la racine carrée.

La question 379 nous représente Achille courant après la tortue, problème fameux, bien qu'il n'ait d'autre mérite que d'avoir mis en évidence les difficultés que présente l'introduction de l'idée de l'infini. Comme originalité, je préfère, je l'avoue, la question sur le marchand qui pèse avec des balances fausses et les questions 234, 399, qui appartiennent à ce que l'on pourrait appeler l'*Arithmétique légale;* le dernier de ces problèmes notamment, qui concerne les droits des enfants naturels, a prêté et prêtera sans doute longtemps encore à de grandes controverses.

A côté de ces questions d'Arithmétique pratique, qui n'en sont pas moins de l'Arithmétique très raisonnée, nous trouvons, développées dans les deux derniers Chapitres, une série de questions qui constituent une excellente introduction à l'Arithmétique supérieure.

Sous le titre de *Questions diverses* figurent, entre autres, la théorie des nombres triangulaires, pyramidaux, ... et, en général, des nombres figurés; la théorie des *nombres parfaits,* et celle encore moins connue des *nombres amiables;* quelques lignes d'historique accompagnent ces diverses théories et témoignent de l'érudition de l'auteur.

Le dernier Chapitre nous présente les notions élémentaires sur la théorie des nombres; les propriétés de la fonction $\varphi(u)$, les théorèmes de Fermat, d'Euler, de Wilson y sont longuement développés avec force problèmes à l'appui; la belle théorie des racines primitives suivant un module premier n'est pas oubliée.

Une Note très intéressante de M. Matrot termine le volume; elle a trait à la démonstration du théorème de Bachet concernant la décomposition d'un nombre en une somme de quatre carrés.

Cette analyse aura, nous l'espérons, mis en évidence la richesse et la diversité des matériaux mis en œuvre par l'auteur; si nous ajoutons que les solutions qu'il donne des problèmes sont rédigées avec clarté et concision, nous aurons indiqué quelle place honorable les *Exercices d'Arithmétique* de M. Fitz-Patrik sont appelés à prendre parmi nos ouvrages d'enseignement.

G. K.

DIOPHANTI. — ALEXANDRINI OPERA OMNIA CUM GRÆCIS COMMENTARIIS. Edidit et latine interpretatus est *Paulus Tannery*. Vol. I : Diophanti quæ extant omnia continens. In-18; IX-481 p. Leipzig, Teubner; 1893.

Le *Diophante* que vient de publier M. Paul Tannery fait partie de la bibliothèque gréco-latine de Teubner : il s'ajoutera aux belles éditions d'Archimède, d'Euclide et d'Apollonius que M. Heiberg a données à la même collection.

A quoi bon insister sur les services que rendent de pareilles publications, où le texte est établi avec toute la sûreté possible, où la traduction latine met le sens de l'auteur à la portée de tout homme instruit, et qui, en raison de la modicité de leur prix, peuvent entrer dans toutes les bibliothèques?

Pour le texte, c'est au manuscrit de Madrid, qui remonte au XIIIe siècle, que M. Paul Tannery a accordé confiance : il va sans dire qu'il a collationné les autres manuscrits et noté les variantes. C'est à d'autres que moi qu'il appartiendrait de faire l'éloge de cette partie de sontravail, non à cause des liens qui m'attachent à lui, mais bien à cause de mon incompétence absolue dans ces matières.

Je me contenterai de signaler le soin qu'il a apporté à restituer les symboles abréviatifs de Diophante, ce qui, chez l'auteur grec, remplace nos notations algébriques. Quelque différentes que soient les *formules* de Diophante de nos formules modernes, il semble impossible de ne pas leur attribuer le caractère de l'Algèbre.

Quant à la traduction latine, elle offre un avantage qui sera,

sans doute, fort apprécié par tous les mathématiciens : c'est d'être facilement intelligible, même pour ceux qui ne sont ni au courant de l'histoire des Mathématiques, ni familiers avec les termes techniques des anciens. L'auteur estime d'ailleurs que la langue grecque est, dans l'exposition scientifique, plus claire que la langue latine, en sorte qu'une traduction littérale risque d'être plus obscure que le texte : il n'a donc pas craint, pour la partie technique, d'adopter le langage mathématique moderne et les notations algébriques. C'est, pour le lecteur, un singulier soulagement, au moins pour celui qui tient à connaître, non pas tant la façon de parler de Diophante, que sa façon de penser et de raisonner. La nécessité de se familiariser avec le vocabulaire technique des anciens est assurément ce qui rebute le plus ceux qui ne peuvent apporter qu'un temps limité aux études historiques.

Ajouterai-je que la lecture de Diophante, ainsi rendue facile, est non seulement intéressante, mais encore très profitable? Aujourd'hui encore, on pourrait tirer grand parti de Diophante pour l'enseignement de l'Algèbre. Les problèmes du premier Livre, qui sont des problèmes déterminés et relativement faciles, sont classés avec un sens pédagogique profond et c'est avec un art curieux que les énoncés se compliquent peu à peu, que les difficultés s'accumulent. Mais c'est assurément les cinq derniers Livres arithmétiques, les problèmes indéterminés, qui peuvent fournir la plus riche moisson aux étudiants et aux maîtres : la discussion du degré de généralité des solutions de Diophante, des modifications qu'on peut apporter aux énoncés, des raisons qui lui ont fait apporter telle ou telle restriction aux données, soulève, même après Fermat, des questions du plus haut intérêt, tantôt d'une nature élémentaire, parfois d'une extrême difficulté. Quant à ces solutions, c'est merveille de voir quel parti l'auteur sait tirer des quelques identités qui sont à sa disposition, identités dont la démonstration est aujourd'hui un jeu, même pour des commençants.

Une traduction de Diophante, conçue dans cet esprit, est un véritable service rendu à la Science, et c'est à ce titre que nous la signalons ici. Oserai-je ajouter qu'il est possible d'aller encore plus loin dans cette voie? La première chose à faire, c'est sans doute de publier des textes, et, si on les traduit, de les traduire

d'une façon intelligible; c'est ce qu'a fait M. Paul Tannery. Mais pour renseigner le lecteur moderne, celui qui demande à l'érudition des résultats organisés où le départ est fait entre ce qu'il faut savoir et ce qu'il est permis d'ignorer, ne pourrait-on se contenter d'éditions très abrégées, où les raisonnements de l'auteur seraient remplacés par des raisonnements équivalents, présentés avec le langage et les notations modernes, où l'on réunirait les questions qui, à notre point de vue, ne sont pas réellement distinctes, comme celles où les données ne diffèrent que par quelque changement de signe?

Ce Diophante, réduit, ne comportant que quelques pages, M. Paul Tannery nous le donnera sans doute dans le second Volume de son édition; déjà, d'ailleurs, il nous a montré ce que l'on pouvait faire dans cette voie par les notes dont il a accompagné quelques-unes des observations de Fermat, dans la grande édition de cet illustre auteur qu'on lui doit, ainsi qu'à M. Charles Henry.

Il me semble qu'un travail de cette nature, fait pour l'ensemble des œuvres mathématiques importantes depuis l'antiquité jusqu'au XVIIIe siècle, contribuerait singulièrement à répandre la connaissance de l'histoire des Sciences mathématiques et compléterait de la façon la plus heureuse l'admirable livre de M. Moritz Cantor. Ce que l'enseignement et la philosophie de la Science gagneraient à une pareille vulgarisation est trop évident.

Un jour pourra venir où les richesses accumulées par l'érudition seront changées en pièces d'or, faciles à manier, propres à circuler. Ayons, en attendant, quelque reconnaissance pour ceux des érudits qui ne gardent pas ces richesses pour eux. J. T.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

STURM (Dr R.), professeur à Breslau. — DIE GEBILDE ERSTEN UND ZWEITEN GRADES DER LINIENGEOMETRIE IN SYNTHETISCHER BEHANDLUNG. — I. Theil : *Der lineare Complex oder das Strahlengewinde und der tetraedrale Complex.* — II. Theil : *Die Strahlencongruenz erster und zweiten Ordnung.* 2 vol. in-8°, XIV-386 p. et XIV-366 p. Leipzig, Teubner, 1892-1893.

I.

1. Les origines de la Géométrie de l'espace de points tombent dans l'instant où l'on commença à étudier les propriétés plastiques de l'étendue. Les origines de la Géométrie de l'espace de plans peuvent se faire dater de l'exacte énonciation du principe de dualité dans l'espace (1), car alors, et alors seulement, on aperçut qu'il était autant légitime et utile de prendre le plan comme de choisir le point comme élément primitif générateur de toutes les figures géométriques. A une époque bien plus rapprochée de nous appartiennent les commencements de la Géométrie de la droite, car on doit les placer dans l'instant où virent le jour les dernières recherches mathématiques de Plücker (2), quoique les racines des concepts fondamentaux de ces recherches se trouvent dans les idées extrêmement générales que le même savant avait fait connaître depuis longtemps sur la complète liberté qu'a le géomètre dans le choix de l'élément générateur des figures et sur la conséquente possibilité de construire autant de systèmes de Géométrie qu'il y a de figures dans l'espace capable de jouer le rôle d'éléments générateurs (3).

---

(1) Une relation semblable a lieu entre la Géométrie de la droite *dans le plan* et le principe de dualité *dans le plan*.

(2) *On a new Geometry of space* (*Phil. Transactions of the R. Society London*, 1865 et 1866). *Neue Geometrie des Raumes gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement* (Leipzig, 1868-1869).

Malgré cela, même avant Plücker, de nombreuses recherches de Géométrie de la droite avaient été faites par Chasles, Möbius, Cayley et d'autres; mais avec des buts et par des procédés différents : seulement après Plücker on aperçut clairement les relations intimes qui les liaient.

(3) A ces idées doivent la vie aussi la Géométrie de la sphère et des cercles de l'espace.

2. Les investigations renfermées dans le *Neue Geometrie des Raumes* sont faites à l'aide des coordonnées cartésiennes et des coordonnées homogènes dont s'est servi M. Battaglini dans les travaux sur le même sujet qui suivirent de près ceux de Plücker : par conséquent la Géométrie de la droite, dans sa première phase de développement, a été essentiellement *analytique;* mais elle a été bientôt dépouillée de cette forme accidentelle par les travaux d'un grand nombre d'habiles géomètres synthétiques ([1]) entre lesquels nous nous bornons à citer le plus connu en France, M. T. Reye. Former un tout bien organisé par ces recherches isolées en les complétant où elles présentaient des lacunes ([2]), voilà le but que s'est proposé et a atteint M. R. Sturm par l'ouvrage auquel est consacré cet article. De ce nouvel ouvrage peut donc qui voudra acquérir aisément une idée complète de l'ensemble de nos connaissances sur les figures du premier et du second degré de la Géométrie de la droite ([3]), en enlevant toutefois celles qui représentent le développement de l'idée de Klein exprimée par les mémorables mots suivants : « La Géométrie de la droite est l'étude d'une variété quadratique à quatre dimensions dans un espace linéaire à cinq. » (*Math. Ann.,* t. V, p. 261) ([4]).

L'ouvrage dont il s'agit appartient donc à la Géométrie synthétique; pas à la Géométrie synthétique *pure* dont Staudt a posé les fondements, mais à ce procédé *mêlé* dans lequel on n'emploie pas les coordonnées, mais où l'on ne refuse pas de se servir de considérations algébriques lorsqu'elles mènent plus facilement et direc-

---

([1]) *Voir* les riches données bibliographiques répandues dans l'Ouvrage dont nous allons nous occuper.

([2]) Dans certaines recherches de détail, M. Sturm a été aidé par ses disciples : cela résulte des citations qu'il fait des thèses pour le doctorat présentées à l'Académie de Münster par MM. Eck, Heinrichs, Küpper, Menzel et Rasche.

([3]) L'auteur fit une exception en faveur de certaines figures de degré plus élevé qu'on peut engendrer par des systèmes projectifs de complexes linéaires.

([4]) Il est certain qu'il pourrait paraître extrêmement séduisant d'exposer toute la Géométrie de la droite en partant de cette idée; on peut même dire que de la sorte on pénètre mieux dans la nature de cette branche de la Géométrie générale; mais nous pensons devoir nous tenir éloigné d'appréciations de ce genre, car nous croyons que le rôle de la critique soit de reconnaître si un auteur a réellement atteint le but *qu'il lui a plu* de se proposer; on peut cependant regretter que M. Sturm n'ait pas étudié assez à fond les travaux qui découlent de l'idée de Klein (en particulier ceux de M. Segre) pour en tirer tout le profit possible

tement où l'on veut arriver, à ce procédé qu'ont employé en maîtres Chasles en France, Steiner en Allemagne et Cremona en Italie et auquel notre science doit un grand nombre de résultats d'une importance hors ligne. Par conséquent M. Sturm, par son nouveau Traité, raffermit d'une manière éclatante sa conviction de géomètre orthodoxe, mais non intransigeant; s'il ne dédaigne pas l'aide toute-puissante de l'Algèbre, il n'oublie pas d'apprendre l'effective construction de toute figure qu'il considère, de distinguer les éléments réels des imaginaires et de substituer de nouvelles constructions ou démonstrations à celles qui sont en défaut (si l'on n'emploie pas le principe méthaphysique de la continuité) lorsque les données ne sont pas toutes réelles.

3. Que la place que nous avons donnée dans la littérature mathématique à l'ouvrage dont il s'agit lui appartienne par droit résulte de l'examen de ses premières 44 pages, qui forment une excellente introduction à tout cours de Géométrie synthétique moderne destiné à des élèves connaissant les premiers éléments de la Géométrie projective (1), car elles renferment les notions générales sur les transformations géométriques, les principes de correspondance algébrique dans les formes géométriques fondamentales, et autres sujets pareils qui sont les matériaux dont est formée cette partie de la Géométrie qui doit sa constitution définitive à M. H. Schubert (2).

---

(1) Cette assertion peut apparaître inexacte, car M. Sturm emploie les formules de Plücker et le théorème sur la conservation du genre d'une courbe algébrique plane par des transformations univoques. Mais la première formule de Plücker $[\nu = n(n-1) - 2d - 3k]$ peut se démontrer en peu de mots en employant seulement le principe de correspondance de Chasles, tandis que la formule donnant le nombre des points d'inflexions $[\nu = 3n(n-2) - 6d - 8k]$ peut s'établir d'une manière analogue par un raisonnement indiqué par M. Bischoff (*Annali di Matematica*, t. VI_2) : appliquant à ces deux relations la loi de dualité on trouve les deux autres formules de Plücker. Ensuite des propositions sur les surfaces réglées que M. Sturm expose au n° 38 de son livre, on peut tirer le théorème cité sur le genre par un procédé simple extrêmement remarquable dû à M. Cremona (*Grundzüge einer allg. Theorie der Oberflächen, ins Deutsche übertragen von M. Curtze;* Berlin, 1870, p. 54).

(2) L'application fréquente des méthodes de la Géométrie énumérative est un des traits les plus caractéristiques et à nos yeux sympathiques du Traité dont nous nous occupons.

Ces notions reçoivent tout de suite une application importante dans l'étude et la classification des surfaces réglées du troisième et du quatrième degré. Pour ce qui se rapporte à la distinction en deux espèces des surfaces réglées cubiques, elle est trop simple pour que nous nous arrêtions à l'établir : au contraire, nous croyons utile de faire connaître les critères de classifications pour celles du quatrième ordre, en les appliquant méthodiquement. M. Sturm, d'une façon nouvelle, arrive aux résultats que M. Cremona établit dans un célèbre Mémoire (¹) ayant pour but de compléter un travail de Cayley (²).

Une surface réglée de quatrième ordre est du genre 1 ou du genre 0. Si elle est du genre 1, elle a toujours deux droites doubles; mais celles-ci peuvent être différentes (on a alors une surface de Ière espèce) ou coïncidentes (IIe espèce). Si elle est du genre 0, elle a une courbe double du troisième ordre ou bien une droite triple. Dans le premier cas, la courbe double peut être une vraie cubique gauche (on a alors en général une surface de IIIe espèce et dans un cas particulier une de IVe), ou une conique et une droite qui la coupe (V^e^ et VIe espèces), ou enfin un couple de droites gauches et une troisième droite qui les coupe toutes les deux (VIIe et VIIIe espèces). Dans le deuxième cas la droite singulière peut être triple parce qu'elle est directrice triple de la surface (IXe et X^e^ espèces), ou parce qu'elle est en même temps directrice double et génératrice (XIe espèce), ou enfin parce qu'elle est directrice simple et génératrice double (XIIe espèce). Remarquons encore que les espèces I, II, ..., XII correspondent respectivement aux surfaces 11, 12, 1, 7, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 3, 10 de M. Cremona et aux surfaces 1, 4, 10, 8, 7, *, 2, 5, 9, 3, *, 6 de M. Cayley (³).

4. Après avoir exposé les idées générales et les méthodes destinées à être régulièrement appliquées dans la suite, M. Sturm passe à l'étude des propriétés dont jouit un complexe de droites

---

(¹) *Sulle superficie gobbe di 4° grado* (*Memorie dell' Accademia di Bologna*, t. VIII_2, 1868).

(²) *Second Memoir on Skew surfaces otherwise Scrolls* (*Phil. Transactions*, 1864).

(³) Les étoiles marquent les lacunes dans la classification de M. Cayley.

du premier degré ([1]), une congruence du premier ordre et de la première classe, et un système linéaire de première, deuxième, troisième, quatrième ou cinquième espèce (*Stufe*) de complexes du premier degré, en renvoyant à la dernière Section du Tome I la considération du complexe du deuxième degré qui a un tétraèdre comme surface singulière (*complexe tétraédral*).

A propos des théorèmes sur les systèmes linéaires de complexes du premier degré, on peut remarquer que les plus importants entre eux ne sont pas différents de ceux qui ont lieu pour les systèmes linéaires quelconques et peuvent se démontrer en général par quelques lignes d'Algèbre; mais M. Sturm les établit par des raisonnements qui sont, à vrai dire, plus longs et difficiles, mais ont l'avantage de mettre en évidence les propriétés particulières du système qui dépendent de la nature de ses éléments et d'apprendre la construction des différents éléments de ce système lorsqu'on le suppose défini par des données suffisantes.

Il ne nous est pas possible d'énoncer les différentes propositions dont s'occupe l'auteur sans sortir des limites d'une revue bibliographique. Qu'il nous suffise de remarquer que le complexe du premier degré est étudié soit directement, soit comme figure déterminée par une corrélation nulle dans l'espace ou par une cubique gauche et qu'on fait connaître sa présence dans la réduction des systèmes de forces dans l'espace et dans l'étude des mouvements infiniment petits d'un corps solide ([2]); pareillement la congruence linéaire est étudiée soit comme l'ensemble de ∞^2 droites dont tout plan et toute gerbe renferment un élément, soit comme intersection de deux complexes linéaires ([3]). Ajoutons que, quoique les propo-

---

([1]) Avant Möbius, Chasles et Staudt, le complexe linéaire avait été découvert par G. Giorgini. *Voir* mon article *Intorno a la vita e le opere di Gaetano Giorgini* (*Giornale di Matematiche*, 1893).

([2]) On pourrait ajouter son apparition dans la Statique graphique (*Théorie des figures réciproques*, de M. Cremona)

([3]) Parmi les problèmes résolus par l'auteur on trouve la *détermination du nombre des congruences du premier degré qui passent par* α ($= 0, 1, 2, 3, 4$) *droites données et ont une droite dans chacun de* $8 - 2\alpha$ *faisceaux de rayons donnés*. La solution qu'il propose est partiellement directe, mais est en partie fondée sur des résultats dus à M. Schubert. M. Martinetti a remarqué (*Rivista di Matematica*, t. II, 1893, p. 108) qu'on pouvait le résoudre par un même artifice tout à fait élémentaire dans tous les cas.

sitions démontrées appartiennent pour la plus grande partie à la Géométrie projective, l'auteur ne passe pas sous silence celles qui se rapportent à la Géométrie de mesure ([1]), ni les généralisations que ces propositions ont reçues lorsqu'on apprit comment on pouvait ôter l'ancienne division des propriétés des figures géométriques en *descriptives* et *métriques*.

5. La théorie des correspondances algébriques et des représentations joue un rôle très important dans la théorie des complexes

---

([1]) Je cite par exemple la définition et l'étude de la *surface podaire d'un point* O *par rapport à une congruence du premier degré*, c'est-à-dire le lieu des pieds des normales tirés de O sur les différents rayons de la congruence. A une surface Ω analogue donne lieu une congruence d'ordre m classe n quelconques : les propriétés les plus remarquables de Ω peuvent s'établir comme il suit.

Soit r une droite arbitraire de l'espace; si à chaque point P de r on fait correspondre une, P', des intersections de r avec les plans menés par O perpendiculairement aux droites de la congruence qui sortent du point P, on arrive à une correspondance algébrique $(m, m+n)$ dont les points unis sont les intersections de la droite r avec la surface Ω. Par conséquent : *la podaire* Ω *est de l'ordre* $2m+n$. O *est évidemment un point* m — *tiple de* Ω. Ensuite si un plan σ renferme une courbe Γ enveloppée par des droites de la congruence donnée, Ω passera par la courbe podaire par rapport à Γ du pied de la perpendiculaire tirée de O à σ.

Ω passe aussi par un certain nombre de droites de la congruence. Pour trouver ces droites remarquons que le pied P de la perpendiculaire tirée de O à g est l'intersection de g avec la droite qui passe par P et coupe g et la polaire g' de g par rapport au cercle imaginaire à l'infini C. Or, afin que comme point P on puisse prendre chaque point de g, il est nécessaire : 1° que g et g' coïncident; 2° que g ait une droite polaire indéterminée; 3° que g et g' se trouvent dans un plan passant par O. Le *premier cas* généralement n'a pas lieu, mais le *deuxième* se présente pour chaque droite de la congruence placée dans le plan à l'infini : donc Ω *passe par les* n *droites à l'infini de la congruence*. Pour examiner combien de fois on se trouve dans le *troisième cas* il faut déterminer le nombre des plans qui passent par O, par une droite g et par une tangente du cercle C qui soit la polaire g' de g. Or parmi les plans dont chacun renferme une tangente du cercle C et une droite de la congruence passant par le point de contact, il y en a $2m$ qui passent par un point arbitraire des plans à l'infini; par conséquent ils enveloppent une surface développable de la classe $2m$; ces $2m$ plans qui passent par O donnent un égal nombre de droites de Ω appuyées au cercle C. Donc Ω *passe par* $2m$ *droites qui rencontrent le cercle imaginaire à l'infini.*

Soient enfin un point arbitraire du cercle C, g une de ces droites qui passent par A; la droite g' polaire de g par rapport au cercle C est la droite tangente à C en A : A est pourtant un point m — *tiple* de la podaire. Par conséquent : Ω *a comme ligne* m — *tiple le cercle imaginaire à l'infini.*

et des congruences linéaires, et cela de deux manières différentes qu'il est bon de signaler.

I. *Représentation des figures considérées sur d'autres figures géométriques connues.* — On a, par exemple, la représentation d'une congruence du premier degré sur les points d'un plan ou d'une surface du deuxième ordre; celle d'un complexe linéaire sur les points de l'espace; celle des ∞^5 droites de l'espace sur les ∞^4 surfaces du deuxième ordre qui passent par une conique fixe (c'est au fond la célèbre correspondance découverte par M. Lie entre la Géométrie de la droite et la Géométrie de la sphère), représentation qui peut devenir uniforme lorsque la conique fondamentale se résout en deux droites. Cette dernière représentation mène à celle de l'espace réglé ordinaire sur un hyperespace à quatre dimensions ([1]), qui ne comprend pas celle (découverte par M. Cremona et étudiée par M. Sturm d'après la méthode de M. Aschieri) des droites de l'espace sur les ∞^4 coniques du plan qui sont circonscrites à des triangles circonscrits à une conique fixe. L'auteur applique ces correspondances à la démonstration des principes de correspondance dans les congruences et les complexes du premier degré.

II. *Correspondances uniformes entre deux analogues des figures considérées, en particulier de celles qui en transforment une en elle-même.* — On est amené de la sorte à déterminer les homographies et les corrélations (générales ou spéciales) qui transforment en eux-mêmes les congruences et les complexes du premier degré et à indiquer les analogies et les différences qu'il y a entre elles et celles qui transforment en elles-mêmes une surface du deuxième ordre ou une cubique gauche.

([1]) *Comp.* Chizzoni, *Sulla corrispondenza univoca fra le rette di uno spazio ordinario e i punti di uno spazio lineare a quattro dimensioni* (*Atti dell'Accademia Gisenia di Catania*, t. XX_3); Aschieri, *Sulle curva normale di uno spazio a quattre dimensioni* (*Mem. dell' Accademia dei Lincei*, IV_4); G. Loria, *Di due rappresentazioni univoche dello spazio rigato su una forma fondamentale di 4ª specie* (*Giornale di Matematiche*, t. XXVII); Pieri, *Sulla correspondenza algebrica fra due spazi rigati* (*Giornale di Matematiche*, t. XXVIII).

Il n'est pas inutile de fixer l'attention des lecteurs sur l'adoption par un géomètre de l'école de Steiner de considérations qui se rapportent à la Géométrie des espaces supérieurs.

6. Deux autres Sections de la Géométrie générale ont dans le Livre de M. Sturm de fréquentes applications et de remarquables développements : ce sont *la théorie des caractéristiques,* à l'aide de laquelle l'auteur étudie complètement les systèmes (∞^3 ou ∞^6) de surfaces du deuxième degré dont les génératrices d'un système appartiennent à une congruence ou à un complexe du premier degré, et *le calcul par symboles de transformations géométriques,* par lequel l'auteur étudie les groupes de 2^2, 2^3, 2^4 et 2^5 transformations projectives (une moitié homographies, une moitié corrélations) déterminées respectivement par 2, 3, 4 ou 6 complexes linéaires par couples en involution et donne de la sorte une illustration extrêmement élégante et instructive de la théorie des groupes finis de transformations.

7. Par des règles et des méthodes analogues procède l'auteur dans son exposition des propriétés d'un complexe tétraédral. Il le définit d'abord comme la totalité des droites qui coupent les faces d'un tétraèdre en quatre points ou projettent ces sommets par quatre plans formant un rapport anharmonique donné; mais il en démontre six autres propriétés qui peuvent également servir à le caractériser complètement. Il prouve que ces droites peuvent se répartir sur deux systèmes de ∞^4 surfaces du deuxième ordre inscrites ou circonscrites par rapport au tétraèdre fondamental, et détermine les caractéristiques de ces deux systèmes. Il fait connaître l'apparition d'un complexe de ladite espèce dans la corrélation entre deux espaces, dans un système particulier de cubiques gauches, dans la théorie des surfaces du deuxième ordre homofocales (système des *axes* de ces quadriques, d'après la dénomination de M. Reye) et en dernier lieu comme ensemble des droites également éloignées de deux points donnés ([1]), et décrit les formes particulières dans lesquelles il peut se présenter ([2]). En-

([1]) Le complexe tétraédral apparaît aussi dans la théorie des courbes gauches du quatrième ordre et de première espèce, car les tangentes d'une courbe de cette espèce appartiennent à un complexe du deuxième ordre dont la surface singulière est formée par le tétraèdre ayant pour sommets les centres des quatre sommets des cônes qui passent par la courbe.

([2]) *Voir* mon ancien Mémoire *Sulle corrispondenze projettive fra due piani e fra due spazii* (*Giornale di Matematiche*, 1884).

Une de ces formes s'obtient en conduisant de chaque point de l'espace la per-

fin, à l'étude de la représentation du complexe sur les points de l'espace, il fait suivre la détermination des homographies, des polarités, des corrélations nulles et des corrélations générales qui transforment en lui-même un complexe tétraédral quelconque.

II.

8. Entre le second et le premier Tome de l'Ouvrage dont nous nous occupons il y a une grande différence. Tandis que le premier pouvait se caractériser comme une systématisation, au point de vue de la Géométrie synthétique, des résultats découlant directement ou indirectement des recherches de Plücker, le deuxième est destiné au développement des mémorables recherches de Kummer ([1]); tandis que dans le premier l'auteur a voulu faire un Ouvrage didactique et de coordination, dans le second il se proposa et parvint à accroître nos connaissances géométriques ([2]) : on trouve en tout cela les raisons pour lesquelles l'auteur dans le Tome second s'adresse à des lecteurs qui ont puisé dans les sources originales mêmes les connaissances de haute Géométrie sur lesquelles il s'appuie et aussi les raisons pour lesquelles notre compte rendu sur le deuxième Tome sera bien plus étendu et détaillé que celui sur le premier.

9. On sait que Kummer a déterminé chaque congruence algébrique par deux nombres : l'*ordre*, c'est-à-dire le nombre m des droites de la congruence qui passent par un point quelconque de

---

pendiculaire au plan qui lui correspond par rapport à un complexe linéaire. Plus généralement soit donné un système nul (α, β, γ), c'est-à-dire une correspondance telle qu'à chaque point P correspondent α plans π passant par P, à chaque plan π correspondent β points de π et sur chaque droite d il y ait γ points auxquels correspondent des plans d. Alors (même si l'on suppose l'espace non euclidien) en conduisant de chaque point P les perpendiculaires aux plans correspondants on arrive à un complexe du degré $\alpha + \beta + \gamma$.

([1]) *Voir* le célèbre Mémoire *Ueber algebraische Strahlensysteme, etc.* (*Berliner Abhandlungen,* 1866).

([2]) Un certain nombre des résultats de M. Sturm avaient été publiés par de courtes Notes; on les trouve à présent complétés à l'aide des résultats établis par M. R. Schumacher (*Untersuchungen über das Strahlensystem 3. Ordnung und 2ᵗᵉ Klasse*, Dissertation von München, 1885; *Math. Annalen*, t. XXXVII, p. 100 et suivantes).

l'espace [1], la *classe*, c'est-à-dire le nombre n des droites de la congruence qui se trouvent dans un plan quelconque de l'espace [2]. Or le développement ultérieur de la théorie des congruences montre la nécessité d'introduire un troisième nombre [3], le *rang* de la congruence : c'est le nombre r de couples de droites qui déterminent des faisceaux de rayons auxquels appartient une droite arbitraire de l'espace. r est nul si $m = 1$ ou $n = 1$, et aussi lorsque la congruence appartient à un complexe linéaire; si au contraire elle est l'intersection de deux complexes des ordres k et k' on a

$$r = kk'(k-1)(k'-1).$$

On sait aussi que toute droite g d'une congruence est coupée par deux autres infiniment proches g' et g_1. Les points $gg' \equiv F'$ et $gg_1 \equiv F_1$ sont les *foyers* du rayon g, tandis que les plans $gg' \equiv \varphi'$ et $gg_1 \equiv \varphi_1$ sont ses *plans focaux*. Les ∞^2 foyers forment une surface $\Phi(F)$, tandis que les ∞^2 plans focaux enveloppent une autre surface $\Phi(\varphi)$: or, d'après M. Pasch, ces deux surfaces coïncident *en général* (*voir* les numéros suivants) dans la *surface focale de la congruence;* alors toutes les droites de la congruence (mais non seulement ces droites) sont des bitangentes à cette surface, dont l'ordre m_1 et la classe n_1 sont données par les équations

$$m_1 = 2n(m-1) - 2r, \qquad n_1 = 2m(n-1) - 2r;$$

il y a ∞^1 droites de la congruence dont les foyers coïncident, elles forment une surface réglée du degré $4(mn - r) - 2(m + n)$; une surface analogue et du même degré jouit de la propriété corrélative.

10. Kummer a cru à l'existence de congruences *sans surfaces focales,* douées par compensation de *courbes focales;* mais des

---

(1) Si par un point S de l'espace passent plus que m rayons d'une congruence d'ordre m, il en passe un nombre infini qui forment en général un cône d'un certain ordre h. S est alors *un point singulier de l'ordre h*. Il peut même arriver que par S passent un certain nombre t de rayons de la congruence qui n'appartient pas au *cône de rayons* relatifs à ce point singulier.

(2) Remarques corrélatives à celles de la Note précédente.

(3) Comparez ce fait avec ce qui s'est présenté dans la théorie des courbes gauches algébriques.

remarques que fait M. Sturm il découle que *toute congruence algébrique a au moins une des surfaces* $\Phi(F)$ *et* $\Phi(\varphi)$, mais qu'il y en a de spéciales qui ont de ces courbes que Kummer appelait *focales*, mais qu'il vaut mieux appeler, en suivant notre auteur, *courbes singulières*. Afin d'éclaircir ce point important, nous allons donner un court résumé des observations faites à ce sujet par M. Sturm.

a. Dans la congruence formée par les cordes d'une courbe R de l'ordre p, la surface $\Phi(\varphi)$ est formée des ∞^2 plans qui touchent R, considérés $p-2$ fois, tandis que la surface $\Phi(F)$ est la développable bitangente à R.

b. Dans la congruence formée par les droites qui coupent dans le même temps deux courbes R et R_1 des ordres p et p_1, la surface $\Phi(F)$ est la surface développable circonscrite à R et R_1 et la $\Phi(\varphi)$ se compose des plans tangents à R_1 pris p fois et plans tangents à R pris p_1 fois. Mais la surface $\Phi(F)$ disparaît lorsque R_1 est une droite et R une courbe d'ordre p qui le coupe en $p-1$ points.

c. Enfin dans la congruence formée des droites qui touchent une surface $\mathfrak{S}$ de l'ordre p et du rang ρ et qui coupent une courbe R_1 de l'ordre p_1, la surface $\Phi(F)$ est la surface $\mathfrak{S}$ prise p_1 fois et la développable circonscrite à $\mathfrak{S}$ et R_1; au contraire la surface $\Phi(\varphi)$ se compose de $\mathfrak{S}$ prise p_1 fois, des plans tangents à R_1 pris ρ fois et des pp_1 gerbes de rayons dont les centres sont dans les intersections de la surface $\mathfrak{S}$ avec la courbe R_1.

11. Après avoir exposé ces remarques générales sur les congruences d'ordres et classes quelconques, l'auteur fixe son attention sur celles d'ordre 1 et, par conséquent, du rang 0. Entre ces congruences il y en a une dont la classe est 0, c'est la gerbe de rayons. Les autres se répartissent en deux catégories, dont l'une embrasse les congruences dont les rayons ont en général des foyers distincts, tandis que l'autre, dont l'existence a échappé à Kummer, embrasse deux congruences dont chaque rayon a deux foyers confondus. La première catégorie a deux espèces, tandis que la seconde en a une seulement; on a de la sorte la classification suivante des congruences du premier ordre :

I. Lieu des cordes d'une cubique gauche (classe $n = 3$). II. Lieu des droites qui coupent une courbe d'ordre n et une droite rencontrant la courbe en $n - 1$ points (classe n quelconque). III. Lieu des ∞^1 faisceaux de rayons qu'on obtient en établissant une correspondance $(1, n)$ entre les points d'une droite et les plans par cette droite, et en considérant chaque couple d'éléments correspondants comme centre et plan d'un de ces faisceaux (classe n quelconque [1]).

Dans toutes ces congruences la surface $\Phi(F)$ disparaît, tandis que $\Phi(\varphi)$ existe et est formée comme il suit :

I. Des plans tangents de la cubique gauche. II. Des plans tangents de la courbe de l'ordre n. III. De $2n(n-1)$ gerbes de plans.

Une congruence de premier ordre et de classe n détermine sur deux plans quelconques de l'espace une correspondance uniforme en général des degrés $n + 1$; dans les trois considérées elle est une *transformation crémonienne du quatrième ordre*, une *transformation isographique* [2], ou une *transformation de M. de Jonquières* où n des $2n$ points fondamentaux simples sont à une distance infiniment petite du point fondamental n — tiple.

12. L'étude des congruences algébriques du deuxième ordre suit naturellement celle des congruences du premier ordre ; elle est faite par M. Sturm dans la suite de son Livre, où il se propose avant tout de démontrer géométriquement la plus importante proposition de Kummer. Il emploie à cet effet certaines courbes et surfaces covariantes, qui lui ont été utiles aussi lorsqu'il s'occupait auparavant des congruences du premier ordre, et qui par rapport à une congruence algébrique (m, n, r) quelconque sont définies comme il suit :

I. Surface réglée (l) du degré $m + n$ lieu des droites de la congruence qui coupent une droite fixe arbitraire l de l'espace. — II. Développable l de classe $\frac{m(m-1)}{2} + r$ enveloppée par les plans

---

[1] Les congruences de la troisième espèce pourraient vraiment se considérer comme un cas limite de celle de la deuxième, mais il vaut mieux les considérer séparément.

[2] *Voir* les articles de M. DE JONQUIÈRES dans les *Nouv. Annales de Mathématiques*, t. III, 1864, p. 97, et *Giornale di Matematiche*, t. XXIII, p. 48.

déterminés chacun par deux droites de la congruence qui partent d'un point de la droite arbitraire de l'espace l. — III. Courbe $|l|$ de l'ordre $\frac{n(n-1)}{2}+r$ lieu des points déterminés chacun par deux droites de la congruence qui se trouvent dans un plan passant par la droite arbitraire de l'espace l. — IV. Surface (P) de l'ordre $\frac{m(m-1)}{2}+r$ lieu des points où se coupent les droites de la congruence placées dans les plans qui passent par le point arbitraire de l'espace P. — V. Surface (ε) de l'ordre $\frac{n(n-1)}{2}+r$ enveloppée par les plans déterminés par les droites de la congruence qui passent par les points d'un plan arbitraire de l'espace ε.

13. La détermination des propriétés dont jouissent ces figures, de leurs relations mutuelles et des modifications dont elles sont assujetties lorsque la droite l, le point P et le plan ε prennent des positions particulières, mène l'auteur à établir un grand nombre de théorèmes qui se rapportent aux *congruences* $(2, n)$ *sans lignes singulières,* dont il s'occupe d'abord exclusivement. Une congruence de telle espèce est du rang $r=n-2$, elle a par conséquent une surface focale d'ordre de quatrième classe $2n$ (Schumacher) : cette surface a pour point double chaque point singulier de la congruence, tandis que, si ce point est de l'ordre h pour la congruence, il est $(h-1)$ — ple pour la surface (P) de tout point P de l'espace ; l'on a toujours $t=0$, $h \leqq 6$, $h \leqq n-1$. Si l'on appelle α_h le nombre des points singuliers du degré h, on a encore les importantes relations suivantes :

$$\text{(I)} \qquad \sum_h \alpha_h h = 4(n+2) \qquad \text{(Masoni)}$$

$$\left.\begin{aligned} &\text{(II)} \qquad \sum_h \alpha_h h^2 = 2n(n+2) \\ &\text{(III)} \qquad \sum_h \alpha_h h^3 = (n-1)(n+2)^2 \end{aligned}\right\} \text{(Kummer).}$$

Toute congruence de l'espèce considérée a $\frac{(n-2)(n-3)}{2}$ *rayons doubles ordinaires* (Kummer); par chacun de ses points singuliers du degré h il en passe $\frac{(h-1)(h-2)}{2}$, d'où il s'ensuit la

rationnalité de tous les cônes de rayons; si $h = 1$, le cône correspondant passe par 5 autres points singuliers; si $h = 2$, il passe par 8 autres [1] : sur chaque rayon double il y a deux points singuliers dont les ordres donnent pour sommes $n + 2$. On a encore $n \leqq 7$.

Par ces propositions et d'autres que nous laissons pour ne pas allonger trop ce compte rendu, l'auteur parvient à démontrer par des raisonnements différents de ceux de Kummer, l'existence de sept congruences du deuxième ordre, dont deux sont de sixième classe, tandis que les autres sont des classes 2, 3, 4, 5, 7. En tenant compte des nombres des ordres des différents points singuliers dans chaque cas [2], on trouve qu'on a toujours

$$\text{(IV)} \qquad \sum_h \alpha_h = 18 - n,$$

relation qui prouve que la surface focale a comme points doubles les seuls points singuliers de la congruence.

Pour trouver enfin la manière dans laquelle les points singuliers sont répartis sur les cônes de rayons, l'auteur prouve quelques nouvelles relations qu'il est important de signaler aux lecteurs du *Bulletin*. Si l'on désigne par $\alpha_h^{(i)}$ le nombre des points singuliers de degré h placés sur un cône singulier d'ordre i (y compris le sommet lorsque h est égal à i), on a

$$\text{(V)} \qquad \sum_h \alpha_h^{(i)} = 3(i+1) - \frac{(i-1)(i-2)}{2},$$

$$\text{(VI)} \qquad \left\{ \begin{aligned} &\sum_h h\alpha_h^{(1)} = 2n + 2, \\ &\sum_h h\alpha_h^{(2)} = 4n + 2, \\ &\sum_h h\alpha_h^{(3)} = 5n + 1. \\ &\sum_h h\alpha_h^{(n-1)} = -\frac{n^2 - 21n + 26}{2} \end{aligned} \right.$$

---

[1] Ces 6 points appartiennent à une même conique et ces 9 points à une même courbe gauche du quatrième ordre ayant un point double dans le sommet du cône.

[2] *Voir* le Tableau au n° 20 de cet article.

et

$$
(\mathrm{VII})\quad \left\{
\begin{aligned}
&\sum_h \frac{h(h-1)}{2}\,\alpha_h^{(1)} = \frac{n(n-1)}{2} - 1,\\
&\sum_h \frac{h(h-1)}{2}\,\alpha_h^{(2)} = n(n-1) - 1,\\
&\sum_h \frac{h(h-1)}{2}\,\alpha_h^{(3)} = n^2 - 4,\\
&\sum_h \frac{h(h-1)}{2}\,\alpha_h^{(n-1)} = n^2 - 4;
\end{aligned}
\right.
$$

de ces relations on tire de remarquables corollaires qui permettent la formation d'un Tableau d'où l'on apprend quels sont les points singuliers d'une des congruences précédentes qui se trouvent sur chaque cône de rayons.

14. La surface focale Φ d'une congruence $(2, n)$, sans lignes singulières, mais douée de N points singuliers, est du rang 12; ses plans stationnaires forment une développable de la classe $6(16-\mathrm{N})$ et ses plans bitangents une développable de la classe $2(16-\mathrm{N})(15-\mathrm{N})$. Si la surface Φ a N′ plans tangents doubles, ses droites bitangentes forment une congruence $(12, 28-\mathrm{N}')$ qui comprend la congruence d'où l'on est parti; il s'ensuit que, sans compter cette congruence, on a pour les congruences

$$(2,2),\quad (2,3),\quad (2,4),\quad (2,5),\quad (2,6)_{\mathrm{I}}\,(^1),\quad (2,6)_{\mathrm{II}},\quad (2,7)$$

une congruence résiduelle respectivement

$$(10,10),\quad (10,15),\quad (10,18),\quad (10,20),\quad (10,21),\quad (10,22),\quad (10,21).$$

Afin d'établir quelques propriétés de cette congruence résiduelle, l'auteur considère les systèmes de génératrices d'une quadrique qui font partie d'une des congruences données. Les caractéristiques d'une des séries formées par ces quadriques se trouvent aisément; on en tire de nouvelles relations de position entre les points singuliers, qui mènent à conclure que par les congruences $(2,2), (2,3), (2,4)(2,5), (2,6)_{\mathrm{II}}$ passe un certain nombre de complexes tétraédraux, et que les ∞^{18} congruences $(2,2)$ et les ∞^{19}

(1) La congruence $(2,6)_{\mathrm{I}}$ de Sturm est la $(2,6)_{\mathrm{II}}$ de Kummer et *vice versa*.

congruences $(2,3)$ peuvent s'engendrer à l'aide de trois faisceaux projectifs de rayons. Ajoutons que sur chaque quadrique f, il y a, en dehors du système ρ, un autre système analogue ρ' : le lieu de ces nouveaux systèmes ρ' est une congruence $(2,n)$ de la même espèce de celle d'où l'on est parti ; on parvient de la sorte à

$$5,\quad 3,\quad 2,\quad 2,\quad 1,\quad 0$$

congruences

$$(2,3),\quad (2,4),\quad (2,5),\quad (2,6)_{\text{II}},\quad (2,6)_{\text{I}},\quad (2,7)$$

ayant la même surface focale de la congruence du même nom qui sert comme point de départ.

D'une manière semblable les congruences

$$(2,2),\quad (2,3),\quad (2,4),\quad (2,5),\quad (2,6)_{\text{I}},\quad (2,7)$$

renferment

$$16,\quad 5,\quad 2,\quad 1,\quad 1,\quad 1$$

systèmes de ∞^2 surfaces réglées du troisième ordre : leurs directrices simples sont bitangentes aux surfaces focales de ces congruences et forment une congruence respectivement

$$(0,1),\quad (2,3),\quad (4,6),\quad (6,10),\quad (8,15),\quad (10,21);$$

on a de la sorte une définition complète des droites bitangentes aux surfaces focales des congruences $(2,5)$, $(2,6)_{\text{I}}$, $(2,7)$.

Et si on considère enfin les surfaces réglées de quatrième ordre et IVe espèce d'une congruence $(2,6)_{\text{II}}$, on trouvera de même que leurs directrices simples forment une autre congruence $(2,6)_{\text{II}}$ ayant la même surface focale que la proposée.

15. Les congruences $(2,2)(2,3)(2,4)(2,5)(2,6)_{\text{II}}$, qui appartiennent à des complexes tétraédraux, peuvent se représenter aisément sur un plan, en remarquant que, dans la représentation des droites du complexe sur les points de l'espace, chacune d'elles correspond à une surface du deuxième ordre; les deux autres, c'est-à-dire les $(2,6)_{\text{I}}$ et $(2,7)$, on peut les représenter uniformément sur les droites d'un plan en les projetant respectivement d'un de leurs points singuliers du cinquième ou sixième ordre.

On peut confirmer par ces représentations l'existence dans les congruences considérées de surfaces réglées des deuxième, troi-

sième ou quatrième degré; on tire ensuite les importantes propositions suivantes :

a. Par deux gerbes de plans en correspondance uniforme quadratique on peut engendrer une congruence (2, 2), (2, 3), (2, 4) respectivement de 80, 10, 1 manières;

b. Par deux plans dont les points soient dans une correspondance uniforme de l'ordre 3, 4, 5, 6 on peut engendrer une des congruences (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), respectivement de 40, 15, 6, 2 manières;

c. Par deux plans dont les points soient dans une correspondance uniforme de l'ordre 2, 3, 4, 5 on peut engendrer une des mêmes congruences respectivement de 80, 30, 6 + 3, 1 manières.

L'auteur remarque encore que les congruences (2, 2), (2, 3), (2, 4), (2, 5), et $(2, 6)_1$ déterminent entre les points d'un des plans singuliers dont elles sont douées et les points d'un point arbitraire de l'espace une correspondance (1, 2) (*transformation double*); il applique cette remarque à établir les principales propriétés de cette transformation que M. de Paolis a étudiée le premier directement : la nouvelle méthode de recherche, établissant un lien étroit entre deux champs apparemment tout à fait étrangers et pouvant recevoir de nombreuses applications dans les cas semblables, mérite de fixer l'attention des géomètres.

16. Dans les recherches que nous venons de résumer, sur les congruences du deuxième ordre en général, l'auteur a été presque forcé, dans plusieurs occasions, de considérer séparément les congruences des différentes classes. Mais l'étude complète de chacune en particulier est le but de la partie de l'Ouvrage de M. Sturm dont nous allons rendre compte à présent.

On considère d'abord une congruence (2, 2) (*congruence quadratique*). Elle a 16 points S singuliers du premier ordre et par conséquent 16 plans σ singuliers du premier ordre; elle est placée sur un complexe linéaire Γ et sur 40 complexes tétraédraux; sur chaque plan σ il y a 6 points S et corrélativement. La ligne $|l|$, relative à une droite quelconque l, est la droite l' polaire de l par rapport à Γ, l' est aussi la droite par laquelle passent tous les plans

de la développable l relative à la même droite. (l) est une surface réglée du quatrième ordre (1re espèce) dont l et l' sont les deux droites doubles; ces droites coupent la surface focale de la congruence (qui est une *surface de Kummer*) en deux groupes projectifs : on peut remarquer encore que le rapport anharmonique des intersections de l avec cette surface est égal à celui des quatre plans tangents de la même surface qui passe par la même droite.

Pour indiquer d'une manière expressive les points et les plans de la configuration formée par les éléments singuliers d'une surface de Kummer il est utile d'employer un système déterminé : l'auteur apporte à cet effet une modification de celui que M. H. Weber a proposé et que M. T. Reye a adopté (1), et arrive de la sorte à un grand nombre de résultats intéressants qu'il nous est impossible même de citer. Mais en dehors des points et des plans singuliers de la congruence, il convient de considérer aussi les 16 faisceaux singuliers (chacun a comme centre un point et comme plan le plan singulier correspondant) et détermine leurs relations mutuelles; ces relations sont tout à fait analogues à celles qui passent entre les droites d'une surface du quatrième ordre à conique double ou bien entre les seize droites d'une surface générale du troisième ordre qui coupe une autre même droite de la surface. Cette coïncidence n'est pas accidentelle : elle a sa raison dans ce fait que si l'on représente les droites du complexe Γ sur les points de l'espace, à la congruence donnée correspond précisément une surface du quatrième ordre à conique double : d'ailleurs, M. Geiser démontra, il y a longtemps, qu'on peut faire correspondre uniformément les points de cette surface aux points d'une surface cubique tout à fait générale.

Nous ferons allusion seulement en passant aux nouveaux *problèmes de clôture* (2) auxquels donnent lieu les droites d'une congruence quadratique; nous remarquerons au contraire que la considération simultanée des six congruences quadratiques ayant

---

(1) Il est instructif de comparer ces systèmes avec celui complètement différent exposé récemment par M. Humbert dans sa *Théorie générale des surfaces hyperelliptiques* (*Journal de Mathématiques*, t. IX$_4$, 1893, p. 29-100).

(2) Pour l'historique de la question on peut consulter ma brochure *I poligoni di Poncelet* (Turin, 1889) et ma *Rassegna di alcuni scritti sui poligoni di Poncelet* (*Bibliotheca mathematica*, 1889) qui en est un complément.

la même surface focale ramène l'auteur à l'ancien système de notations de Weber-Reye, par lequel il complète l'étude de la configuration amenée à une surface de Kummer.

17. En partant d'une congruence (2, 2) et en considérant sa surface focale, on démontre (*voir* plus haut) qu'avec ses droites bitangentes on peut former six congruences analogues. Il se présente maintenant le *problème inverse*, c'est-à-dire : étant donnée une surface du quatrième ordre avec seize points doubles, est-il toujours possible de former par ses bitangentes six congruences quadratiques? A cette importante question l'auteur répond affirmativement par une étude directe de la surface de Kummer; il trouve de la sorte, par une route tout à fait différente, les plus importantes propriétés de cette surface et des congruences quadratiques.

18. L'auteur se tourne après cela du côté de la classification des congruences quadratiques en se plaçant avant tout au point de vue de la réalité des éléments et arrive à son but par deux routes différentes.

Il s'appuie d'abord sur la représentation des droites d'une congruence (2, 2), sur les points d'une surface du quatrième ordre à conique double (*voir* n° 16). Or de la correspondance qu'on peut établir entre cette surface et une surface du troisième ordre il s'ensuit que les surfaces de quatrième ordre qui n'ont aucun point singulier en dehors des points d'une conique double peuvent se répartir en six espèces suivant que leurs seize droites sont : A. toutes réelles; B. huit réelles et huit imaginaires de deuxième espèce [1]; C. quatre réelles, quatre de première et huit de deuxième espèce; D. toutes imaginaires de première espèce; E. huit de première et huit de deuxième espèce; F toutes imaginaires de deuxième espèce [2]. Ces six espèces de surfaces ont comme correspondantes des congruences quadratiques d'espèces différentes que nous in-

---

[1] Il est inutile de rappeler qu'une droite imaginaire est de première ou de deuxième espèce, suivant qu'elle a un point (et par conséquent un plan) réel ou qu'elle n'en a aucun.

[2] Dans ce cas la congruence peut être tout à fait imaginaire.

diquerons par les lettres A, B, ..., F, et dont on peut démontrer l'existence directement en considérant la congruence comme intersection d'un complexe linéaire et d'un complexe tétraédral. Si une congruence (2, 2) est de l'espèce A, de la même espèce sont ses cinq congruences confocales; si elle est de l'espèce B (ou bien E) trois de ses congruences confocales sont de la même espèce tandis que les deux autres sont imaginaires conjuguées; si elle est de l'espèce C, une des congruences confocales est de la même espèce tandis que les quatre restantes sont imaginaires conjuguées par couples; si enfin elle est de l'espèce D (ou bien F), deux des congruences confocales sont de la même espèce tandis que les trois restantes sont de l'espèce F (ou respectivement D).

19. Mais une congruence (2, 2) peut se particulariser par la présence de *rayons doubles extraordinaires* [*voir* n° 13 (¹)]. D'après M. W. Stahl, on arrive géométriquement à ces congruences particulières en coupant un complexe tétraédral par un complexe linéaire passant par un certain nombre d'arrêts du tétraèdre singulier. On arrive de la sorte à des congruences douées d'une droite double, de deux droites doubles qui se coupent, de deux droites doubles gauches, de trois droites doubles dont deux gauches sont rencontrées par la troisième, ou de quatre droites qui sont les côtés d'un quadrilatère gauche. Les surfaces focales de ces congruences sont respectivement une surface du quatrième ordre avec une droite double, huit points doubles et huit plans tangents doubles, une surface du quatrième ordre avec deux droites qui se coupent, quatre points doubles et quatre plans tangents doubles, une surface réglée du quatrième ordre et de la première espèce, une surface réglée du quatrième ordre et de la VIIe espèce, ou enfin deux surfaces du deuxième ordre se coupant dans un quadrilatère gauche. Le nombre des congruences confocales s'amoindrit par la présence de rayons doubles extraordinaires et devient dans les cinq cas considérés respectivement 3, 1, 3, 1, 1 (²).

(¹) Un rayon double ordinaire d'une congruence n'appartient pas à la relative surface focale, mais un extraordinaire est une droite double de cette surface.

(²) Ces mêmes résultats ont été obtenus depuis longtemps et par une voie différente par M. Segre dans son beau Mémoire *Sulla geometria della retta e delle sue serie quadratiche* (*Mem. dell' Accademia di Torino*, t. XXXVII$_2$, 1884).

Il est remarquable qu'une congruence avec deux droites doubles qui se coupent se trouve entre les figures covariantes du système formé par une congruence générale et un point O; si en effet dans chaque plan ω passant par O on trace les deux droites $x_1 x_2$ de la congruence qui s'y trouvent et si l'on détermine la droite x polaire de O par rapport à l'angle $x_1 x_2$, les ∞^2 droites formeront une congruence de l'espèce indiquée.

Ajoutons encore que les droites tangentes en même temps à deux surfaces du deuxième ordre se coupant dans un quadrilatère gauche forment toujours, d'après une remarque de M. Zeuthen, deux congruences quadratiques, dont chacune peut se considérer comme l'ensemble des droites qui joignent les points correspondants d'une surface du deuxième ordre où existe une homographie de première espèce ([1]); on peut même démontrer que toute congruence (2, 2) douée de quatre droites doubles peut se construire de cette manière par une quadrique arbitraire qui passe par ces droites doubles.

Nous remarquerons en dernier lieu que l'étude des congruences quadratiques ayant deux droites doubles mène l'auteur à la suivante, belle propriété des surfaces réglées du quatrième degré et de première espèce : les tangentes d'une telle surface ayant un contact de troisième ordre forment seize systèmes de génératrices d'une surface du deuxième ordre et leurs points de contact sont répartis sur seize génératrices.

20. Les problèmes qui se présentent dans l'étude des congruences (2, 2) ont leurs analogues dans les autres congruences du deuxième ordre. On peut, par conséquent, déterminer le nombre N_h de leurs points singuliers du degré h et la configuration qu'ils forment, le nombre γ des congruences confocales (de la même classe), le nombre δ des rayons doubles qu'elles ont et le nombre τ des complexes tétraédraux qui les contiennent; le Tableau suivant résume les résultats principaux auxquels on arrive en traitant ces questions :

([1]) C'est-à-dire qui transforme en lui-même chaque système de génératrices de la surface.

	N_1.	N_2.	N_3.	N_4.	N_5.	N_6.	γ.	δ.	τ.
(2,2)....	16						5	0	40
(2,3)....	10	5					5	0	10
(2,4)....	6	6	2				3	1	3
(2,5)....	3	6	3	1			2	3	1
$(2,6)_{\mathrm{I}}$...	1	4	6		1		1	6	0
$(2,6)_{\mathrm{II}}$...		8		4			2	6	1
(2,7)....			10			1	0	10	0

L'auteur, pour la congruence d'une classe > 3, ne s'occupe pas du *problème inverse* que, *dans le n° 17, nous avons énoncé pour les congruences* (2,2) et se borne à la résoudre affirmativement pour celles de troisième classe; et il ne s'arrête pas à la classification des congruences d'une classe > 2 d'après la réalité de leurs éléments exceptionnels (*voir* n° 18). Au contraire il rappelle leurs constructions par des formes fondamentales (n° 14), et remarque encore certaines nouvelles constructions des congruences des classes 3 et 4.

Les congruences corrélatives aux congruences (2,5), $(2,6)_{\mathrm{I}}$ et (2,7) peuvent se construire de la manière suivante, indiquée sous une forme bien plus générale par Caporali [1] : « On a dans un plan un système linéaire de ∞^3 coniques qui passent toutes par $\Theta = 0, 1, 2$ points fixes; on détermine une correspondance projective entre ces courbes et les plans de l'espace : alors aux ∞^2 coniques du système qui passent par un point arbitraire X, correspondent ∞^2 plans passant par un point déterminé X'; on arrive de la sorte à ∞^2 droites XX' qui forment une congruence $(7 - \Theta, 2)$ ».

Si deux surfaces du deuxième ordre se correspondent dans une homographie de l'espace, les intersections des ∞^2 couples de plans qui touchent les deux surfaces dans un couple de points correspondants forment en général une congruence $(2,6)_{\mathrm{II}}$, mais elles peuvent former dans certains cas une des congruences (2,5), (2,4), (2,3), (2,2) : il s'ensuit que ces congruences peuvent se considérer comme des cas particuliers de la $(2,6)_{\mathrm{II}}$. Cette prérogative des congruences de cette dernière espèce est utilisée par l'auteur pour démontrer l'existence et déterminer les propriétés des

---

[1] Dans un travail *Sopra alcuni sistemi di dirette* (*Memorie di Geometria*, p. 126. Naples, 1888), où il étudia les congruences qu'on obtient en joignant chaque point d'une surface rationnelle à sa représentation sur un plan.

congruences (2,2), (2,3), (2,4), (2,5) et $(2,6)_{II}$ douées d'une droite double extraordinaire; il ajoute qu'il y a des congruences (2,3) et (2,4) ayant deux droites doubles qui se coupent; mais il laisse dépourvues d'une solution définitive les deux questions suivantes : Y a-t-il des congruences (2,5) et $(2,6)_{II}$ douées de deux droites doubles extraordinaires? y a-t-il des congruences $(2,6)_{I}$ et (2,7) ayant des droites doubles extraordinaires?

21. Les congruences du second ordre et d'une classe supérieure à 2 et les congruences corrélatives se rencontrent au cours de plusieurs théories géométriques. Si, par exemple, on considère les ∞^2 cubiques gauches qui passent par cinq points fixes, leurs tangentes qui ont les points de contact sur un plan donné forment une congruence analogue qui est aussi le lieu des axes des surfaces du deuxième ordre de rotation qui passent par cinq points. Au contraire, à une congruence du sixième ordre et de la deuxième classe on arrive en considérant le lieu d'une droite dont trois points parcourent trois plans donnés : afin d'établir ce résultat important, M. Sturm est amené à une longue mais très intéressante digression sur les figures géométriques (dont plusieurs se rapportent à la Géométrie de la droite) engendrées par le mouvement d'une droite dont un certain nombre de points est obligé à rester sur autant de plans ou de droites donnés.

22. Ayant fini l'exposition des propriétés des congruences sans lignes singulières (que Kummer a déterminées d'une façon tout à fait complète), l'auteur passe aux *congruences douées de lignes singulières,* et, utilisant les investigations de M. Schumacher que nous avons citées auparavant, il complète le dénombrement des congruences du deuxième ordre, ajoutant de la sorte une pierre à l'édifice splendide dont Kummer a jeté les bases.

Afin de caractériser le progrès que la Géométrie de la droite est par conséquent redevable à MM. Schumacher et Sturm, rappelons que les congruences qui ont des lignes singulières sont formées des cordes d'une courbe gauche, ondes droites qui coupent deux courbes données, ou bien elles ont une seule ligne singulière s qui est le lieu d'un des foyers des rayons de la congruence.

En supposant que l'ordre de la congruence soit égal à 2, *dans*

le premier cas la courbe considérée est une courbe gauche du quatrième ordre et première espèce; la congruence est alors de la sixième classe; sa surface focale comme lieu de points se décompose dans les quatre cônes du deuxième ordre qui passent par la courbe, comme enveloppe des ∞^2 plans tangents à cette courbe.

Dans le second cas la congruence est formée par les droites qui coupent deux coniques ayant communs deux points, ou bien par les droites qui coupent une courbe de l'ordre n et une droite qui la coupe en $(n-2)$ points; la classe de la congruence est dans ces deux sous-cas 4 et n.

La discussion du *troisième cas* est plus compliquée et difficile. Alors si s est une ligne droite on a $r=0$; tandis que si s est du degré n on a (en employant les notations qui nous ont servi dans une note au n° 9) $h=1$, $t=1$, $r=n-1$ ou bien $h=2$, $t=0$, $r=n-s$. Nous allons examiner successivement ces trois hypothèses.

a. Lorsque s est une droite, la congruence peut être formée par les tangentes d'une surface T de l'ordre p ayant s pour droite p — tiple qui coupent la même droite s : l'auteur suppose en général que T n'ait aucun point singulier en dehors de la droite s, mais lorsque $p=4$ il traite aussi les cas dans lesquels T a des points singuliers isolés afin de parvenir à des résultats utiles dans la théorie des complexes du deuxième ordre. Mais la congruence peut être aussi composée par les ∞^1 faisceaux de rayons qui ont le centre sur s en supposant qu'entre ces points et ces plans il y ait une correspondance algébrique : on arrive de la sorte à des congruences qui ont échappé à Kummer (*voir* n° 11).

b. Dans la deuxième hypothèse, la congruence est ou le lieu des droites tangentes à un cône du deuxième ordre dans les points d'une courbe rationnelle de l'ordre n qui appartient au cône et passe $n-2$ fois par son sommet, ou bien (chose que Kummer n'a aperçue que dans certains cas très particuliers) est le lieu des ∞^1 faisceaux de rayons ayant leurs centres sur une courbe unicursale de l'ordre n et leurs plans tangents à un cône du deuxième ordre, en supposant qu'il existe entre les points de la courbe et les plans du cône une correspondance uniforme telle que chaque point soit placé sur le plan qui lui correspond.

c. Dans la troisième hypothèse, le cône de rayons relatif à un point arbitraire de s peut être ou un vrai cône du deuxième ordre ou un couple de plans. Dans le deuxième cas, la congruence est formée par les tangentes d'un cône quadrique qui coupent une courbe plane d'un certain ordre p et qui a pour point $p - 1$ — ple le sommet du cône. Dans le premier cas (qui a complètement échappé à Kummer) la courbe singulière ne peut être qu'une conique, une cubique plane, ou une cubique gauche; on a, par conséquent, les trois congruences suivantes :

I. Lieu des droites tangentes dans les points de la courbe singulière à une surface du quatrième ordre douée d'une conique double et de quatre points doubles isolés;

II. Lieu des droites tangentes à une surface du troisième ordre avec quatre points doubles dans les points où elle est coupée par un de ses plans tangents;

III. Lieu des droites tangentes dans les points de la courbe singulière à une surface réglée du quatrième ordre et de la troisième espèce.

Les classes de ces congruences sont respectivement 4, 6, 6; la détermination et l'étude de leurs surfaces focales mènent à un grand nombre des propriétés de ces congruences; le lecteur l'apprendra dans le travail original; mais il n'est pas inutile de remarquer qu'entre ces propriétés il n'y a pas celle (tout récemment découverte par M. Montesano) que ces trois nouvelles congruences appartiennent toutes à un complexe tétraédral.

Par ces importants résultats se clôt le Tome II de l'Ouvrage de M. Sturm. Le Tome III et dernier, à cause des thèmes qu'il traite (les complexes du deuxième ordre en général), ne sera pas moins intéressant que les précédents. Comme l'auteur ne nous fait pas espérer qu'il paraisse bientôt, nous n'avons pas voulu attendre son apparition pour signaler l'acquisition d'un Ouvrage qui, même dans l'état où il est maintenant, doit prendre sa place dans la bibliothèque de tout géomètre et est appelé à réveiller à un plus haut

degré l'intérêt des mathématiciens pour la Géométrie de la droite. En espérant que dans un jour prochain nous devrons prendre une nouvelle fois la plume pour rendre compte de sa continuation, nous souhaitons au digne successeur de M. Schröter que les sérieuses occupations annexées à la place de professeur dans une grande Université ne le contraignent pas à accroître la collection (hélas! trop nombreuse) d'Ouvrages mathématiques incomplets.

Gênes, août 1893.

GINO LORIA.

THÉON DE SMYRNE. — EXPOSITION DES CONNAISSANCES MATHÉMATIQUES UTILES POUR LA LECTURE DE PLATON, traduite pour la première fois du grec en français par *J. Dupuis*. — 404 pages in-8. Paris, Hachette, 1892.

Théon de Smyrne, platonicien qui paraît avoir vécu au commencement du second siècle de notre ère, avait composé, pour les étudiants en Philosophie de son temps, un Ouvrage mathématique élémentaire qui n'offre aujourd'hui qu'un intérêt historique, mais constitue en tout cas un des documents les plus importants sur l'Arithmétique (théorique) des Grecs et sur l'Astronomie (ou plutôt la Cosmographie) avant Ptolémée.

On considère le plus souvent cet Ouvrage comme incomplet; il est plutôt simplement en désordre. On n'en a longtemps connu que la première moitié, éditée par Ismaël Boulliau en 1644 et divisée par lui en deux parties : Arithmétique et Musique; la seconde moitié, sur l'Astronomie, a été mise au jour par Th.-H. Martin; la fin paraît manquer, car les derniers mots du texte annoncent que Théon va parler d'après Thrasylle « de l'harmonie dans le monde », et ce sujet est annoncé depuis longtemps comme devant former le couronnement de l'œuvre, tandis que « l'harmonie dans les instruments » et « l'harmonie dans les nombres » ont été traitées avant l'Astronomie.

On est tout d'abord enclin à penser que le morceau qui semble perdu concernait les spéculations prétendues pythagoriennes sur l'harmonie des sphères. C'est ce qu'a cru Th.-H. Martin, et M. Dupuis se range à cette opinion, que je ne puis partager. Théon s'est en effet déjà étendu sur cette matière au Chap. XV de son Astronomie, et il n'a pas à y revenir. Je remarque d'autre part

que, dans la partie intitulée : *Sur la Musique*, se trouve tout un groupe de Chapitres (XXXVII à XLIX) intercalés hors de leur place, car, à la fin du Chap. XXXVI, Théon annonce qu'il va parler des proportions et des médiétés, et c'est là un sujet qu'il n'aborde qu'au Chap. L.

Celui auquel sont consacrés les Chapitres intercalés était d'ailleurs traditionnel dans l'École pythagoricnne; nous le retrouvons amplement développé dans les *Théologoumènes de l'Arithmétique;* c'est une revue des nombres de la décade avec l'énoncé de leurs propriétés les plus saillantes, grossi de rapprochements mystiques et de remarques passablement puériles; mais Théon donne à ce morceau un caractère spécial en y faisant prédominer l'étude du quaternaire $1 + 2 + 3 + 4$, où il montre les rapports numériques des accords musicaux, et d'où, d'après lui, dérive l'harmonie de l'univers. Les développements dans lesquels il entre à cet égard, et qui ne concernent ni l'Arithmétique, ni la Musique, appartiennent évidemment au sujet qu'il n'avait traité qu'à la fin de son Ouvrage. Un copiste aura détaché tout cet ensemble pour le rapprocher de la partie plus spécialement consacrée à la Musique.

On admet également que Théon, dans une partie perdue de son Ouvrage, avait traité de la Géométrie. C'est là, je crois, une erreur; notre auteur, tout en promettant d'être clair, même pour qui n'a aucune teinture des Mathématiques, admet expressément que les lecteurs auxquels il s'adresse doivent avoir étudié les premiers éléments de la Géométrie. Je considère même comme interpolé le Chap. LIII, *Sur les figures,* dans lequel sont rappelées une série de définitions géométriques. Ce Chapitre rompt en effet sans raison l'exposition de la théorie des médiétés, et précisément après cette remarque incidente qu'il n'est pas nécessaire de s'étendre sur ce qu'Ératosthène a dit des proportions au sujet des figures de Géométrie. Il n'y a pas d'ailleurs de lacune apparente dans l'Ouvrage, et la transition des différentes parties les unes aux autres y est clairement marquée, sans que nulle part il soit dit que des détails sur la Géométrie rentrent dans le plan général.

Après l'Introduction, Théon a abordé l'Arithmétique, distingué les différentes sortes de nombres, indiqué leurs définitions et leurs propriétés. « Mais il y a aussi, ajoute-t-il, des nombres

qu'on appelle consonants »; c'est là le début de la seconde Partie, dont les seize premiers Chapitres contiennent un exposé de la théorie de la Musique proprement dite (harmonie dans les instruments); notre auteur reprend ensuite (Chap. XVII à XXXII) une question essentiellement arithmétique, celle des rapports, qui le conduit à la proportion harmonique et le ramène ainsi (Chap. XXXIII à XXXVI) aux relations de consonance et à ce que les anciens appelaient la *division du canon* (règle), c'est-à-dire la détermination numérique de la longueur des diverses cordes de la lyre. Venait ensuite, naturellement, l'étude des diverses proportions et médiétés, et, le cadre de ce qu'il voulait dire sur l'harmonie dans les nombres étant ainsi rempli, Théon passait à l'Astronomie, pour terminer par le morceau dont nous avons signalé le déplacement.

C'était au reste un simple compilateur, mettant bout à bout des morceaux empruntés à d'autres auteurs (Adraste et Thrasylle pour la seconde partie, Adraste et Dercyllide pour l'Astronomie); il ne se préoccupe guère de faire de cette mosaïque un ensemble homogène et bien coordonné. J'en donnerai plus loin un exemple.

M. Dupuis a reproduit le texte grec en proposant diverses corrections à celui qui a été établi par Hiller (Leipzig, Teubner, 1878). Sa traduction est assez facile à lire et généralement exacte; cependant on ne peut toujours s'y fier absolument.

Par exemple (p. 45, l. 26, suiv.), il définit les nombres *parallélogrammes* ceux qui ont un côté (facteur) plus grand que l'autre de 2 unités. D'après le texte grec, il faudrait ajouter « ou d'un plus grand nombre ». M. Dupuis remarque en note qu'il supprime cette addition, parce que, si on la conserve, la définition du nombre *parallélogramme* devient identique à celle du nombre *promèque* $a(a+b)$ donnée plus loin (p. 51) et qu'entre ce dernier et l'*hétéromèque* $a(a+1)$, défini p. 43, il lui semble naturel d'admettre l'intermédiaire $a(a+2)$.

Je ne puis partager cette manière de voir; l'*hétéromèque* $a(a+1)$ avait été distingué par les Pythagoriens comme somme d'une série de nombres pairs consécutifs commençant à 2, et opposé au *carré*, somme de nombres impairs commençant à l'unité. Aucune trace ni aucun motif d'une distinction analogue n'existent pour les nombres $a(a+2)$; le fait est simplement que Théon a

compilé deux auteurs différents dont l'un appelait *promèque* ce que l'autre appelait *parallélogramme*.

En dehors de notes présentant tous les développements que l'on peut désirer sur certains points, le traducteur a ajouté à son volume, comme épilogue, un mémoire qu'il appelle définitif *Sur le nombre géométrique de Platon*. Il s'agit d'un passage de la *République* (VIII, p. 546 *b.-c.*) dont l'obscurité est célèbre et dont M. Dupuis, depuis 1882, croit avoir trouvé l'explication complète. Il a certainement contribué, pour une part qui n'est pas négligeable, à éclaircir certains points; en tous cas, depuis quelques années, un pas décisif paraît fait vers la solution, en ce sens que la dernière partie de la phrase platonicienne, celle qui, à première vue, semble la plus énigmatique, est aujourd'hui entièrement élucidée. Platon y désigne, sous des termes techniques dont le sens n'est plus ambigu, deux nombres distincts, 10000 et 7500. Mais on ne sait pas encore que faire de ces deux nombres ni comment s'en servir pour expliquer le reste (1). La combinaison de M. Dupuis, qui aboutit à une période de 760000 ans, présente de sérieuses difficultés philologiques et n'a guère obtenu d'adhésions dont il y ait lieu de tenir compte. Si elle paraît relier le nombre géométrique de Platon au cycle lunisolaire de dix-neuf ans de Méton, il convient d'observer que, quoique ce dernier fût Athénien, sa période ne fut adoptée dans sa patrie, comme Boeckh l'a démontré, que bien après la mort du disciple de Socrate. Je remarque également que c'est d'après une légende insoutenable que le terme de *nombre d'or* viendrait, comme le répète M. Dupuis, d'une inscription en lettres d'or sur des tables d'airain, contemporaine de Méton et attestant ainsi la célébrité acquise dès l'origine par le cycle de dix-neuf ans. J'ai montré, dans mes *Re-*

---

(1) D'après un fragment d'un commentaire inédit de Proclus, connu depuis 1886 seulement et que M. Dupuis a traité trop légèrement, il n'est pas douteux que ces deux nombres ne soient engendrés comme somme, l'un des termes carrés, l'autre des termes non carrés de la progression géométrique

$$2700 : 3600 : 4800 : 6400,$$

et ne se relient ainsi d'autre part au triangle rectangle semblable à 3, 4, 5, dans lequel la hauteur et les perpendiculaires abaissées de son pied sur les côtés sont représentées par des nombres entiers.

cherches sur l'histoire de l'Astronomie ancienne (¹), que Méton fut surtout connu autrement de ses concitoyens; quant à l'expression de *numerus aureus,* je rappelle qu'elle a pour origine l'habitude prise au moyen âge de marquer le nombre en lettres d'or sur les calendriers manuscrits. PAUL TANNERY.

LUCAS (ÉDOUARD). — RÉCRÉATIONS MATHÉMATIQUES, t. III. (*Le calcul digital. — Machines arithmétiques. — Le caméléon. — Les jonctions de points. — Le jeu militaire. — La prise de la Bastille. — La patte d'oie. — Le fer à cheval. — Le jeu américain. — Amusements par les jetons. — L'étoile nationale. — Rouge et noire*). — 200 p. in-8°. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893.

MM. Delannoy, Laisant et Lemoine viennent de publier, d'après les papiers laissés par le regretté Ed. Lucas, un nouveau volume de *Récréations mathématiques,* et ils nous en promettent un quatrième. Cette suite posthume aura, sans nul doute, le même succès que les deux volumes parus du vivant de l'auteur, car on y retrouvera la même verve et le même talent d'exposition.

Il est cependant permis, surtout à propos des deux premières Récréations, de penser que Lucas ne les eût pas reproduites telles quelles; ce sont des fragments, déjà imprimés, de deux conférences : l'une sur la pratique du calcul, au Conservatoire des Arts et Métiers (18 janvier 1885), l'autre sur les machines à calculer, au congrès de Blois (8 septembre 1884) de l'Association française pour l'avancement des Sciences. Il y a là 86 pages qui sont certainement des plus amusantes et des plus instructives à la fois, et où quiconque veut essayer de vulgariser la science trouvera un modèle qu'il s'agit seulement de pouvoir imiter. Évidemment les éditeurs ne pouvaient que réimprimer *ne varietur* ces brillantes causeries; mais il faut avouer que, dans un livre, les plaisanteries du mandarin N. Claus (de Siam), du collège de Li-Sou-Stian, sont parfois un peu froides; ce qui excite les rires d'un public, ce qui délasse dans les colonnes d'un journal, peut être hors de propos dans un

---

(¹) Paris, Gauthier-Villars, 1893.

in-octavo : Lucas l'eût senti lui-même, et il n'eût pas été embarrassé, car son fonds était inépuisable, pour mettre à la place quelques autres saillies aussi humoristiques, mais un peu plus délicates.

Les nombreux renseignements historiques que présentent ces deux premières Récréations appellent des réflexions analogues. Lucas avait lu beaucoup et son sens critique était très juste; mais il ne prétendait évidemment pas, dans ses conférences, faire œuvre d'érudition et ses assertions ne peuvent faire autorité. On regrette dès lors que pour certaines d'entre elles, en désaccord avec ce qui est couramment admis, les sources ne soient pas indiquées; sur les machines à calcul, une bibliographie spéciale fait d'autant plus défaut que le sujet se trouve forcément très écourté et que pour nombre d'appareils les indications sont plus que sommaires.

Les jeux étudiés dans les cinq Récréations suivantes se rapportent pour le plus grand nombre au type de la marelle ou à celui du taquin. Quelques-uns sont des amusements spéciaux avec des jetons ou des dames. Le jeu de rouge et noire est un nouveau système de cartons, proposé par Martin Gall, et avec lequel les combinaisons sont plus variées qu'avec les cartes ordinaires.

Nombre de solutions ont été empruntées par Lucas à M. Delannoy, l'un des éditeurs; elles sont en général d'une singulière élégance : je citerai en particulier l'indication de la marche pour le jeu des jonctions. Des points en nombre quelconque étant marqués, deux joueurs, à tour de rôle, joignent deux points, et non plus, par un trait, en observant qu'un point ne doit pas servir d'extrémité à plus de deux traits; que d'un point à un autre, il ne doit pas être mené plus d'un trait; que deux traits ne doivent pas se croiser ni un trait se recouper lui-même. Si l'on joue correctement, le premier gagne quand le nombre des points est 2 ou un multiple de 4 moins 1; dans tous les autres cas, il doit perdre.

PAUL TANNERY.

MÉLANGES.

SUR LES INTÉGRALES PSEUDO-ELLIPTIQUES DÉPENDANT DES RADICAUX DU QUATRIÈME ET SIXIÈME DEGRÉ;

PAR M. J. DOLBNIA.

1. Cherchons les conditions nécessaires et suffisantes pour que, à une certaine valeur de H, l'intégrale

$$J = \int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}$$

soit exprimée par des logarithmes.

A cet effet, supposons

$$x - c = \frac{1}{y};$$

alors

$$j = -\frac{c+\mathrm{H}}{\sqrt[4]{(c-a)^2(c-b)^3}} \int \frac{y+\mathrm{G}}{y\sqrt[4]{(y+\alpha)^2(y+\beta)^3}}\,dy,$$

$$\mathrm{G} = \frac{1}{c+\mathrm{H}}, \qquad \alpha = \frac{1}{c-a}, \qquad \beta = \frac{1}{c-b}.$$

Supposons

$$\frac{dy}{\sqrt[4]{\frac{128}{3}(y+\alpha)^2(y+\beta)^3}} = \partial z$$

et déterminons y par l'équation différentielle

$$\left(\frac{dy}{dz}\right)^4 = \frac{128}{3}(y+\alpha)^2(y+\beta)^3,$$

ainsi que par la condition que y a son infini pour $z = 0$. Alors

$$y = 6p^2z - \beta,$$

$$g_2 = \frac{2(\beta-\alpha)}{3}, \qquad g_3 = 0,$$

$$p'z = \sqrt{4p^3z - \frac{2(\beta-\alpha)}{3}pz},$$

$$j = -\frac{4(c+\mathrm{H})}{\sqrt[4]{6(c-a)^2(c-b)^3}} \int \frac{y+\mathrm{G}}{y}\,dz,$$

ou

$$j = -\frac{4(c+\mathrm{H})z}{\sqrt[4]{6(c-a)^2(c-b)^3}} - \frac{4}{\sqrt[4]{6(c-a)^2(c-b)^3}} \int \frac{dz}{6p^2z-\beta}.$$

Calculons maintenant l'intégrale

$$A = \int \frac{dz}{p^2 z - \frac{\beta}{6}}.$$

En posant

$$\frac{\beta}{6} = p^2 z_0,$$

nous avons

$$\frac{1}{p^2 z - \frac{\beta}{6}} = \frac{1}{2 p z_0}\left(\frac{1}{p z - p z_0} - \frac{1}{p z + p z_0}\right).$$

Nous avons encore

$$\frac{1}{p z - p z_0} = \frac{1}{p' z_0}[\zeta(z - z_0) - \zeta(z + z_0) + 2\zeta z_0].$$

En outre, en posant

$$\sqrt{\mu} = -\sqrt{-1} = -i$$

dans la formule

$$p\left(\frac{z_0}{\sqrt{\mu}}, \mu^2 g_2, 0\right) = \mu p(z_0, g_2, 0),$$

nous obtiendrons

$$-p(z_0 i, g_2, 0) = p(z_0, g_2, 0),$$

par conséquent

$$\frac{1}{p z + p z_0} = \frac{1}{p'(z_0 i)}[\zeta(z - z_0 i) - \zeta(z + z_0 i) + 2\zeta(z_0 i)];$$

donc

$$\frac{1}{p^2 z - \frac{\beta}{6}} = \frac{1}{2 p z_0 p' z_0}\Big\{[\zeta(z - z_0) - \zeta(z + z_0)]$$
$$+ i[\zeta(z - z_0 i) - \zeta(z + z_0 i)] + 4\zeta z_0\Big\};$$

par conséquent

$$A = \frac{2 z \zeta z_0}{p z_0 p' z_0} + \frac{1}{2 p z_0 p' z_0}\log\left\{\frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)}\left[\frac{\sigma(z - z_0 i)}{\sigma(z + z_0 i)}\right]^i\right\}.$$

Calculons maintenant $p z_0 p' z_0$. De l'équation

$$p' z = \sqrt{4 p^3 z - \frac{2(\beta - \alpha)}{3} p z},$$

nous aurons

$$p' z_0 = \sqrt{\frac{\beta}{6}}\sqrt{\frac{2\alpha}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{6\alpha^2\beta};$$

par conséquent

$$p z_0 p' z^0 = \frac{1}{3}\sqrt[4]{\frac{\alpha^2\beta^3}{6}},$$

$$p z_0 p' z_0 = \frac{1}{3\sqrt[4]{6(c-a)^2(c-b)^3}};$$

par conséquent

$$\begin{aligned}\Lambda = {} & 6\zeta z_0 \sqrt[4]{6(c-a)^2(c-b)^3}\, z \\ & + \frac{3}{2}\sqrt[4]{6(c-a)^2(c-b)^3}\log\left\{\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)}\left[\frac{\sigma(z-z_0 i)}{\sigma(z+z_0 i)}\right]^i\right\}:\end{aligned}$$

donc

$$j = -\frac{4(c+\mathrm{H})z}{\sqrt[4]{6(c-a)^2(c-b)^3}} - 4\zeta(z_0)z - \log\left\{\frac{\sigma(z-x_0)}{\sigma(z+z_0)}\left[\frac{\sigma(z-z_0 i)}{\sigma(z+z_0 i)}\right]^i\right\}.$$

Si nous choisissons H sous la condition

$$\frac{c+\mathrm{H}}{\sqrt[4]{6(c-a)^2(c-b)^3}} + \zeta(z_0) = 0.$$

nous aurons définitivement

$$-\int \frac{(x+\mathrm{H})\partial x}{\sqrt[4]{(x-a^2(x-b)^3(x-c^3}} = \log\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)} + i\log\frac{\sigma(z-z_0 i)}{\sigma(z+z_0 i)}.$$

Nous avons en outre

$$p z - p z_0 = -\frac{\sigma(z+z_0)\sigma(z-z_0)}{\sigma^2 z\,\sigma^2 z_0},$$

$$p z - p z_0 i = -\frac{\sigma(z+z_0 i)\sigma(z-z_0 i)}{\sigma^2 z\,\sigma^2 z_0 i};$$

par conséquent

$$\begin{aligned}-\int \frac{(x+\mathrm{H})\partial x}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}} = {} & -\log(p z - p z_0) - i\log(p z - p z_0 i) \\ & + 2\log\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma z} + 2i\log\frac{\sigma(z-z_0 i)}{\sigma z}.\end{aligned}$$

Si $z_0 = \frac{2\omega}{m}$ est une partie commensurable d'une période, nous avons

$$\log\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma z} = -\frac{1}{m}\log\prod_{\rho=0}^{\rho=m-1}\{p(z+\rho z_0) - p z_0\}^{\rho-1},$$

$$\log\frac{\sigma(z-z_0 i)}{\sigma z} = -\frac{1}{m}\log\prod_{\rho=0}^{\rho=m-1}\{p(z+\rho z_0 i) - p z_0 i\}^{\rho-1} \quad (^1).$$

(¹) Voir *Bulletin des Sciences mathématiques*, p. 137; mai 1893.

donc

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}$$
$$= \log\{(pz-pz_0)(pz-pz_0 i)^i\}$$
$$+ \frac{2}{m}\log \prod_{\rho=0}^{\rho=m-1} \{[p(z+\rho z_0)-pz_0][p(z+\rho z_0 i)-pz_0 i]^i\}^{\rho-1}.$$

Nous avons le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donné*

$$g_2 = \frac{2(b-a)}{3(c-a)(c-b)}, \qquad g_3 = 0,$$
$$pz_0 = \frac{1}{\sqrt{6(c-b)}},$$

si $z_0 = \frac{2\varpi}{m}$ *est une partie commensurable d'une période, l'intégrale*

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}$$

s'exprime par des logarithmes.

2. *Exemple.* — Soit donné

$$j = \int \frac{(x+\mathrm{H})dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^2(x-c)^3}},$$

où

$$c = 2a - b.$$

Nous avons

$$\alpha = \frac{1}{c-a} = \frac{1}{a-b}, \qquad \beta = \frac{1}{c-b} = \frac{1}{2(a-b)},$$
$$g_2 = -\frac{1}{3(a-b)}, \qquad g_3 = 0,$$
$$pz_0 = \pm\frac{1}{2\sqrt{3(a-b)}},$$
$$p'z_0 = \frac{1}{\sqrt[4]{3^3(a-b)^3}},$$
$$p''z_0 = 6p^2z_0 - \frac{1}{2}g_2 = \frac{2}{3(a-b)},$$

D'après la formule de la dupplication de l'argument, nous aurons

$$p(2z_0) = -\frac{1}{\sqrt{3(a-b)}} + \frac{1}{4}\left[\frac{2\sqrt[4]{3^3(a-b)^3}}{3(a-b)}\right]^2,$$

$$p(2z_0) = 0,$$

donc

$$2z_0 = \varpi, \qquad z_0 = \frac{2\varpi}{4},$$

c'est-à-dire z_0 est le quart d'une période; l'intégrale

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})dx}{\sqrt[4]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}$$

s'exprime par des logarithmes. Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème. — *Si les racines b, a, c du polynôme*

$$(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3$$

forment une progression arithmétique dont la raison est $(a-b)$, l'intégrale

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})dx}{\sqrt[3]{(x-a)^2(x-b)^3(x-c)^3}}$$

s'exprime par des logarithmes.

3. Résolvons un problème semblable relativement à l'intégrale

$$j = \int \frac{(x+\mathrm{H})dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x+b)^3(x-c)^4}}.$$

En posant

$$x - c = \frac{1}{y},$$

nous aurons

$$j = -\frac{c+\mathrm{H}}{\sqrt[6]{(c-a)^3(c-b)^4}} \int \frac{(y+\mathrm{G})dy}{y\sqrt[6]{(y+\alpha)^3(y+\beta)^4}},$$

où

$$\alpha = \frac{1}{c-a}, \qquad \beta = \frac{1}{c-b}, \qquad \mathrm{G} = \frac{1}{c+\mathrm{H}}.$$

Supposons

$$\frac{dy}{\sqrt[6]{\frac{2^3.3^3}{5}(y+\alpha)^3(y+\beta)^4}} = dz.$$

et déterminons y par l'équation différentielle

$$\left(\frac{dx}{dy}\right)^6 = \frac{2^3.3^5}{5}(y+\alpha)^3(y-\beta)^4,$$

ainsi que par la condition que y a son infini pour $z=0$. Il est facile de prouver par la substitution immédiate que

$$y = 120\,p^3 z - \beta,$$

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = \frac{1}{30}(\beta - \alpha),$$

$$p'z = \sqrt{4p^3 z - \frac{\beta-\alpha}{30}}.$$

Alors

$$j = -\frac{(c+\mathrm{H})z}{\sqrt[6]{\frac{5}{2^3.3^5}(c-a)^3(c-b)^4}}$$

$$-\frac{1}{\sqrt[6]{\frac{5}{2^3.3^5}(c-a)^3(c-b)^4}}\int\frac{dz}{120\,p^3 z-\beta},$$

$$j = -\frac{(c+\mathrm{H})z}{\sqrt[6]{\frac{5}{2^3.3^5}(c-a)^3(c-b)^4}} - \frac{\mathrm{A}}{120\sqrt[6]{\frac{5}{2^3.3^5}(c-a)^3(c-b)^4}},$$

$$\mathrm{A} = \int\frac{dz}{p^3 z - \frac{\beta}{120}}.$$

Supposons

$$\frac{\beta}{120} = p^3 z_0, \qquad p z_0 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\beta}{15}};$$

nous aurons

$$\frac{1}{p^3 z - p^3 z_0} = \frac{1}{3p^2 z_0}\left(\frac{1}{pz - pz_0} + \frac{\varepsilon}{pz - p\varepsilon z_0} + \frac{\varepsilon^2}{pz - p\varepsilon^2 z_0}\right),$$

ou

$$\frac{1}{p^3 z - p^3 z_0} = \frac{1}{3p'z_0\,p^2 z_0}\Big\{[\zeta(z-z_0) - \zeta(z+z_0)]$$
$$+\varepsilon[\zeta(z-\varepsilon z_0) - \zeta(z+\varepsilon z_0)]$$
$$+\varepsilon^2[\zeta(z-\varepsilon^2 z_0) - \zeta(z+\varepsilon z_0)] + 6\zeta z_0\Big\},$$

$$\varepsilon^3 - 1 = 0:$$

par conséquent

$$\mathrm{A} = \frac{2\zeta(z_0)z}{p^2 z_0\,p'z_0}$$
$$+\frac{1}{3p^2 z_0\,p'z_0}\log\left\{\frac{\sigma(z-z_0)}{\sigma(z+z_0)}\left[\frac{\sigma(z-\varepsilon z_0)}{\sigma(z+\varepsilon z_0)}\right]^{\varepsilon}\left[\frac{\sigma(z-\varepsilon^2 z_0)}{\sigma(z+\varepsilon^2 z_0)}\right]^{\varepsilon^2}\right\}.$$

Calculons maintenant $p^2 z_0 p' z_0$. De l'équation

$$p' z = \sqrt{4 p^3 z - \frac{\beta - \alpha}{30}},$$

nous avons

$$p' z_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{30}},$$

donc

$$p^2 z_0 p' z_0 = \sqrt[3]{\frac{\beta^2}{2^6 . 3^2 . 5^2}} \sqrt{\frac{\alpha}{2 . 3 . 5}} = \frac{1}{2^2 . 3 . 5} \sqrt[3]{\frac{\alpha^3 \beta^4}{120}},$$

$$p^2 z_0 p' z_0 = \frac{1}{60 \sqrt[3]{120 (c-a)^3 (c-b)^4}};$$

alors

$$j = -\frac{(c + \mathrm{H}) z}{\sqrt[6]{\frac{5}{2^3 . 3^5} (c-a)^3 (c-b)^4}} - 6 \zeta(z_0) z$$
$$- \log \left\{ \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)} \left[\frac{\sigma(z - \varepsilon z_0)}{\sigma(z + \varepsilon z_0)} \right]^{\varepsilon} \left[\frac{\sigma(z - \varepsilon^2 z_0)}{\sigma(z + \varepsilon^2 z_0)} \right]^{\varepsilon^2} \right\}.$$

En posant

$$\frac{c + \mathrm{H}}{\sqrt[6]{\frac{5}{2^3 . 3^5} (c-a)^3 (c-b)^4}} + 6 \zeta z_0 = 0,$$

nous obtiendrons

$$j = -\log \left\{ \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma(z + z_0)} \left[\frac{\sigma(z - \varepsilon z_0)}{\sigma(z + \varepsilon z_0)} \right]^{\varepsilon} \left[\frac{\sigma(z - \varepsilon^2 z_0)}{\sigma(z + \varepsilon^2 z_0)} \right]^{\varepsilon^2} \right\},$$

ou

$$j = \log \left\{ (p z - p z_0)(p z - p \varepsilon z_0)^{\varepsilon} (p z - p \varepsilon^2 z_0)^{\varepsilon^2} \right\}$$
$$- 2 \log \left\{ \frac{\sigma(z - z_0)}{\sigma z} \left[\frac{\sigma(z - \varepsilon z_0)}{\sigma z} \right]^{\varepsilon} \left[\frac{\sigma(z - \varepsilon^2 z_0)}{\sigma z} \right]^{\varepsilon^2} \right\},$$

ou enfin

$$\int \frac{(x + \mathrm{H})\, dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3 (x-b)^3 (x-c)^4}}$$
$$= \log \left\{ (p z - p z_0)(p z - p \varepsilon z_0)^{\varepsilon} (p z - p \varepsilon^3 z_0)^{\varepsilon^2} \right\}$$
$$+ \frac{2}{m} \log \prod_{\rho = 0}^{\rho = m-1} \left\{ [p(z - \rho z_0) - p z_0][p(z - \rho \varepsilon z_0) - p \varepsilon z_0]^{\varepsilon} \right.$$
$$\left. \times [p(z - \rho \varepsilon^2 z_0) - p \varepsilon^2 z_0]^{\varepsilon^2} \right\}^{\rho - 1} \quad (^1),$$

$$z_0 = \frac{2 \varpi}{m}.$$

(¹) *Loc. cit.*, p. 136.

Nous aurons le théorème suivant :

Théorème. — *Étant donné*

$$g_2 = 0, \qquad g_3 = \frac{b-a}{30(a-c)(b-c)},$$

si $z_0 = \frac{2\varpi}{m}$ *est une partie commensurable d'une période, l'intégrale*

$$\int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^3(x-c)^4}}$$

s'exprime par des logarithmes.

4. *Exemple.* — Soit donné

$$j = \int \frac{(x+\mathrm{H})\,dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^3(x-c)^4}},$$

où

$$c = 4b - 3a.$$

Nous avons

$$\alpha = \frac{1}{4(b-a)}, \qquad \beta = \frac{1}{3(b-a)},$$

$$g_2 = 0, \qquad g^3 = \frac{1}{360(b-a)},$$

$$p z_0 = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\beta}{15}}, \qquad p' z_0 = \sqrt{\frac{\alpha}{30}}.$$

D'après la formule de la duplication de l'argument, nous aurons

$$p 2 z_0 = \frac{9\beta - 8\alpha}{8\alpha}\sqrt[3]{\frac{\beta}{15}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{\frac{\beta}{15}} = p z_0,$$

d'où

$$z_0 = \frac{2\varpi}{3};$$

l'intégrale j s'exprime par des logarithmes. Nous avons donc le théorème suivant :

Théorème. — *S'il existe parmi les racines du polynôme*

$$(x-a)^3(x-b)^3(x-c)^4$$

la relation

$$c = 4b - 3a,$$

l'intégrale

$$\int \frac{(x + \mathrm{H})\,dx}{\sqrt[6]{(x-a)^3(x-b)^3(x-c)^4}}$$

s'exprime par des logarithmes.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

ÉMILE PICARD. — TRAITÉ D'ANALYSE. Tome II : *Fonctions harmoniques et fonctions analytiques. Introduction à la théorie des équations différentielles. Intégrales abéliennes et surfaces de Riemann.* 1 vol. gr. in-8, 500 p. Paris. Gauthier-Villars et fils.

Ce Tome II du *Traité d'Analyse* de M. Picard est consacré surtout à la théorie des fonctions analytiques et harmoniques. Bien que l'objet principal qu'ait en vue l'auteur soit la théorie des équations différentielles, cette théorie (du moins entendue au sens classique) n'occupe encore que deux Chapitres d'un Volume de 500 pages. Il n'y a pas lieu de s'en étonner, si l'on réfléchit que les Mathématiques ne comportent pas en réalité de divisions naturelles, mais que les théories et les méthodes s'y enchevêtrent, empiètent les unes sur les autres, à tel point que tout groupement, toute délimitation entre elles est nécessairement arbitraire. Tel cas particulier d'une théorie difficile qui s'ébauche à peine est indispensable au développement complet d'une analyse toute différente. C'est ainsi que des notions de Géométrie de situation interviennent dans la théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. C'est ainsi encore que l'étude des équations différentielles ordinaires même du premier ordre, reposant sur les propriétés des fonctions analytiques, veut être précédée d'une étude de l'équation de Laplace, équation aux dérivées partielles du second ordre, mais particulière. « Je pourrais prétexter, dit l'auteur dans sa préface, que l'équation de Laplace est une équation différentielle. J'aime mieux avouer que mon plan s'est un peu élargi. » Aucun lecteur ne s'en plaindra, mais tous se féliciteront d'être mis en possession de ressources variées et fécondes qui leur permettent de comprendre et même de poursuivre les travaux mathématiques les plus importants et les plus nouveaux.

Il ne manque pas de Traités classiques où se trouve exposée la théorie des fonctions analytiques. Mais leurs auteurs, même dans ces dernières années, sont restés presque exclusivement fidèles aux doctrines de Cauchy. On sait qu'une fonction analytique f de la variable complexe $z = x + iy$ est, d'après Cauchy, une quantité

complexe $u + iv$ variable avec x, y, et telle que le rapport $\frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{\Delta u + i\,\Delta v}{\Delta x + i\,\Delta y}$ tende vers une limite quand Δz tend vers zéro d'une façon quelconque. Mais on sait également, d'après Riemann, quel avantage il y a dans bien des cas (et même quelle nécessité) à considérer *séparément* les deux fonctions réelles $u(x,y)$ et $v(x,y)$. Ces deux fonctions, qui satisfont aux deux conditions

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x},$$

satisfont par suite à l'équation de Laplace

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0;$$

ce sont donc des fonctions *harmoniques*. Inversement, à toute fonction harmonique $u(x,y)$ correspond une fonction *conjuguée* $v(x,y)$ (définie à une constante près), c'est-à-dire une fonction v qui vérifie les conditions (1), telle par suite que $u + iv$ soit fonction analytique de z. On voit ainsi comment les propriétés des fonctions analytiques et celles des fonctions harmoniques sont corrélatives et en quelque sorte adéquates. Dans la méthode de Cauchy, c'est sur le symbole complexe $u + iv$ que portent tous les raisonnements, et les théorèmes résultent directement de ce fait que le rapport $\frac{\Delta u}{\Delta z}$ a une limite pour $\Delta z = 0$. Dans la méthode de Riemann, ce sont les équations (1) et (2) assujettissant les fonctions réelles u, v, qu'on prend comme point de départ. Chacune des deux méthodes a ses avantages : la méthode de Cauchy est un merveilleux instrument de recherche et d'invention; elle rend intuitives une foule de propositions fondamentales; elle porte au plus haut degré de simplicité et d'élégance des théories qui, sans la notation des imaginaires, seraient presque inextricables. Mais la méthode de Riemann semble pénétrer plus au fond des choses : la théorie des fonctions algébriques et abéliennes le montre d'une façon éclatante. Un exemple élémentaire fournit d'ailleurs une excellente comparaison entre les deux doctrines : le théorème de Cauchy, qui s'exprime par l'égalité

$$f(x) = \frac{1}{2i\pi}\int_s \frac{f(z)}{z - x}\,dz,$$

où $f(z)$ désigne une fonction holomorphe à l'intérieur du contour fermé s contenant le point x, est d'une démonstration aussi élégante que facile; des propriétés de la plus haute importance en découlent sans peine (développement de $f(z)$ en série de Taylor, valeurs d'une fonction holomorphe, etc.). Mais ce théorème ne fournit aucune réponse à la question capitale de savoir comment on peut disposer des valeurs de $f(z)$ le long de s. Seule, la méthode de Riemann et la théorie des fonctions harmoniques permet de montrer qu'il est loisible de se donner arbitrairement les valeurs de u le long de s, et que la fonction holomorphe $u + iv$ est alors déterminée dans s (à une constante près). Il est donc indispensable à quiconque aujourd'hui s'occupe d'Analyse, de posséder les deux méthodes, d'en avoir approfondi les relations. Le Traité de M. Picard est, je crois, le premier Ouvrage classique où la théorie des fonctions analytiques soit développée systématiquement à ce double point de vue.

Le premier Chapitre s'ouvre par la définition des fonctions analytiques d'une variable complexe. Après avoir introduit les notions de dérivée et d'intégrale, et montré quels rapports étroits existent entre les fonctions analytiques et harmoniques, l'auteur indique immédiatement la généralisation qu'a faite M. Beltrami de la théorie des fonctions analytiques, en considérant la représentation *conforme* sur le plan des u, v d'une surface quelconque Σ rapportée aux deux paramètres x, y. Soit $u(x, y)$, $v(x, y)$ un des systèmes qui effectuent une telle représentation : si l'on appelle *fonction complexe* du point (x, y) sur la surface Σ la combinaison $u + iv$, les deux fonctions u, v satisfont à deux équations analogues aux équations (2), et chacune d'elles vérifie une équation aux dérivées partielles du second ordre qui est l'analogue pour la surface Σ de l'équation de Laplace pour le plan. Cette généralisation joue un rôle important dans l'étude approfondie des fonctions algébriques.

La seconde partie du Chapitre, la plus considérable, est consacrée à l'équation de Laplace. Les propriétés fondamentales de cette équation (détermination unique d'une intégrale par ses valeurs sur un contour, impossibilité d'un maximum ou d'un minimum, etc.) sont démontrées avec un soin particulier. L'auteur insiste notamment sur ce fait que les intégrales $u(x, y)$ de l'équation de

Laplace sont des fonctions *analytiques* de chacune des variables x, y. C'est en effet un théorème capital, dont dépend toute la théorie des fonctions harmoniques, et il importe d'autant plus de le démontrer qu'il ne s'étend aucunement à toutes les équations du second ordre, si simples qu'elles soient, si voisines qu'elles paraissent de l'équation de Laplace. Il suffit, pour le comprendre, de se rappeler l'exemple de l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$$

C'est là ce qui conduit l'auteur à une remarquable digression où il expose quelques-uns des plus beaux résultats qu'il a obtenus sur les équations qui généralisent l'équation de Laplace; je me bornerai à citer le suivant : « Dans la région du plan où $b^2 - ac$ est négatif, l'équation

$$a\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + c\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + d\frac{\partial u}{\partial x} + e\frac{\partial u}{\partial y} + fu = 0$$

ne saurait admettre plus d'une intégrale régulière à l'intérieur d'un contour fermé et prenant sur ce contour des valeurs données, pourvu du moins que ce contour soit suffisamment petit. » — La méthode de M. Neumann pour déterminer effectivement une fonction harmonique d'après ses valeurs sur un contour convexe, exposée d'après les idées de Kirchhoff et avec toutes les remarques qu'exigent les applications, termine ce premier Chapitre.

De l'intégrale de Poisson (relative au cercle) découlent immédiatement les développements des fonctions harmoniques en séries de polynômes homogènes. En combinant les développements de deux fonctions conjuguées, on obtient le développement en série de Taylor d'une fonction analytique. L'étude de ces séries, qui fait l'objet du second Chapitre, conduit de la manière la plus naturelle au problème du *prolongement analytique* des fonctions. A l'aide d'exemples caractéristiques, l'auteur a su en quelques pages élucider cette question si délicate. On ne saurait trop signaler cette partie du Traité à l'attention des lecteurs qui veulent approfondir la notion de fonction analytique.

Le problème de Dirichlet, qui est appelé à jouer un rôle capital dans la suite, n'est résolu par la méthode de M. Neumann que

dans le cas d'une aire convexe. Le *procédé alterné* de M. Schwarz permet d'étendre cette solution à des aires beaucoup plus compliquées; il s'applique d'ailleurs aussi bien à toute une classe d'équations du second ordre dont l'équation de Laplace n'est qu'un cas particulier, par exemple à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = k^2 u.$$

C'est l'exposition de ce procédé, faite avec une grande simplicité, qui remplit le Chapitre IV. Le Chapitre suivant est consacré à la méthode si originale de M. Poincaré qui convient pour une aire absolument quelconque. Les principales solutions du problème de Dirichlet se trouvent ainsi développées et *comparées* dans les deux premiers Volumes du Traité de M. Picard.

Après cette étude approfondie des fonctions harmoniques et conjuguées, vient un exposé, rapide mais complet, de la méthode de Cauchy. Une fois retrouvé, par cette voie, le développement en série de Taylor d'une fonction analytique, les théorèmes sur les points singuliers (pôles, points essentiels, points critiques), sur les décompositions en sommes et en produits, sont démontrés à la façon ordinaire. Sans insister outre mesure sur des propositions bien connues, l'auteur s'est attaché surtout à les illustrer par des exemples remarquables : nous citerons notamment la décomposition en produit d'une fonction ayant ses zéros distribués tout le long d'un cercle (coupure essentielle de la fonction).

Le Chapitre VI renferme les plus belles applications du Calcul des résidus : Théorie des indices, développements des fonctions en sommes, série de Fourier, etc. Le procédé si curieux par lequel Cauchy obtient cette dernière série est mis, grâce à quelques modifications heureuses, à l'abri de toute critique de rigueur.

Par la théorie des indices l'auteur se trouve amené à discuter le nombre des racines communes à deux équations simultanées. Le premier Volume renfermait déjà un Chapitre relatif à cette question; mais la solution restait incomplète. Après avoir déduit bien simplement d'une propriété des fonctions harmoniques le théorème de M. Kronecker, M. Picard, en substituant au système des deux équations un certain système de trois équations à trois inconnues dont le déterminant fonctionnel est carré parfait,

obtient le nombre des points-racines contenus dans un contour fermé sous forme d'une intégrale double étendue à un certain domaine. L'application au cas où la courbe limite est formée d'arcs algébriques est particulièrement simple.

Le Chapitre VIII traite des intégrales des fonctions non uniformes : l'étude des intégrales hyperelliptiques, du nombre et de la réduction de leurs périodes, prépare celle des fonctions algébriques en général; l'étude des intégrales hypergéométriques et de leurs points singuliers, en particulier des périodes de l'intégrale elliptique, conduit à une démonstration de ce théorème célèbre dû à l'auteur : une fonction qui n'a dans tout le plan que des pôles peut prendre toutes les valeurs, sauf deux au plus.

La théorie des fonctions analytiques de plusieurs variables indépendantes est loin d'être aussi avancée que celle des fonctions d'une seule variable. Indiquer les quelques propositions générales, d'une application fréquente, qu'on a pu établir sur ces fonctions, tel est le but du neuvième Chapitre. Après une extension de la série de Taylor au cas de plusieurs variables, vient un théorème fondamental sur la décomposition en facteurs d'une fonction de plusieurs variables : de ce théorème résulte une démonstration directe de l'existence des fonctions implicites. Mais la partie la plus intéressante du Chapitre est relative aux intégrales doubles des fonctions de deux variables complexes et à l'extension du théorème de Cauchy d'après M. Poincaré. La notion de *périodes* des intégrales doubles (résidus de points ou de lignes de l'hyperespace) est introduite à l'aide de quelques exemples très simples. Il est impossible d'apporter plus de clarté dans une matière plus obscure. La principale application consiste en une démonstration rigoureuse de la formule de Lagrange pour une ou deux équations.

Un Chapitre relatif à la représentation conforme d'une aire plane sur un cercle termine cette théorie générale des fonctions analytiques. Après avoir rappelé les propositions de M. Schwarz sur les fonctions harmoniques régulières le long d'un *arc analytique* et montré l'équivalence du problème de la représentation conforme et du problème de Dirichlet, l'auteur (en se bornant toutefois aux contours formés de lignes analytiques) lève l'objection posée par Harnack : « La correspondance univoque entre les points des deux aires s'étend-elle nécessairement aux points des contours? » Il

développe ensuite la méthode par laquelle M. Schwarz a établi la possibilité de représenter sur un cercle toute aire plane simplement connexe limitée par un nombre fini d'arcs analytiques réguliers. Cette méthode complète l'exposé des solutions du problème de Dirichlet. Il convient d'observer qu'elle rentre entièrement dans la doctrine de Cauchy.

C'est aux équations différentielles ordinaires que sont consacrés les Chapitres XI et XII. La première question qu'il importe évidemment de résoudre est la suivante : « Tout système d'équations différentielles admet-il des intégrales, et quel est le degré d'indétermination de ces intégrales? » Cauchy a répondu le premier à la question en montrant qu'un système de m équations du premier ordre portant sur m fonctions *réelles* $y_1, y_2, \ldots, y_m$ de la variable *réelle* x

$$\frac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, y_2, \ldots, y_m),$$

admet un système de m intégrales et un seul qui, pour $x = x_0$, prennent des valeurs arbitraires $y_1^0, y_2^0, \ldots, y_m^0$. Ce théorème exige seulement que les f_i satisfassent à certaines conditions de continuité dans le voisinage de $x_0, y_1^0, \ldots, y_m^0$. La méthode de Cauchy, rendue tout à fait rigoureuse par M. Lipschitz, consiste à regarder les équations différentielles comme limites d'équations aux différences finies. Après cette démonstration de l'existence de l'intégrale générale, M. Picard en indique une seconde qui lui est due et qui repose sur une méthode d'approximations successives : par cette seconde méthode, l'intégrale est définie dans un champ moins vaste que par la précédente, mais elle se trouve développée en série convergente. Enfin vient une troisième démonstration qui s'applique cette fois au cas où les fonctions f_i sont des fonctions *holomorphes* des variables *complexes* $x, y_1, \ldots, y_m$, dans le voisinage de $x_0, y_1^0, \ldots, y_m^0$. La méthode dite *Calcul des limites*, inventée par Cauchy et simplifiée par Briot et Bouquet, montre en toute évidence qu'il existe un système d'*intégrales analytiques holomorphes* et un seul qui, pour $x = x_0$, prennent respectivement les valeurs $y_1^0, \ldots, y_m^0$.

Mais n'existe-t-il pas d'autres intégrales qui, quand x tend vers x_0 suivant une certaine loi, tendent vers les valeurs $y_1^0, \ldots, y_m^0$? La question est beaucoup plus délicate que pour le cas des variables

réelles et il importe d'y répondre : sinon des résultats qui comptent parmi les résultats les plus importants de l'Analyse seraient ébranlés. L'auteur établit que le système d'intégrales holomorphes est bien unique à l'aide d'un procédé très élégant où interviennent les théorèmes démontrés antérieurement sur les fonctions implicites ([1]). Ces généralités se terminent par une comparaison entre la première et la dernière méthode de Cauchy : les intégrales analytiques se trouvent définies par la première méthode généralisée dans un champ plus vaste que par le Calcul des limites. Ce Chapitre est à coup sûr un des plus originaux et des plus importants du volume. Les propositions qu'il renferme dominent toute la théorie des équations différentielles. L'exposé des deux premières méthodes rappelle l'attention sur des principes féconds, longtemps négligés dans l'étude trop exclusive des fonctions analytiques, et dont les travaux récents de M. Poincaré et de M. Picard ont montré toute la portée. Enfin l'extension au *champ imaginaire* des méthodes d'approximation du *champ réel* constitue un procédé entièrement nouveau dont il semble qu'on puisse tirer grand parti ([2]).

Les équations du premier ordre, qui se présentent comme étant les plus simples auxquelles on puisse appliquer ces généralités, font l'objet du Chapitre XII. Une propriété caractéristique des équations du premier ordre et qu'il importe d'établir tout d'abord, c'est que les intégrales d'une telle équation (algébrique en y, y') ne peuvent présenter de points singuliers transcendants mobiles, c'est-à-dire variables avec la constante d'intégration. Cette propriété creuse une différence essentielle entre le premier ordre et les ordres supérieurs. Une fois qu'on l'a démontrée, il n'y a aucune difficulté à voir que les seules équations du premier ordre et du premier degré dont les points critiques soient fixes sont des équations de Riccati, non plus qu'à opérer l'inversion de l'intégrale elliptique. Des indications substantielles sur les fonctions doublement périodiques, notamment sur les fonctions $\mathrm{Al}(z)$ et $\mathrm{Al}_1(z)$ terminent cette première étude des équations différentielles.

La fin du Volume (cinq Chapitres) est remplie par une théorie

---

([1]) On pourrait d'ailleurs parvenir à la même conclusion en ayant recours au seul calcul des limites.

([2]) L'auteur en a donné récemment une importante application (*Comptes rendus*, 9 octobre 1893).

complète des fonctions algébriques et de leurs intégrales. L'auteur commence par établir le théorème de Nœther qui lui permet de faire disparaître les points multiples à tangentes confondues. On peut dès lors construire sans difficulté le plan de Riemann à m feuillets, ou plus généralement la surface à p trous qui correspond, d'après les idées de Clifford, à la relation algébrique de genre p ainsi simplifiée. L'extension des théorèmes de Cauchy et de Green aux fonctions de la variable complexe sur la surface de Riemann devient ainsi presque intuitive. On ne saurait présenter sous une forme plus séduisante et plus aisée une théorie presque toujours embarrassée de discussions fastidieuses. Peut-être le souci de l'élégance et de la concision a-t-il entraîné l'auteur à ne donner sur les points de détail (construction des circuits fondamentaux, rétrosections, etc.) que les explications strictement nécessaires. Le lecteur qui n'aurait pas l'habitude de ces considérations remédiera aisément à cette brièveté en traitant avec soin quelques exemples particuliers.

Une fois définies les surfaces de Riemann, l'étude des fonctions algébriques est développée suivant deux méthodes inverses : d'abord en partant d'une relation algébrique donnée, ensuite en partant d'une surface de Riemann donnée. La première méthode occupe deux Chapitres : le théorème d'Abel et ses conséquences, le nombre des intégrales de première espèce et de leurs périodes, la réduction des intégrales aux formes normales, le théorème de Riemann-Roch, la définition du genre d'après M. Weierstrass, etc., voilà autant de points qui sont traités d'une façon magistrale et mis à l'abri de toute critique. Les transformations birationnelles d'une courbe en elle-même et les courbes normales de M. Nœther font l'objet d'une discussion détaillée. On sait que cette théorie entraîne d'importantes conséquences pour les équations différentielles.

Pour ce qui est de la seconde méthode, l'auteur, suivant les idées de Riemann, commence par établir (mais en toute rigueur) l'existence des fonctions harmoniques d'abord sur une surface de Riemann ouverte, puis sur une surface de Riemann fermée. Des fonctions harmoniques de première et de seconde espèce, on passe aux fonctions analytiques de première et de seconde espèce, enfin aux fonctions algébriques, et l'on parvient ainsi à faire correspondre à toute surface de Riemann une *classe* de courbes algébriques.

Les *modules* de la surface de Riemann s'introduisent d'eux-mêmes dans cette démonstration. Les théorèmes d'existence pour *l'équation de Beltrami correspondant à une surface quelconque*, théorèmes démontrés par M. Klein à l'aide de considérations physiques, peuvent être établis rigoureusement comme pour l'équation de Laplace, grâce au procédé alterné. Une conséquence remarquable à laquelle on arrive ainsi est la suivante : « A tout disque plan à p trous correspond une *classe* de courbes algébriques ». Pour que deux tels disques puissent être représentés l'un sur l'autre d'une façon conforme, il faut et il suffit que les deux classes de courbes correspondantes coïncident; c'est le théorème de M. Schottky. Toutes les objections qu'on pouvait opposer à ces beaux résultats sont ainsi levées pour la première fois.

Les courbes de genre 0 et 1 font l'objet d'une étude spéciale dans le dernier Chapitre, où se trouvent mises en évidence, d'une manière très directe, quelques-unes des propriétés les plus importantes des fonctions doublement périodiques.

Cette analyse montrera, je pense, la richesse, la nouveauté et la variété des matières qui composent ce Volume, où l'auteur, encore une fois, ne s'est pas enfermé dans un cadre étroit ni soumis à un ordre inflexible. Chaque théorie a été pour lui l'occasion de développer les méthodes les plus riches en conséquences, d'en montrer les rapports et les extensions possibles. Faire pénétrer profondément le lecteur dans des notions essentielles (telles que la notion de fonction analytique), exposer avec simplicité et rigueur des doctrines obscures et difficiles, mais en quelque sorte primordiales (comme celle des fonctions algébriques), ouvrir à tous des théories neuves destinées à déborder bien au delà de leurs limites actuelles (méthodes d'intégration de l'équation de Laplace, méthodes d'approximations successives, intégration double des fonctions complexes, etc.), ce sont là autant de qualités maîtresses d'un Livre didactique. Pour ce qui est de l'élégance et de la sobriété de la rédaction, de l'art surprenant avec lequel toutes les difficultés minutieuses se trouvent éliminées, du relief avec lequel les idées essentielles se détachent sur le fond des raisonnements, les lecteurs du premier Volume n'ont rien à apprendre sur ce point. PAUL PAINLEVÉ.

MICHEL PHILIPPOFF. — SUR LES INVARIANTS DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES. Heidelberg, Carl Winter's Universitätsbüchhandlung, 1892.

La théorie des invariants des équations différentielles linéaires joue, comme on sait, un grand rôle dans l'étude de ces équations. Introduits dans l'Analyse par Laguerre et Brioschi, ils font la base du Mémoire célèbre d'Halphen sur la réduction des équations différentielles linéaires aux formes intégrables. Dans son travail, Halphen restreint l'étude de ces invariants au but qu'il se propose, sans insister sur leur détermination effective. C'est ce calcul que, dans une thèse de l'Université d'Heidelberg, M. Michel Philippoff vient d'effectuer, au moins en partie, avec beaucoup d'habileté.

Tout repose, dans ce travail, sur l'emploi de notations symboliques qui condensent les calculs. Soit donc l'équation d'ordre n

$$(1)\quad \begin{cases} P_0 \dfrac{d^n Y}{dX^n} + n_1 P_1 \dfrac{d^{n-1} Y}{dX^{n-1}} + \ldots + n_s P_s \dfrac{d^{n-s} Y}{dX^{n-s}} + \ldots + P_n Y = 0, \\ \left[n_s = \dfrac{n(n-1)\ldots(n-s+1)}{1.2\ldots s} \right], \end{cases}$$

dont le premier membre peut être représenté par la puissance symbolique $n^{\text{ième}}$

$$(P + Y)_n.$$

La transformation effectuée est la suivante

$$(2)\qquad Y = Uy, \qquad \frac{dx}{dX} = x_1,$$

où U et x_1 sont des fonctions arbitraires non nulles de X, x et y étant les nouvelles variable et fonction. Effectuons d'abord le simple changement de fonction

$$Y = Uy.$$

On connaît la formule de Leibniz

$$\frac{d^k Y}{dX^k} = (U + y)_k.$$

de sorte que l'équation transformée en X et y peut s'écrire

$$[P + (U + y)]_n = 0,$$

ou, comme on peut s'en assurer, en développant,

$$[(P + U) + y]_n = (\omega + y)_n = 0,$$

en posant

$$\omega_s = (P + U)_s = P_0 \frac{d^s U}{dX^s} + s_1 P_1 \frac{d^{s-1} U}{dX^{s-1}} + \ldots.$$

Reste à effectuer le changement de variable

$$\frac{dx}{dX} = x_1.$$

Les dérivées de y, par rapport soit à X, soit à x, sont les coefficients des deux développements

$$\begin{aligned} \Delta y &= \frac{dy}{dX} \Delta X + \ldots + \frac{d^k y}{dX^k} \frac{\Delta X^k}{k!} + \ldots, \\ &= \frac{dy}{dx} \Delta x + \ldots + \frac{d^k y}{dx^k} \frac{\Delta x^k}{k!} + \ldots, \end{aligned}$$

avec

$$\Delta x = x_1 \Delta X + \ldots + x_k \frac{\Delta X^k}{k!} + \ldots,$$

où l'on pose

$$x_k = \frac{d^k x}{dX^k} = \frac{d^{k-1} x_1}{dX^{k-1}},$$

de sorte que l'on a

$$\frac{d^k y}{dX^k} = \sum_{h=1}^{h=k} A_{kh} \frac{d^h y}{dx^h},$$

avec

$$A_{kh} = \sum \frac{k!}{m_1! m_2! \ldots m_k!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{m_1} \left(\frac{x_2}{2!}\right)^{m_2} \cdots \left(\frac{x_k}{k!}\right)^{m_k},$$

la somme Σ s'étendant à toutes les valeurs possibles des entiers positifs ou nuls $m_1, m_2, \ldots, m_k$ qui satisfont aux relations

$$\begin{aligned} m_1 + 2m_2 + \ldots + km_k &= k, \\ m_1 + m_2 + \ldots + m_k &= h. \end{aligned}$$

En substituant ces expressions dans l'équation

$$(\omega + y)_n = 0,$$

on arrive à la transformée en x, y, dans laquelle le coefficient

$n_s p_s$ de $\frac{d^{n-s}y}{dx^{n-s}}$ s'obtient en prenant dans le développement de chaque dérivée $\frac{d^k y}{dX^k}$ le terme $A_{k,n-s}\frac{d^{n-s}y}{dx^{n-s}}$ seulement; de sorte qu'on peut écrire

$$n_s p_s = (\omega + A_{0,n-s})_n,$$

en faisant usage d'un exposant symbolique dont la signification est immédiate, et convenant que tout coefficient $A_{k,n-s}$ est nul, pour $k < n - s$.

En particulier, on a

$$p_0 = (\omega + A_{0,n})_n = \omega_0 A_{nn} = P_0 U x_1^n,$$

de sorte que, en supposant

$$p_0 = P_0 = 1,$$

on a

$$p_s = \frac{[(P + U) + A_{0,n-s}]_n}{n_s U x_1^n} = \frac{[P + (U + A_{0,n-s})]_n}{n_s U x_1^n},$$

ou

$$(3)\quad \left\{ \begin{aligned} p_s = \frac{1}{U x_1^n}\Big[& P_s(U + A_{0,n-s})_{n-s} \\ & + \frac{n_{s-1}}{n_s} P_{s-1}(U + A_{0,n-s})_{n-s+1} + \ldots \Big] = \frac{1}{x_1^s} P_s + R_{s-1}, \end{aligned} \right.$$

R_{s-1} étant une fonction linéaire de $P_1, P_2, \ldots, P_{s-1}$. C'est une formule établie par Halphen. On en déduit

$$(4)\qquad \frac{d^r p_s}{dx^r} = \frac{1}{x_1^{s+r}} \frac{d^r P_s}{dX^r} + R_{s+r-1},$$

où R_{s+r-1} est une fonction linéaire de $P_1, P_2, \ldots, P_s$ et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre r, $\frac{d^r P_s}{dX^r}$ exceptée. En disant que $\frac{d^r P_s}{dX^r}$ est de dimension $s + r$, on en conclut que *tout invariant est homogène quant à la dimension.*

Le calcul des invariants se fait par application des formules (3) et (4). Il suffirait de faire l'élimination des fonctions U, x_1 et leurs dérivées. Certaines remarques facilitent le calcul.

D'abord, on peut supposer que l'on ait dans l'équation proposée et sa transformée

$$(5)\qquad P_1 = p_1 = 0,$$

ce qui exige

$$\frac{n-1}{2} U x_2 + x_1^2 \frac{dU}{dX} = 0,$$

et élimine ainsi une fonction arbitraire. On trouve, par exemple, dans ces conditions,

$$3 \frac{dP_2}{dX} - 2 P_3 = x_1^3 \left(3 \frac{dp_2}{dx} - 2 p_3 \right),$$

ce qui donne un invariant relatif, $3 \frac{dP_2}{dX} - 2 P_3$: c'est l'invariant V_3 de Halphen, remarquable par ce fait qu'il ne dépend pas de l'ordre de l'équation.

On peut aller plus loin dans la réduction de l'équation et supposer que la proposée (1) et la transformée satisfont, en même temps qu'à (5), soit à

$$(6) \qquad P_2 = p_2 = 0,$$

ce qui exige

$$\frac{d^2 \left(x_1^{-\frac{1}{2}} \right)}{dX^2} = 0,$$

soit, comme le fait Halphen, à

$$(7) \qquad V_3 = v_3 = 1,$$

auquel cas la transformation (2) doit se réduire à la transformation identique, de sorte que les coefficients P_3, P_4, ... sont alors eux-mêmes des invariants. Il suffit ensuite, pour obtenir l'expression des invariants en fonction des coefficients de la forme complète (1), de recourir aux formules (3) et (4), où U et x_1 ont les valeurs qui permettent de réduire l'équation (1) à une forme où les équations (5) et (6) [ou (7)] sont satisfaites.

Ces calculs peuvent être encore abrégés dans des circonstances particulières. Ainsi, si l'on associe à l'équation (1) son adjointe de Lagrange (1'), la transformée de (1) a pour adjointe la transformée de (1'). Il en résulte que les invariants de (1) sont aussi des invariants de son adjointe (1'). On pourra alors, dans certains cas, étant formée, *a priori*, la partie littérale d'un invariant, c'est-à-dire une fonction des coefficients et de leurs dérivées, homogène quant à la dimension, et à coefficients indéterminés, cal-

culer ces coefficients en écrivant que la même fonction des coefficients de l'adjointe est encore un invariant de l'équation proposée.

Le même résultat peut être obtenu en exprimant que cette fonction reste invariante par une simple transformation infinitésimale (2). On regrette, à lire cette partie du travail, que l'auteur n'ait pas connu les théories si fécondes de M. Lie sur les groupes de transformations et leurs applications aux invariants différentiels; il y aurait sans nul doute trouvé de quoi résoudre certaines difficultés qu'il a rencontrées, celle, en particulier, relative au nombre des invariants indépendants. J'indiquerai, par exemple, que la transformation infinitésimale

$$\delta x = \xi(x)\,\delta t, \qquad \delta y = \eta(x)\,y\,\delta t,$$

effectuée sur l'équation

$$\frac{d^n y}{dx^n} + n_1 p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots = 0,$$

donne, pour les coefficients, la transformation suivante qu'il est facile de calculer, directement, ou par application des formules (3)

$$\frac{\delta p_1}{\delta t} + p_1 \xi' + \eta' - \frac{n-1}{2}\xi'' = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\frac{\delta p_s}{\delta t} + \sum_{k=1}^{k=s} \frac{s!}{k!(s-k)!} p_{s-k}\left(\eta^{(k)} - \frac{n-s}{k+1}\xi^{(k+1)}\right) + s p_s \xi' = 0.$$

Si l'on fait

$$p_1 = 0 \qquad \text{et} \qquad \delta p_1 = 0,$$

on doit avoir

$$\eta' - \frac{n-1}{2}\xi'' = 0,$$

d'où

$$\eta^{(k)} - \frac{n-1}{2}\xi^{(k+1)} = 0,$$

ce qui donnera

$$\frac{\delta p_s}{\delta t} + s p_s \xi' + \frac{(n+1)(s-1)}{2(s+1)}\xi^{(s+1)}$$
$$+ \sum_{k=1}^{k=s-2}\left[\frac{s!}{k!(s-k)!} p_{s-k} \frac{n(k-1)+2s-k-1}{2(k+1)}\xi^{k+1}\right] = 0,$$
$$(s = 2, 3, \ldots, n).$$

On en déduit immédiatement, par exemple, l'invariant

$$v_3 = 3\frac{dp_2}{dx} - 2p_3.$$

M. Philippoff termine son travail en rappelant comment Halphen donne la signification de ses invariants, par la construction de l'équation linéaire aux puissances $(n-1)^{\text{ièmes}}$ des intégrales de l'équation du second ordre; il donne, en outre, une méthode simple et rapide pour former cette équation.

En résumé, le travail de M. Philippoff, sans rien ajouter d'essentiel au Mémoire d'Halphen, a cependant le mérite appréciable d'en faciliter les applications en les rendant plus pratiques.

A. Tresse.

Émile LEMOINE. — La Géométrographie ou l'art des constructions géométriques. Extrait des *Comptes rendus de l'Association française pour l'avancement des Sciences* (Congrès de Pau, 1892). — 1 br. gr. in-8°, 66 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 55, quai des Grands-Augustins. Prix : 2 fr.

M. Lemoine a déjà publié antérieurement soit dans les congrès de l'Association française, soit dans d'autres recueils [1], plusieurs Mémoires où il traite diverses parties du sujet exposé dans cette étude. Il s'agit de l'évaluation de la simplicité et de l'exactitude des constructions géométriques effectuées avec la règle et le compas.

Les principes fondamentaux de la théorie de M. Lemoine reposent sur cette observation, que toutes les constructions graphiques de cette nature ne comportent que les opérations élémentaires suivantes :

Mettre le bord de la règle en coïncidence avec un point (R_1); tracer la ligne droite (R_2); mettre une pointe du compas en un point déterminé (C_1); mettre une pointe du compas en un point déterminé d'une ligne (C_2); tracer la circonférence (C_3).

On ne tient pas compte de la longueur *tracée* des lignes.

---

[1] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, 1888; *Nouvelles Annales*, etc.

D'après cela, toute construction est représentée par un symbole tel que

$$l_1 R_1 + l_2 R_2 + m_1 C_1 + m_2 C_2 + m_3 C_3.$$

La somme $l_1 + l_2 + m_1 + m_2 + m_3$ des coefficients, c'est-à-dire le nombre total des opérations élémentaires, est appelée *coefficient de simplicité*; la somme $l_1 + m_1 + m_2$, *coefficient d'exactitude*.

Dans l'étude actuelle, M. Lemoine, après avoir rappelé les principes qui précèdent, en fait application à un grand nombre de problèmes, examine et discute, à ce point de vue, diverses solutions connues, et arrive à en évaluer ainsi la simplicité et l'exactitude.

De ces comparaisons multipliées, il conclut à l'existence d'un *art des constructions géométriques*, dont il formule ainsi les principes :

« Dans chaque construction, ne tracer aucune ligne inutile, c'est-à-dire employer quand on le peut, soit les lignes tracées de la figure donnée, soit celles déjà tracées dans le cours de la construction ;

» Choisir celle des solutions d'un même problème dont l'ensemble des solutions conduit au symbole le plus simple;

» Examiner, dans chaque problème, tous les cas particuliers de données qui peuvent se présenter, et simplifier alors le symbole général pour ces cas particuliers;

» Dans la recherche du symbole général d'une construction, n'employer que des constructions générales, à moins que l'on ne démontre qu'une solution particulière s'applique toujours au problème que l'on examine;

» Pour une construction effectuée avec des données particulières, profiter de toutes les constructions particulières, plus simples que les constructions générales, qui peuvent s'appliquer dans le cas où l'on se trouve. »

Nous ne saurions entrer ici dans aucun détail sur l'examen des problèmes dont s'occupe M. Lemoine dans son intéressante brochure. Sa théorie a été déjà l'objet de critiques diverses auxquelles il s'est efforcé de répondre; la plupart de ces critiques provenaient, croyons-nous, de ce que sa pensée n'avait pas été comprise exac-

tement, et de ce qu'on avait une tendance à donner à cette théorie une portée qu'elle n'avait pas dans l'esprit de l'auteur. Lorsque, en appliquant cette méthode à l'examen de deux constructions différentes destinées au même but, on parvient à cette conclusion que la construction A est plus simple (ou plus exacte) que la construction B, il faut toujours sous-entendre : *toutes choses égales d'ailleurs;* sans quoi on arriverait parfois à de véritables énormités. En second lieu, les diverses opérations, auxquelles M. Lemoine attribue un coefficient uniformément égal à l'unité, peuvent différer les unes des autres ; mais *la même* opération, au point de vue pratique, peut se présenter dans des conditions qui en rendent l'exécution plus ou moins difficile, plus ou moins longue ; et dès lors il est naturel de se borner à *compter* les opérations élémentaires pour obtenir une évaluation moyenne, d'ordre général. Enfin, une construction beaucoup plus élégante qu'une autre, au point de vue de l'énoncé, peut donner lieu à une complication graphique bien plus grande ; la constatation de ce fait ne lui enlève rien de son élégance, et M. Lemoine a été le premier à le proclamer. Enfin, la Géométrographie n'a point la prétention de suivre exactement la pratique du tracé ; elle guide le dessinateur, mais *spéculativement,* à peu près comme la Mécanique rationnelle guide l'ingénieur pour le plan général de ses travaux.

Ce qu'on ne saurait contester, en tout cas, c'est le caractère d'originalité et de nouveauté de cette théorie. Au point de vue scientifique, qui nous préoccupe surtout dans ce compte rendu, elle a eu déjà le mérite d'attirer l'attention sur certaines constructions classiques, même parmi les plus élémentaires, de provoquer des solutions nouvelles et plus simples que celles qu'on connaissait déjà, ou bien de faire sortir de l'oubli certaines constructions indiquées jadis et qui n'avaient point été remarquées.

Il y a enfin une remarque très curieuse, et qui n'a pas échappé à M. Lemoine : c'est que, chaque fois que la notion générale de nombre intervient dans un problème de Géométrographie, la question tombe dans le domaine de l'arithmologie ; c'est ainsi par exemple que le problème suivant : « Étant donnée une longueur, trouver *le plus simplement possible* une droite dont la longueur soit m fois la première, m étant entier », semble très difficile, en dépit de son aspect simple. C'est au fond à peu près le même que

celui-ci : « Trouver le nombre minimum des multiplications qu'il faut faire pour obtenir a^m, le nombre a étant donné », question posée par M. Dellac et qui n'a pas encore été résolue.

Nous bornons là nos observations sur la brochure de M. Lemoine, avec la conviction que ces aperçus sommaires suffiront à en faire comprendre l'intérêt, même aux yeux de ceux qui ne partagent pas sa manière de voir en tous points. A. L.

R.-O. BESTHORN et J.-L. HEIBERG. — CODEX LEIDENSIS 399,1. EUCLIDIS ELEMENTA EX INTERPRETATIONE AL-HADSCHDSCHADSCH CUM COMMENTARIIS AL-NARIZII. Partis I Fasciculus I. Copenhague, F. Hegel et fils, 1893.

Dans mon ouvrage : *La Géométrie grecque* (1), j'ai donné (Chap. XIII) quelques détails sur un manuscrit arabe de la Bibliothèque de Leyde, et en particulier sur les fragments qu'il contient d'un commentaire d'Euclide par Héron d'Alexandrie. J'annonçais en même temps que mon excellent ami Léon Rodet préparait, du manuscrit dont j'avais obtenu communication, une traduction que je l'avais prié d'entreprendre.

La santé de M. Rodet devait, bientôt après, l'obliger de renoncer à ce travail ; le savant éditeur du texte grec d'Euclide, M. Heiberg, qui s'intéressait à la publication annoncée, fut informé par moi de la situation et, plus heureux que je ne le fus alors, il rencontra dans M. Besthorn un orientaliste disposé à lui servir de collaborateur pour la tâche à entreprendre, tandis que l'Institut de Carlsberg prenait à sa charge les frais de l'édition.

Le premier fascicule vient de paraître ; il comprend le texte arabe et une traduction latine de l'Introduction et des dix-neuf premières propositions des Éléments d'Euclide (2).

---

(1) Paris, Gauthier-Villars, 1887. *Comparer* mon article *Héron sur Euclide*, dans le *Bulletin* de mai 1887.

(2) Si les savants danois nous ont devancés pour cette publication, j'espère que notre pays prendra bientôt une brillante revanche. M. Carra de Vaux, qui a récemment débuté dans l'étude des Mathématiques arabes par des Mémoires insérés au *Journal asiatique*, a entrepris, sur mes indications, la traduction d'un autre

L'intérêt de cette publication est, au point de vue mathématique, purement historique; mais il n'en est pas moins considérable, puisqu'il s'agit, en fait, de la première version d'Euclide en arabe. Cette version d'El-Hajjâj est passablement libre; elle semble faite d'après un texte déjà quelque peu défiguré, et le traducteur a parfois pris pour authentiquement euclidiennes des additions relativement récentes.

Le commentaire du Nirizi est, pour l'Introduction, emprunté en grande partie, à un Simplicius. Après avoir lu ce commentaire dans la traduction de MM. Besthorn et Heiberg et après avoir fait avec le texte de Proclus sur Euclide les rapprochements soigneusement indiqués par les éditeurs, je n'ai plus, comme en 1887, aucun scrupule à affirmer que le Simplicius dont il s'agit est bien le fécond exégète du VIe siècle de notre ère. Il avait donc composé au moins une Introduction aux Éléments d'Euclide et il y avait compilé Proclus et les sources de ce dernier (il cite Geminus, Héron, Pappus), en introduisant certaines considérations qui lui sont propres. C'est ainsi que, fidèle disciple d'Aristote, il prétend que le postulat d'après lequel une ligne droite peut être indéfiniment prolongée, ne suppose pas qu'elle puisse l'être au delà de la sphère des fixes, pas plus qu'on ne peut, suivant lui, joindre par une droite deux points opposés de cette sphère, comme le Bélier et la Balance. C'était en effet la doctrine du Lycée que la sphère des fixes était *finie et qu'elle terminait l'espace*. D'après l'interprétation de Simplicius, au lieu de dire *finie*, nous devrions, avec M. Georg Cantor, employer l'expression de *transfinie*, et telle paraît être en effet la véritable thèse d'Aristote, quoique son langage présente, à cet égard, des contradictions qui font croire que sa pensée avait été plus ou moins flottante.

Il me paraît, d'autre part, infiniment probable que le Nirizi n'a pas eu connaissance du texte de Proclus; quant aux citations qu'il fait de Héron, elles ne me semblent pas prouver qu'il ait pu utiliser directement le commentaire du mécanicien d'Alexandrie,

---

manuscrit arabe de Leyde, le *Barulcus* de Héron d'Alexandrie, qui seul peut préciser nos connaissances sur le développement de la Mécanique dans l'antiquité.

mais je crois qu'on doit encore réserver pour le moment la question de savoir à quel intermédiaire il a pu emprunter ces fragments, dont plusieurs présentent un intérêt notable.

Je reviendrai sur cette question à l'occasion des fascicules suivants de l'édition de MM. Besthorn et Heiberg et j'essayerai alors de faire comprendre plus clairement la reconnaissance que leur doit le monde savant pour l'œuvre qu'ils ont entreprise. Aujourd'hui, je me bornerai à signaler une remarque d'une portée considérable, qui a été faite incidemment, à propos de l'époque où vivait Héron d'Alexandrie, par H. Diels dans une étude : *Ueber das physikalische System des Straton* (1).

On avait admis jusqu'à présent que Héron était disciple de Ctésibius et, Th.-H. Martin (*Recherches sur la vie et les Ouvrages de Héron*) (2) ayant établi que ce dernier vivait sous Ptolémée Physcon, on en concluait que l'âge de Héron pouvait être fixé aux environs de l'an 100 avant notre ère. H. Diels a fait voir que la liaison entre Héron et Ctésibius repose uniquement sur le titre de l'Ouvrage *les Armes de jet* Ἥρωνος Κτησιβίου ; elle ne pourrait être réellement fondée que si l'on lisait dans les manuscrits Ἥρωνος τοῦ Κτησιβίου. Si les deux noms sont accolés dans le titre dont il s'agit, il faut traduire soit *de Héron ou de Ctésibius* d'après la leçon d'une autre classe de manuscrits (Ἥρωνος ἢ Κτησιβίου), soit *Héron, les Armes de jet de Ctésibius*, en entendant par là que Héron avait réédité un Ouvrage de son précurseur.

H. Diels remarque d'autre part que, si, dans les écrits les plus authentiques de Héron, se trouvent des mots latins transcrits en grec, il est impossible d'admettre, avec Th.-H. Martin, que ces mots fussent en usage à Alexandrie avant la domination romaine. Il en conclut donc que l'âge où vivait Héron est inconnu, mais qu'il est postérieur à l'ère chrétienne.

Je crois qu'il est possible de préciser un peu plus : Vitruve, qui a longuement traité de la Mécanique et cité les auteurs grecs pour cette science, ne connaît pas Héron ; celui-ci doit donc être

---

(1) *Sitzungsberichte der kön. Pr. Akademie der Wissenschaften zu Berlin*, 23 février 1893.

(2) *Mémoires de l'Académie des Inscriptions*, 1854. La démonstration n'est cependant pas complète, et l'on a de bonnes raisons pour placer Ctésibius sous Ptolémée Philadelphe.

postérieur. Sur la proposition I, 25 d'Euclide, Proclus donne deux démonstrations différentes de Ménélas (100 après J.-C.) et de Héron. Il suffit de les examiner pour reconnaître comme improbable que la première ait été combinée après que la seconde aurait déjà été donnée. Héron serait donc au plus tôt du IIe siècle (contemporain de Ptolémée). D'un autre côté, d'après le commentaire de Proclus, il doit être antérieur à Porphyre, c'est-à-dire à la seconde moitié du IIIe siècle.

On peut remarquer aussi que l'importance théorique incontestable des écrits qui nous sont parvenus sous le nom de Héron nous a peut-être conduits à lui attribuer une originalité qu'il n'a probablement pas eue, s'il est postérieur à Vitruve et s'il a retravaillé les écrits de Ctésibius et de Philon de Byzance. L'existence d'un commentaire de Héron sur Euclide est, dans ces conditions, beaucoup moins singulière qu'elle ne paraissait à première vue.

J'ajoute en terminant que si Héron doit être rapproché de Porphyre et si on le range parmi les compilateurs plutôt que parmi les écrivains originaux, une bonne partie des arguments que j'ai développés [1] contre l'attribution qui lui est faite de l'opuscule des *Définitions* perdent sensiblement de leur valeur. La question doit donc être rouverte, comme nombre d'autres concernant Héron.

PAUL TANNERY.

SCHOENFLIES (A.). — LA GÉOMÉTRIE DU MOUVEMENT. Exposé synthétique, traduit de l'allemand par *Ch. Speckel*. Édition revue et augmentée par l'auteur, suivie de notions géométriques sur les complexes et les congruences de droites, par *G. Fouret*. 1 vol. in-8, VII-292 p. Paris, Gauthier-Villars et fils, 1893.

La *Geometrie der Bewegung*, de M. Schoenflies, a été annoncée

---

[1] *La Géométrie grecque*, chap. XIV. — Ajouterai-je que si jusqu'à présent j'ai laissé cet Ouvrage incomplet, c'est que pour rédiger la seconde Partie je croyais au moins nécessaire d'attendre la publication du manuscrit de Leyde? C'est qu'en effet, pour la Géométrie élémentaire des Grecs, les divers écrits de Héron ont une importance capitale, et que, dans l'état actuel de nos connaissances historiques, ils soulèvent des problèmes beaucoup plus obscurs que ceux qui concernent les éléments d'Euclide.

dans le *Bulletin* (¹), et nous n'avons pas à revenir sur les qualités qui distinguent cet intéressant Ouvrage, dont la traduction sera bien accueillie par tous ceux qui s'intéressent à la Géométrie. Elle pourra, en particulier, rendre service à nos étudiants, moins habitués à regarder les choses dans leur nature géométrique qu'à travers leur représentation analytique. Je me contenterai de faire à l'Auteur une critique qui ne porte en aucune façon sur son livre, mais uniquement sur une phrase de sa préface. « Les recherches modernes, dit-il, qui ont trait à la Géométrie du mouvement ont, en général, comme point de départ, les notions de vitesse et d'accélération. Ce n'est pas là pourtant qu'il faut chercher la source de résultats purement géométriques, car la nature et les propriétés des formes géométriques engendrées par le déplacement ne dépendent pas de la vitesse plus ou moins grande avec laquelle se fait le déplacement, mais uniquement de la loi géométrique de ce mouvement, c'est-à-dire de la succession des positions occupées par le corps mobile. A ce point de vue, la Géométrie du mouvement apparaît comme une branche de la Géométrie synthétique, etc. » Il paraît par là que M. Schoenflies, et il n'est pas seul de cet avis, veuille distinguer la Cinématique, telle qu'on la conçoit ordinairement, de la Géométrie, parce qu'elle implique une notion étrangère à la Géométrie, celle de *temps*. Il veut rendre à la Géométrie ce qui lui appartient, l'étude du déplacement. Cette distinction, toutefois, semble perdre toute sa valeur, si l'on veut bien observer que, dans la Cinématique pure, le temps joue essentiellement le rôle de variable indépendante, et qu'il n'est nullement nécessaire de supposer, quand on parle du temps, que c'est, par exemple, du temps sidéral, ou du temps moyen qu'il s'agit, ou du temps marqué par n'importe quelle pendule. Cette supposition n'intervient que dans la Dynamique. Dès lors, si le déplacement ne dépend que d'une variable, les éléments différentiels du premier ordre qui caractérisent le déplacement équivaudront toujours au fond à la vitesse ; ceux du second ordre équivaudront à l'accélération. Si l'on admet que l'idée de déplacement appartienne à la Géométrie, il faut, du même coup, regarder la Ci-

(¹) T. XIII, p. 157.

nématique tout entière, et j'entends celle où il est question de vitesse et d'accélération, comme une branche de la Géométrie. Il suffit pour se convaincre que le temps, au sens physique du mot, n'intervient nullement en Cinématique, d'observer qu'on s'y dispense habituellement de rien dire sur cette grandeur, pour laquelle il ne semble pas que l'on puisse, en dehors de l'expérience, définir même l'égalité : du moment qu'on ne fixe pas la pendule sur laquelle le temps doit être compté, c'est qu'on peut le compter sur n'importe quelle pendule et qu'il joue le rôle d'une variable absolument quelconque, et c'est en effet ce que l'on voit dans toute la Cinématique. Le nom spécial que l'on donne à la variable indépendante, la lettre particulière que l'on emploie d'ordinaire pour la désigner ne sont que des choses d'habitude, comme une tradition qui ne vaut pas la peine d'être changée, mais à laquelle il ne convient pas d'attribuer aucune valeur philosophique. Après tout, il ne faut pas regretter que M. Schoenflies ait attribué quelque importance à ces questions de mots, puisque cela lui a donné l'occasion d'écrire un bon et intéressant livre.

Au livre de M. Schoenflies, M. Fouret, outre une Note sur la construction du rayon de courbure, a ajouté un important Appendice sur les complexes et congruences de droites. Il y a exposé, sous une forme géométrique très élégante, les propriétés du complexe linéaire ou *système focal* (*Null System*), puis les propriétés des congruences linéaires. Dans le même esprit, il a exposé les notions fondamentales relatives aux lignes ou surfaces focales des congruences et aux surfaces des singularités des complexes, et enfin le mode de génération le plus simple des congruences du premier ordre et de classe quelconque. J. T.

MÉLANGES.

THÉORÈME D'ANALYSE;

PAR M. E. CESÀRO.

L'intéressant théorème que M. Appell a fait connaître, il y a quinze ans, dans le tome LXXXVII des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, peut être considéré comme un des nombreux corollaires du théorème très général que nous allons énoncer. Supposons que les intégrales

$$\int_0^\infty \varphi(x, t)\,dt, \qquad \int_0^\infty \psi(x, t)\,dt,$$

dont la seconde a tous les éléments positifs, définissent deux fonctions, $\Phi(x)$ et $\Psi(x)$, indéfiniment croissantes avec x. Supposons aussi que, t croissant à l'infini, le rapport de $\varphi(x, t)$ à $\psi(x, t)$ tende uniformément vers $k(x)$. Si, pour x infini, $k(x)$ admet une limite k, on a

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = k.$$

La démonstration de ce théorème est aisée. Il existe, en effet, pour toute valeur positive de ε, arbitrairement petite, un nombre τ, indépendant de x, tel que, pour $t > \tau$ et quel que soit x,

$$\left| \frac{\varphi(x, t)}{\psi(x, t)} - k(x) \right| < \varepsilon.$$

Il existe aussi un nombre ξ, tel que, pour $x > \xi$, la valeur absolue de $k(x) - k$ est moindre que ε, de sorte que

$$\left| \frac{\varphi(x, t)}{\psi(x, t)} - k \right| < 2\varepsilon.$$

Il en résulte qu'on peut écrire

$$\int_\tau^\infty \varphi(x, t)\,dt = (k + 2\theta\varepsilon) \int_\tau^\infty \psi(x, t)\,dt,$$

θ étant compris entre -1 et $+1$. Cela étant, on a identiquement

$$\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = \frac{\displaystyle\int_\tau^\infty \varphi(x, t)\,dt}{\displaystyle\int_\tau^\infty \psi(x, t)\,dt} \; \frac{1 - \dfrac{1}{\Psi(x)} \displaystyle\int_0^\tau \psi(x, t)\,dt}{1 - \dfrac{1}{\Phi(x)} \displaystyle\int_0^\tau \varphi(x, t)\,dt}.$$

Lorsque x croît indéfiniment, le second facteur tend vers l'unité. On peut donc, après s'être donné arbitrairement le nombre ε', trouver une valeur de x, à partir de laquelle le facteur en question est de la forme $1 + \theta'\varepsilon'$, où $|\theta'| < 1$. On trouve ainsi

$$\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = (k + 2\theta\varepsilon)(1 + \theta'\varepsilon').$$

Maintenant, si l'on se donne le nombre positif η, arbitrairement petit, il suffit de prendre, par exemple,

$$2\varepsilon = k\varepsilon' = \frac{\eta}{2} - \frac{\eta^2}{8k},$$

pour pouvoir affirmer que, si η est plus petit que $8k$, il existe une valeur de x, à partir de laquelle on a constamment

$$\left|\frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} - k\right| < \eta;$$

c'est ce qu'il fallait prouver.

Lorsqu'on cherche à se rendre compte de l'intime raison d'être de ce théorème, on reconnaît qu'il est dû à la possibilité d'échanger entre eux, et avec le signe d'intégration, deux *passages à la limite*. On a, en effet,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = \lim_{x=\infty} \lim_{t=\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t \varphi(x, t)\,dt}{\displaystyle\int_0^t \psi(x, t)\,dt};$$

puis, si l'on admet la permutabilité des opérations *lim*, relatives aux variables x et t, on peut écrire, en vertu du théorème de l'Hospital,

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = \lim_{t=\infty} \lim_{x=\infty} \frac{\displaystyle\int_0^t \varphi(x, t)\,dt}{\displaystyle\int_0^t \psi(x, t)\,dt} = \lim_{t=\infty} \lim_{x=\infty} \frac{\varphi(x, t)}{\psi(x, t)}.$$

Enfin

$$\lim_{x=\infty} \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = \lim_{x=\infty} \lim_{t=\infty} \frac{\varphi(x, t)}{\psi(x, t)} :$$

c'est le théorème énoncé en commençant; mais ce que nous venons de dire n'en constitue pas, bien entendu, la démonstration.

Ce théorème subsiste encore lorsque les fonctions Φ et Ψ, au lieu de croître indéfiniment avec x, deviennent infinies pour une même valeur de x, par exemple pour $x = 1$. Il suffit de faire, pour s'en convaincre, $x = 1 - \frac{1}{z}$. C'est même cette forme du théorème qu'il nous convient d'adopter pour en déduire simplement le théorème de M. Appell. Faisons

$$\varphi(x, t) = x^t \varphi(t), \qquad \psi(x, t) = x^t \psi(t).$$

Alors nous pouvons dire que, si les intégrales

$$\Phi(x) = \int_0^\infty x^t \varphi(t)\, dt, \qquad \Psi(x) = \int_0^\infty x^t \psi(t)\, dt,$$

définies pour $x < 1$, deviennent infinies lorsque x tend vers l'unité, et si

$$\lim_{t=\infty} \frac{\varphi(t)}{\psi(t)} = k,$$

on a

$$\lim_{x=1} \frac{\Phi(x)}{\Psi(x)} = k.$$

Supposons maintenant qu'on se donne deux séries de puissances

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots, \qquad g(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \ldots,$$

admettant l'intervalle de convergence $(-1, 1)$, et que, ayant désigné par n le plus grand nombre entier contenu dans t, on prenne

$$\varphi(t) = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \qquad \psi(t) = b_0 + b_1 + b_2 + \ldots + b_n.$$

On aura

$$\Phi(x) = \sum_{n=0}^{n=\infty} (a_0 + a_1 + \ldots + a_n) \int_n^{n+1} x^t\, dt = \sum_{n=0}^{n=\infty} a_n \int_n^\infty x^t\, dt.$$

Conséquemment

$$\Phi(x) = \frac{f(x)}{\log \frac{1}{x}}, \qquad \Psi(x) = \frac{g(x)}{\log \frac{1}{x}}.$$

Donc

$$(1)\qquad \lim_{x=1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n=\infty}\frac{a_0+a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_0+b_1+b_2+\ldots+b_n},$$

pourvu que le second membre existe. Cet important théorème a de nombreuses conséquences, même en théorie des nombres [1]. Comme cas particulier, nous pouvons écrire

$$(2)\qquad \lim_{x=1}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{n=\infty}\frac{a_n}{b_n},$$

en supposant que le second membre existe. On sait [2], en effet, que, si $b_0+b_1+\ldots+b_n$ croît constamment et indéfiniment avec n, et si le second membre de (2) existe, il en est de même du second membre de (1), et que leurs valeurs sont égales. Pour

$$a_n = \frac{p(p+1)\ldots(p+n-1)}{1.2.3\ldots n}, \qquad b_n = n^{p-1},$$

le théorème (2) donne

$$\lim_{x=1}(1-x)^p(1^{p-1}x+2^{p-1}x^2+3^{p-1}x^3+\ldots) = \Gamma(p);$$

puis, si l'on fait seulement $b_n = n^{p-1}$, on obtient

$$\lim_{x=1}(1-x)^p(a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots) = \Gamma(p)\lim_{n=\infty} n^{1-p}a_n,$$

pourvu que le second membre existe. C'est le théorème de M. Appell.

---

(1) *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Naples*, 28 octobre 1893.

(2) Cesàro, *Analisi algebrica*, p. 98.

FIN DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XVII.

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XVII; 1893. — PREMIÈRE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

COMPTES RENDUS ET ANALYSES.

Pages

ARNAUDEAU. — Guide des emprunts. Tables des valeurs intrinsèques et durées probables des obligations de 500fr, pour toutes les époques de l'emprunt et à tous les taux usuels..... 21-24

BACHMANN. — Die Elemente des Zahlentheorie..... 18-21

BAILLAUD (B.). — Cours d'Astronomie à l'usage des Facultés des Sciences. 217-221

BESTHOREN (R.-O.). — Codex Leidensis 399,1. Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadsch cum commentariis Al-Narizii.... 315-318

CANTOR (M.). — Vorlesungen über Geschichte der Mathematik..... 57-65

CAYLEY (A.). — The collected Mathematical Papers Cambridge University Press..... 141-142

CHEVREL (G.). — Exercices d'Arithmétique, énoncés et solutions..... 251-254

CZUBER (EM.). — Theorie der Beobachtungsfehler..... 33-40

DEMARTRES. — Cours d'Analyse de la Faculté des Sciences de Lille.... 233-237

DIOPHANTI. — Alexandrini Opera omnia cum græcis commentariis..... 254-256

DUHEM (P.). — Hydrodynamique, élasticité, acoustique..... 221-228

DUHEM (P.). — Leçons sur l'électricité et le magnétisme..... 5-16

EBERHARD. — Zur Morphologie der Polyeder..... 250-251

FITZ-PATRICK (J.). — Exercices d'Arithmétique, énoncés et solutions... 251-254

FONTENÉ (G.). — L'hyperespace à $(n-1)$ dimensions..... 50

FORSYTH (R.). — Theory of functions of a complex variable..... 197-203

GINO LORIA. — Nicola Fergola e la scuola di Matematici che lo ebbe a duce..... 237-239

GREENHILL. — The applications of Elliptic functions..... 16-17

Pages.

HEIBERG (J.-L.). — Codex Leidensis 399,1. Euclidis Elementa ex interpretatione Al-Hadschdschadsch cum commentariis Al-Narizii 315-318
JORDAN (C.). — Cours d'Analyse de l'École Polytechnique..... 249-250
LAISANT. — Recueil de problèmes de Mathématiques..... 50
LEMOINE (EM.). — La Géométrographie ou l'art des constructions géométriques..... 312-315
LUCAS (ED.). — Récréations mathématiques..... 286-287
MACFARLANE (A.). — Principles of the Algebra of Physic..... 233
MANSION (Dr P.). — Theorie der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung..... 40-47
MOLK (J.). — Éléments de la théorie des fonctions elliptiques..... 205-214
MULLER (F.). — Zeittafeln zur Geschichte der Mathematik, Physik und Astronomie mit hinweis auf die Quellen-Literatur..... 108-110
PETERSEN (J.). — Méthodes et théories pour la résolution des problèmes de constructions géométriques avec application à plus de quatre cents problèmes..... 50-51
PHILIPPOFF. — Sur les invariants des équations différentielles linéaires.. 307-312
PICARD (ÉM.). — Traité d'Analyse..... 297-306
POINCARÉ (H.). — Leçons sur la théorie de l'Élasticité..... 142-145
POKROVSKY (P.). — Sur les transformations des intégrales et des fonctions hyperelliptiques de la première classe..... 85-104
REVUE SEMESTRIELLE DES PUBLICATIONS MATHÉMATIQUES..... 203-204
ROST (G.). — Untersuchungen über die allgemeinste lineare Substitution deren Potenzen eine endliche Gruppe bilden..... 214-217
ROUSE-BALL (W.-W.). — Mathematical recreations and problems of past and present times..... 105-107
SALMON. — Traité de Géométrie analytique à trois dimensions..... 113
SCHŒNFLIES (A.). — La Géométrie du mouvement..... 318-320
STHAL (H.). — Die Grundformeln der allgemeinen Flachentheorie..... 228-230
STURM (Dr R.). — Die Gebilde ersten und zweiten Grades der Liniengeometrie in synthetischer Behandlung..... 257-282
TANNERY (J.). — Éléments de la théorie des fonctions elliptiques..... 205-214
THÉON DE SMYRNE. — Exposition des connaissances mathématiques utiles pour la lecture de Platon..... 282-286
TISSERAND (F.). — Traité de Mécanique céleste..... 173-197
WEISSENBORN. — Zur Geschichte der Einführung der jetzigen Ziffern in Europa durch Gerbert..... 47-50

MÉLANGES.

ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES ET DES LETTRES DE DANEMARK. — Questions mises au concours pour l'année 1893..... 230-232
CESARO (E.). — Théorème d'Analyse..... 321-324
DELBOS (L.). — L'Astronomie aux Indes orientales..... 145-172
DOLBNIA. — Sur les intégrales pseudo-elliptiques dépendant des radicaux du quatrième et sixième degré..... 228-296
— Sur les intégrales pseudo-elliptiques qui dépendent d'une racine cubique d'un polynome du troisième degré..... 125-138
GOURSAT (E.). — Sur une fonction à espace lacunaire..... 247-248

Pages.

HADAMARD (J.). — Résolution d'une question relative aux déterminants. 240-246

MINKOVSKI (H.). — Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite..... 24-29

PEROTT (J.). — Démonstration de l'existence de racines primitives pour tout module premier impair..... 66-83

SAINT-GERMAIN (A. DE). — Généralisation d'un théorème de Delaunay sur les roulettes..... 110-112

TEIXEIRA (F.-G.). — Extrait d'une lettre adressée à M. Hermite..... 29-32

TIKHOMANDRITZKY. — Esquisse d'une méthode pour déterminer le genre et les courbes adjointes d'une courbe algébrique donnée au moyen des opérations rationnelles..... 51-55

YAROCHENKO (S.). — Sur la méthode des moindres carrés..... 113-125

FIN DE LA TABLE DE LA PREMIÈRE PARTIE DU TOME XVII.

19310 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

AVIS.

Toutes les communications doivent être adressées à M. *Darboux*, Membre de l'Institut, rue Gay-Lussac, 36, Paris.

BIBLIOTHÈQUE DE L'ÉCOLE DES HAUTES ÉTUDES,
PUBLIÉE SOUS LES AUSPICES DU MINISTÈRE DE L'INSTRUCTION PUBLIQUE.

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES,

RÉDIGÉ PAR MM. GASTON DARBOUX ET JULES TANNERY,

AVEC LA COLLABORATION DE

MM. CH. ANDRÉ, BATTAGLINI, BELTRAMI, BOUGAIEFF, BROCARD, BRUNEL, GOURSAT, CH. HENRY, G. KŒNIGS, LAISANT, LAMPE, LESPIAULT, S. LIE, MANSION, A. MARRE, MOLK, POTOCKI, RADAU, RAYET, RAFFY, S. RINDI, SAUVAGE, SCHOUTE, P. TANNERY, EM. ET ED. WEYR, ZEUTHEN, ETC.,

Sous la direction de la Commission des Hautes Études.

PUBLICATION FONDÉE EN 1870 PAR MM. G. DARBOUX ET J. HOÜEL
ET CONTINUÉE DE 1876 A 1886 PAR MM. G. DARBOUX, J. HOÜEL ET J. TANNERY.

DEUXIÈME SÉRIE.

TOME XVII. — ANNÉE 1893.

(TOME XXVII DE LA COLLECTION.)

SECONDE PARTIE.

PARIS,

GAUTHIER-VILLARS ET FILS, IMPRIMEURS-LIBRAIRES
DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE,
Quai des Grands-Augustins, 55.

1893

BULLETIN

DES

SCIENCES MATHÉMATIQUES.

5

SECONDE PARTIE.

REVUE DES PUBLICATIONS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tome XVIII; 1890 (1).

Perrin. — Essai de théorie complète du système de deux formes ternaires quadratiques. (1-80).

La théorie du système simultané de deux formes ternaires quadratiques ne peut être considérée comme achevée.

On a, il est vrai, établi le système complet des formes invariantes distinctes, au nombre de vingt, avec leur expression symbolique; on sait ramener à ces formations celles qui se présentent dans un certain nombre de questions géométriques; enfin on connaît la signification géométrique de l'évanouissement des invariants, ainsi que des covariants principaux et de quelques-unes des expressions composées avec ces diverses fonctions.

Mais on ignore quelles relations (syzygies) peuvent exister entre les vingt formations distinctes; on ne possède pas de formule simple pour passer de l'équation ponctuelle à l'équation tangentielle des courbes covariantes du système, ou inversement, etc.

M. Perrin s'est proposé de remplir ces lacunes en adoptant une marche systématique qui consiste à partir du système de quatre formes binaires (deux linéaires et deux quadratiques), dont les invariants fournissent *exclusivement* et *complètement* les sources de toutes les formations invariantes distinctes que possède le système de deux formes ternaires quadratiques. Alors les syzygies,

(1) Voir *Bulletin*, XV$_2$, p. 69.

qui relient les invariants dans le domaine binaire, fournissent entre les formations ternaires obtenues un égal nombre de syzygies, que l'on peut prendre comme point de départ pour en établir de nouvelles.

Parmi les résultats obtenus par M. Perrin, il faut citer :

1° L'existence d'une symétrie croisée fort simple entre les éléments ponctuels et tangentiels relatifs aux deux coniques fondamentales;

2° La possibilité de représenter *toutes* les formations en employant comme seules variables trois covariants mixtes linéolinéaires (dont l'un est le covariant identique), avec des coefficients où n'entrent que les invariants et les contrevariants, si ces variables spéciales fonctionnent comme coordonnées ponctuelles; que les invariants et les covariants purs, si elles fonctionnent comme coordonnées tangentielles; enfin que les invariants seuls, si elles peuvent fonctionner des deux manières; de telle sorte que ces covariants mixtes jouent dans la théorie dont il s'agit le même rôle que les covariants linéaires dans celle des formes binaires d'ordre impair et y apportent un genre analogue de simplifications;

3° L'existence d'une formule mixte doublement symétrique, qui fournit l'équation de tous les groupes possibles de droites ou de points liés symétriquement aux deux coniques par une condition projective donnée, d'ailleurs quelconque : savoir, d'une manière immédiate lorsque ces droites et ces points sont au nombre de *quatre* seulement, et par l'intermédiaire d'un calcul d'élimination facile, lorsque le nombre en est supérieur à quatre.

Le travail de M. Perrin est disposé en deux Chapitres.

Le premier est purement algébrique et consacré à établir le système complet des formations ternaires invariantes, avec les syzygies qui les relient.

Dans le second Chapitre, l'auteur déduit des résultats ainsi obtenus un certain nombre de relations nouvelles dont il étudie la signification et les applications les plus immédiates au point de vue géométrique.

Carvallo. — Formules de quaternions pour la réduction des intégrales multiples les unes dans les autres. (80-90).

L'auteur établit deux formules qui permettent de passer des intégrales simples aux intégrales doubles, des intégrables doubles aux intégrales triples, et inversement.

Voici la première :

$$\iint \varphi(\nu)\, d\sigma = \iiint \varphi(\nabla)\, d\nu.$$

Elle exprime cette règle très simple :

Une intégrale double le long d'une surface fermée σ égale une intégrale triple étendue au volume V renfermé dans la surface et qui s'obtient en remplaçant dans l'expression à intégrer ν (l'unité de normale extérieure) par

$$\nabla = I_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + I_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + I_3 \frac{\partial}{\partial x_3}.$$

La seconde formule est

$$\int_c \varphi(\tau)\, ds = \int\int_\sigma \varphi(V \nabla \nu)\, d\sigma.$$

Elle montre qu'une intégrale simple suivant une courbe fermée c égale une

intégrale double étendue à l'aire intérieure d'une surface quelconque σ passant par cette courbe. Il suffit, pour former cette intégrale double, de remplacer, dans l'expression à intégrer, τ (l'unité de tangente à la courbe) par $V\nabla\nu$ (le symbole V étant le signe vectoriel des quaternions).

Ces formules très générales renferment, comme cas particuliers, celles de Green et celles d'Ampère, qui assimilent l'action d'un courant à un feuillet magnétique : elles peuvent être étendues à l'hyperespace et se confondre en une seule relative à un nombre quelconque de signes $\int$.

Bioche. — Sur le ds^2 des surfaces réglées. (91-95).

Un point d'une surface réglée peut être défini par deux coordonnées σ et r, dont la première fixe la génératrice qui passe par le point, en donnant son pied sur la directrice, et la seconde fixe le point sur la génératrice, en donnant sa distance au pied.

Toute relation entre σ et r définit une courbe tracée sur la surface. L'arc de la courbe est donné par

$$\frac{ds^2}{d\sigma^2} = \left(\frac{dr}{d\sigma} + \cos\theta\right)^2 + H^2 r^2 + 2Lr + \sin^2\theta,$$

θ étant l'angle de la génératrice avec la directrice, H et L les expressions suivantes

$$H^2 = \frac{da^2}{d\sigma^2} + \frac{db^2}{d\sigma^2} + \frac{dc^2}{d\sigma^2},$$

$$L = \alpha\frac{da}{d\sigma} + \beta\frac{db}{d\sigma} + \gamma\frac{dc}{d\sigma};$$

α, β, γ sont les cosinus directeurs de la courbe; a, b, c ceux de la génératrice.

Le r du point central est

$$\rho = -\frac{L}{H^2}, \tag{1}$$

et le paramètre de distribution L est donné par la formule

$$K^2 = \frac{H^2}{H^2\sin^2\theta - L^2}. \tag{2}$$

M. Bioche montre l'utilité des formules (1) et (2) en faisant l'application aux développables passant par une courbe donnée et aux normalies.

Bioche. — Remarques sur les lignes de courbure qui passent par un ombilic. (95-106).

M. Bioche discute les considérations théoriques d'où l'on peut déduire l'équation des lignes de courbure pour un ombilic.

Après avoir établi des résultats connus, relatifs à la distribution des lignes de courbure qui passent par un ombilic, lorsque l'équation qui détermine leurs directions est du troisième degré, il corrige un raisonnement erroné de Dupin.

Il fait observer que, contrairement à une assertion de M. Amiot, il passe toujours au moins deux lignes de courbures réelles par tout ombilic pour lequel l'équation est de degré pair.

Il montre que, si par un point où toutes les courbures normales sont nulles, il passe trois lignes asymptotiques, les directions de ces lignes alternent avec celles des lignes de courbure.

D'Ocagne. — Remarques sur les transformations isogonales. (107-108).

Dans toute transformation isogonale, la figure formée par les centres de courbure de diverses courbes se croisant en un point, autour de ce point, et la figure formée par les centres de courbure des courbes transformées, autour du point correspondant, sont *homographiques*.

D'Ocagne. — Sur l'application des coordonnées parallèles à la démonstration d'un théorème de Chasles relatif aux surfaces algébriques. (108-118).

Ce théorème est le suivant :

« Le centre des moyennes distances des points de contact d'une surface algébrique avec ses plans tangents parallèles à un plan donné est fixe quel que soit ce plan. »

Lagerborg (*Mlle*). — Sur le problème du mouvement d'un corps solide autour d'un point fixe. (118-122).

Mlle Lagerborg résout complètement le problème suivant :

Trouver une fonction de force conduisant à des intégrales elliptiques dans le cas général du mouvement d'un solide de révolution fixé par un point de son axe.

Laisant. — Sur la représentation analytique des figures planes et leur segmentation. (123-131).

Kœnigs. — Sur l'oscillation de la vitesse angulaire dans le mouvement d'un corps solide libre. (131-135).

On fait rouler un ellipsoïde, dont les axes, par ordre de grandeur décroissante, sont $2a$, $2b$, $2c$, sur un plan p situé à la distance h de son centre supposé fixe. On suppose de plus qu'à chaque instant la vitesse angulaire soit proportionnelle au diamètre $2R$ de l'ellipsoïde qui passe par le point M où il est actuellement tangent au plan (loi de Poinsot).

Le rapport ρ de la plus petite vitesse à la plus grande est, comme le montre M. Kœnigs, supérieur à

$$\frac{b^2}{\sqrt{a^2b^2 - c^2(a^2 - b^2)}}.$$

Dans tous les cas, cette limite peut être atteinte ou plutôt approchée autant qu'on voudra : il suffira de choisir h^2 très voisin de b^2.

De plus, cette limite peut être, en général, rendue aussi petite qu'on voudra; il suffira, a étant fixé, de prendre b et c suffisamment petits.

Ainsi, pour un ellipsoïde qu'on peut choisir arbitrairement, la variation de la vitesse angulaire pourra être très considérable.

Mais il n'en est plus de même si l'on se borne à faire rouler des *ellipsoïdes d'inertie*, qui sont caractérisés par l'inégalité

$$\frac{1}{c^2} < \frac{1}{b^2} + \frac{1}{a^2}.$$

La limite en question ne peut plus être aussi petite qu'on veut; elle est supérieure à

$$\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a\sqrt{2}}$$

et cette limite elle-même peut être atteinte si l'on prend

$$c^2 = \frac{a^2 b^2}{a^2+b^2},$$

auquel cas le corps se réduit à une plaque plane.

On peut observer que le rapport ρ est *a fortiori* supérieur à $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Cette limite $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ne peut être atteinte que si b et par suite c sont nuls. Mais on peut approcher de cette limite autant qu'on veut en prenant des corps dont l'ellipsoïde d'inertie ait un grand axe très allongé, et en imprimant un mouvement tel que le plan sur lequel roule l'ellipsoïde soit à une distance de son centre très voisine de son demi-axe moyen.

Ces considérations ont trouvé une application dans un appareil qui a pour objet la représentation du mouvement d'un corps solide.

Fouché. — Remarque sur la méthode des périmètres pour calculer le nombre π. (135-138).

Fouché. — Sur la surface d'un polygone régulier. (138).

Béghin. — Sur le cercle de Joachimstahl. (138-140).

Si d'un point P on mène les quatre normales à une ellipse et que l'on considère l'intersection des quatre cercles de Joachimstahl avec l'hyperbole équilatère qui passe par les pieds de ces normales, on obtient, outre les pieds de ces quatre normales, quatre autres points situés sur une ellipse de forme invariable ayant son centre au point P et ses axes parallèles à ceux de l'ellipse donnée.

Laisant. — Expression du produit des coefficients du binôme. (140-141).

Ce produit peut être mis sous la forme

$$\left(\frac{n}{1}\right)^{n-1}\left(\frac{n-1}{2}\right)^{n-2}\left(\frac{n-2}{3}\right)^{n-3}\cdots$$

Laisant. — Propriété des surfaces algébriques. (141-144).

Démonstration purement analytique de ce théorème dû à M. Humbert :

Le lieu des points tels que la somme des carrés des normales menées de chacun de ces points à une surface algébrique soit constante est une surface du second ordre.

Lorsqu'on fait varier la somme donnée, les surfaces du second ordre obtenues restent concentriques et homothétiques.

Le centre commun de toutes ces surfaces jouit de cette propriété que la somme des carrés des normales qu'on peut mener de ce point à la surface algébrique est minimum.

Lucas (*F.*). — Nature des racines de l'équation du quatrième degré. (145-149).

Fouché. — Sur une simplification à un calcul de Lamé relatif à un changement de variable. (149-152).

Il s'agit d'exprimer ΔV en coordonnées curvilignes.

Béghin. — Méthode d'approximation pour calculer le moment d'inertie et la position du centre de gravité d'une aire plane. (152-154).

Weill. — Sur une propriété d'une classe de courbes algébriques. (154).

Mannheim. — Rayon de courbure d'une conique. (155-160).

Solution d'un problème déjà résolu par M. Fouret :

Déterminer le rayon de courbure en un point d'une conique dont on connaît la tangente en un point et trois autres points.

Construction.

JOURNAL FÜR DIE REINE UND ANGEWANDTE MATHEMATIK, herausgegeben von L. KRONECKER und K. WEIERSTRASS.

Tome CI; 1887 (1).

Königsberger (*Leo*). — Démonstration de l'impossibilité de l'existence d'un autre théorème fonctionnel que de celui d'Abel. (1-72).

Suite et fin du Mémoire analysé au *Bulletin*, XVI_2, p. 17.

(1) Voir *Bulletin*, t. XVI_2, p. 13.

Stahl (*Wilhelm*). — La courbe gauche du quatrième ordre de seconde espèce et la surface desmique de douzième ordre et de quatrième classe. (73-98).

La forme très élégante de l'équation pour la surface des centres de courbure de l'ellipsoïde, ou bien pour la surface desmique de douzième ordre et de quatrième classe, a été établie par MM. Clebsch et Fiedler : les opérations analytiques que l'un et l'autre achèvent sont identiques à celles qu'il faut effectuer pour obtenir l'équation de la développable d'une courbe gauche biquadratique de seconde espèce. En effet, l'introduction d'un système particulier de coordonnées transforme l'équation de la développable en celle de la surface desmique, quand on remplace encore les coordonnées par leurs carrés, remarque qui est due à M. Salmon.

M. Stahl s'est proposé d'étudier, par la voie synthétique, la connexion qui a lieu entre les deux surfaces. A cet effet, il expose d'abord de nouveau tous les détails de la théorie de la courbe gauche de quatrième ordre, soit que les démonstrations qu'on en a données ne soient pas toutes purement synthétiques, soit qu'elles n'entament pas justement les propriétés qui servent de base aux considérations décisives. Le dernier paragraphe du travail est enfin destiné à mettre en évidence la connexion des deux surfaces.

Hensel (*Kurt*). — Étude des nombres algébriques entiers d'un genre donné pour un diviseur premier algébrique quelconque. (99-141).

Le but principal du Mémoire consiste à définir les notions de *domaine de genre,* de *genre* et de *système fondamental,* établies par M. Kronecker dans sa *Festschrift,* de telle sorte qu'elles gardent encore leur signification et leurs caractères essentiels dans le cas où l'on ne considère les nombres algébriques entiers que par rapport à un diviseur algébrique premier quelconque. Soit P_1 un de ces diviseurs premiers de p pour le domaine de genre $(\mathfrak{G})$: alors on peut déterminer un nombre k tel que, pour chaque nombre algébrique w de $(\mathfrak{G})$, il subsiste toujours la congruence $w^{p^k} \equiv w$ (mod. P_1). Dans tout système fondamental de $(\mathfrak{G})$, on peut maintenant choisir k nombres $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_k$ qui forment un système fondamental pour $(\mathfrak{G})$ (mod. P_1). Les p^k nombres incongrus (mod. P_1) permettent encore d'être partagés en domaines de genre (Γ_h) et en genres Γ_h, si l'on réunit tous ceux pour lesquels on a déjà $w^{p^{k_h}} \equiv w$ (mod. P_1) pour $k_h < k$, respectivement pour lesquels k_1 indique le plus petit exposant qui satisfait à cette congruence. On peut aussi établir un système fondamental pour Γ_h, déterminer le nombre des quantités numériques appartenant à Γ_h et signaler la congruence à laquelle satisfont ces mêmes nombres. Les nombres de Γ_h se distribuent ultérieurement en classes, selon l'exposant le plus bas $\sigma_h^{(\gamma)}$ pour lequel $w^{\sigma_h^{(\gamma)}+1}$ devient $\equiv w_1$ (mod. P_1), et l'on détermine le nombre de ces classes. Enfin les nombres d'une classe se divisent en groupes, chacun de k_h termes, qui sont congrus aux différentes puissances $p^{\text{ièmes}}$ d'un quelconque d'entre eux. Les éléments d'un groupe sont les racines d'une congruence irréductible (mod. P_1) dans le domaine $(\mathfrak{G})$ et à coefficients réels. Pour (Γ_h) et le module P_1 ces nombres constituent un système fondamental. En dernier lieu, l'auteur déduit une suite de théorèmes destinés à élucider le rapport qui existe entre les diffé-

rents genres et leurs nombres d'ordre, et qui sont parfaitement l'analogue des résultats corrélatifs de l'Algèbre.

Cardinaal (*J.*). — Une gerbe spéciale de F^2 et la gerbe associée de courbes gauches de troisième ordre. (142-153).

Dans sa *Geometrie der Lage,* M. Reye fait mention d'une gerbe spéciale de surfaces du second ordre et en même temps il en signale quelques propriétés.

M. Cardinaal augmente le nombre des propositions relatives à ces surfaces, par les méthodes de Géométrie pure, et en montre la fertilité par plusieurs applications.

En particulier, il prend toujours soin des éléments imaginaires dans les problèmes concernant la construction de courbes gauches cubiques. Pour en donner l'idée, nous citons le problème de faire passer par quatre points imaginaires, donnés sur une série réglée, une cubique gauche qui touche une génératrice donnée de la série réglée.

Schoute (*P.-H.*). — Un problème de Steiner. (154-161).

Le troisième problème de l'Appendice de la *Systematische Entwickelung der Abhängigkeit geometrischer Gestalten* s'énonce comme suit : Soient A, A_1 deux droites quelconques d'un plan et soient donnés dans l'une et l'autre quatre points harmoniques : pris deux à deux, ceux-ci détermineront seize rayons S, qui se couperont en soixante-douze points p, etc. De quelle propriété jouissent les rayons S et les points p, en considération de leur position relative? Combien de fois se passe-t-il que trois ou six des points tombent sur une même droite? etc. (Y a-t-il, par exemple, huit sections coniques dont chacune touche les droites données A, A_1 et quatre rayons S? Est-ce que, entre autres, huit fois six des points sont sur des droites et que celles-ci se coupent, quatre et quatre, dans un point? etc.)

M. Bauer, de Stettin, a donné une solution complète de ce problème (t. XIX, p. 214-227 du même journal). Après avoir cité ce travail, M. Schoute annonce, comme but de sa Note, de montrer en toute brièveté que la partie du théorème qui se trouve entre parenthèse, et que Steiner a ajoutée avec une sorte de drôlerie, se prête à une démonstration beaucoup plus directe que chez M. Bauer. En même temps il révèle une réciprocité qui n'a pas été signalée par Steiner ni découverte par Bauer.

Sturm (*Rudolf*). — Sur les congruences de rayons ayant le même degré de gerbe et de champ. (162-195).

En construisant les rayons qui coupent deux rayons correspondants de deux faisceaux homographiques de rayons, on obtient un complexe, qui sera linéaire si les faisceaux ont un rayon commun, mais tétraédral s'ils n'en ont pas de commun. Cette proposition bien connue peut être généralisée en deux sens. Remplaçons les faisceaux par des séries réglées, par des involutions de rayons, etc. : nous obtiendrons des complexes de degrés croissants. D'autre côté, prenant trois figures fondamentales au lieu de deux faisceaux générateurs, on passera à des congruences qui, à cause de la construction dualiste en soi, jouissent de la propriété particulière d'avoir le même degré de gerbe et de champ (selon

M. Schubert), ou bien, selon le langage d'autres géomètres, d'être de même ordre et classe. C'est cette seconde généralisation qu'étudie M. Sturm dans son Mémoire. Soient donnés comme générateurs, en premier lieu, trois faisceaux homographiques dont deux ont un rayon qui se correspond à lui-même : ils donneront lieu à une congruence dont les degrés ont l'un et l'autre la valeur 2, et qui a été l'objet de diverses investigations soigneuses depuis le Mémoire fondamental de M. Kummer en 1866; mais la génération très simple du premier Chapitre sert à en mettre en pleine lumière les propriétés principales. La deuxième Section du travail est vouée à un cas spécial de la congruence que nous venons de mentionner : le cas où la surface focale est une surface réglée de quatrième ordre à deux droites doubles génératrices. Le raisonnement synthétique mène à plusieurs nouvelles propriétés de cette surface réglée. Dans la troisième Section on engendre et étudie la congruence de rayons de troisième ordre et classe qui, conjointement avec une congruence linéaire, est l'intersection de deux complexes quadratiques et forme ainsi l'analogue de la courbe gauche cubique.

Minkowski (*Hermann*). — Sur la théorie des formes quadratiques positives. (196-202).

Une forme quadratique essentiellement positive de n variables, à coefficients réels et à déterminant non s'évanouissant, ne peut rester inaltérée que dans un nombre fini t de transformations linéaires en nombres entiers, et M. Jordan avait déjà prouvé que ce nombre t ne peut surpasser une certaine limite qui dépend du nombre n. Pour voir plus clair dans la nature du nombre t, l'auteur établit d'abord le théorème important : « Aucune des transformations mentionnées ne peut être congrue à la transformation identique suivant le module p (nombre premier impair) à moins qu'elle ne coïncide avec elle. » En étudiant alors le groupe des t transformations, on trouve qu'il est unigrade (*einstufig*) isomorphe au groupe des restes de ces transformations suivant p. De là il résulte que le nombre t en question est un diviseur d'un certain nombre n_1 qui dépend de n. Ce nombre n_1 est un diviseur de $(2n)!$ et peut être défini comme le plus petit multiple commun de tous les nombres $t(f)$, c'est-à-dire des transformations qui appartiennent à toutes les formes possibles f de $n^{\text{ième}}$ ordre.

Thomé (*L.-W.*). — Observation sur la théorie des équations différentielles linéaires. (203-208).

M. Thomé fait quelques remarques critiques sur le Mémoire de M. Poincaré, inséré au Tome VIII des *Acta mathematica*, p. 295 : *Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires*. La réplique de M. Poincaré se trouve dans le tome X des *Acta mathematica*, p. 318-322, sous le titre : *Remarque sur les intégrales irrégulières des équations linéaires*. Enfin M. Thomé a mis fin à cette discussion scientifique par une Note du tome CIII du *Journal für Mathematik*, p. 346-347, qui porte le même titre que la présente.

Cayley (*A.*). — Note sur la théorie des équations différentielles linéaires. (209-213).

Pour décider s'il y a des logarithmes ou non, dans les développements des in-

tégrales d'une équation différentielle homogène linéaire, qui appartiennent à un groupe d'exposants de ramification différant l'un de l'autre seulement de nombres entiers, M. Fuchs a indiqué plusieurs méthodes dans le second de ses deux Mémoires fondamentaux (*Journal für Math.*, t. LXVIII, 1868). L'une a été énoncée dans le théorème V, § 6, p. 374 du lieu cité. C'est ce théorème qu M. Cayley reproduit pour montrer, à l'aide de quelques exemples, que le calcul requis coïncide avec celui qu'il faut effectuer pour voir si une série potentielle, appartenant à l'exposant le plus bas du groupe, satisfait à l'équation différentielle.

Lipschitz (*R.*). — Observations sur un genre d'intégrales multiples (Extrait d'une lettre adressée à M. L. Kronecker). (214-226).

« En étudiant récemment votre Mémoire, inséré au *Monatsbericht der Berliner Akademie vom* 22 *December* 1881 : *Sur la théorie des fonctions elliptiques*, j'ai été porté à entrer dans une étude dont je me permets de vous communiquer les fruits. Le résultat principal de votre travail qui m'a été signalé d'abord par M. Hermite et qui sert de fondement à ma lettre adressée à M. Hermite et publiée dans le Tome II (septembre 1885) des *Annales de l'École Normale supérieure* m'a suggéré une observation sur les séries doubles qui s'y présentent, procédant suivant les puissances d'une quantité q : c'est que la fonction figurant dans l'exposant et dépendant de deux éléments peut être envisagée sous la forme de la différence de deux carrés. Tandis que dans les généralisations, appartenant au domaine réel, des séries thêta, il se présente en général à l'exposant des formes quadratiques essentiellement positives d'un nombre croissant d'éléments, cet exemple-là offre au contraire le phénomène d'une forme quadratique indéfinie. Or à toute généralisation d'une fonction thêta correspond une certaine intégrale multiple, et ces intégrales multiples sont d'une nature plus simple que les séries respectives. Je me bornerai donc à considérer un genre d'intégrales liées à cette question. » Vers la fin du Mémoire, M. Lipschitz fait part de plusieurs remarques importantes que M. Hermite lui avait écrites et qui concernent les développements des seize combinaisons

$$\frac{2K}{\pi}\,\frac{\Pi'(0)\,\Theta(x+a)}{\Theta(x)\,\Pi(a)},\quad \ldots$$

(voir *Annales de l'École Normale supérieure* (3), II, p. 303-314), et les intégrales de ces mêmes combinaisons entre les limites 0 et K, etc.

Schottky (*F.*). — Sur une fonction spéciale qui reste invariable lorsqu'on effectue une certaine transformation linéaire de son argument. (227-272).

Les fonctions étudiées dans ce Mémoire sont les généralisations de celles que l'auteur a considérées dans un Mémoire antérieur : *Sur la représentation conforme de surfaces planes qui ont une liaison multiple.* (Même journal, t. LXXXIII). Dans les travaux bien connus de M. Poincaré elles forment la troisième famille des fonctions kleinéennes. Le groupe de ces fonctions tire son origine de la composition de 2ρ substitutions $f_\alpha(x)$, $f_\alpha^{-1}(x)$ $(\alpha=1, 2, \ldots, \rho)$ que

l'on obtient comme suit : Dans le plan dont les points représentent les valeurs de la variable complexe, choisissons 2ρ circonférences K_α, $K_{\alpha'}$, dont chacune exclut toutes les autres. Alors il faut déterminer les fonctions linéairement fractionnaires $f_\alpha(x)$, $f_{\alpha'}(x)$ telles que : 1° les équations $y = f_\alpha(x)$, $x = f_{\alpha'}(y)$ puissent subsister simultanément, et que, 2° en vertu de ces équations, à chaque point x, en dehors de la circonférence $K_{\alpha'}$, corresponde un point y en dedans de K_α. Les substitutions auxquelles donne lieu la composition des $f_\alpha(x)$, $f_{\alpha'}(x)$ et dont l'ensemble fait le groupe des fonctions étudiées sont caractérisées par la dénotation suivante : Posons

$$f_\alpha(f_\beta(x)) = f_{\alpha\beta}(x), \qquad f_{\alpha\beta}(f_\gamma(x)) = f_{\alpha\beta\gamma}(x), \qquad \ldots;$$

généralement, à toute combinaison m des 2ρ indices $1, 2, \ldots, \rho; 1', 2', \ldots, \rho'$ correspondra une substitution $f_m(x)$, et on aura l'identité

$$f_m(f_n(x)) = f_{mn}(x).$$

A chaque indice m sera lié un autre m', dit *opposé*, tel que $f_{mm'}(x) = x$. Pour plus de brièveté on a encore mis le signe x_m au lieu de $f_m(x)$. L'ensemble des valeurs x_m forme le système des valeurs *congrues* à x. Si la variable x se meut dans le domaine limité par les circonférences K_α, $K_{\alpha'}$ et dénommé *surface nulle*, x_m décrira un domaine (m) également limité par 2ρ circonférences. Le plan tout entier est couvert simplement et sans lacune par les domaines (m); cependant il faut excepter certains points qui seront des places essentiellement singulières des fonctions encore à considérer. Toute suite indéfinie d'indices α, β, γ, ..., dont deux consécutifs ne sont pas opposés, définit un de ces points singuliers comme place limite de la suite x_α, $x_{\alpha\beta}$, $x_{\alpha\beta\gamma}$, ..., et cette place limite sera indépendante du choix de x. Parmi ces points singuliers, on trouve notamment les points $A^{(n)}$ et $B^{(n)}$ correspondant aux racines de l'équation quadratique $f_m(x) = x$. Il est évident que, à l'intérieur d'un domaine (m), il n'y aura jamais aucun point singulier.

Cela étant, soient x, y, ξ, η quatre variables susceptibles de toutes valeurs à l'exception des singulières; alors le produit

$$(1) \qquad (x, y; \xi, \eta) = \prod_m \frac{(x - \xi_m)(y - \eta_m)}{(x - \eta_m)(y - \xi_m)}$$

se trouve être convergent si la somme des rayons de toutes les circonférences limitant le domaine (m) est fini. Pour démontrer cette propriété de la somme, l'auteur suppose que la surface nulle ne se décompose qu'en parties triplement cohérentes par des circonférences auxiliaires qui ne se coupent pas l'une l'autre, ni les 2ρ circonférences K_α, $K_{\alpha'}$. On n'a pas décidé si cette hypothèse, qui exige certaines inégalités entre les constantes des cercles K_α, $K_{\alpha'}$, est en effet nécessaire. Dans la suite, on n'a pris pour base de l'investigation que l'hypothèse de la convergence du produit (1). Ce produit représente une fonction des quatre variables x, y, ξ, η d'où découlent toutes les autres fonctions qu'on étudiera. Ce qui est de première importance, c'est que cette fonction est représentable par une autre fonction $E(x, \xi)$ qui ne dépend que de deux variables x, ξ en vertu de la relation

$$(2) \qquad (x, y; \xi, \eta) = \frac{E(x, \xi)\, E(y, \eta)}{E(x, \eta)\, E(y, \xi)}.$$

La fonction $E(x, \xi)$ se définit par le produit

$$(3) \qquad E(x, \xi) = (x - \xi) \prod_n \frac{(x - \xi_n)(\xi - x_n)}{(x - x_n)(\xi - \xi_n)},$$

où il faut déterminer les indices n auxquels le produit s'étend de telle sorte qu'ils constituent, conjointement avec leurs indices opposés n', le total de tous les indices. D'ailleurs il résulte de l'équation (3) que $E(x, \xi)$ s'évanouit du premier ordre seulement pour $x = \xi$ et pour les valeurs congrues à ξ, et que $E(x, \xi)$ devient infini du premier ordre seulement pour $x = \infty$. La considération du quotient $\frac{E(x, \xi_n)}{E(x, \xi)}$, qui ne devient ni zéro ni infini pour aucune valeur de x, invite à introduire une nouvelle fonction

$$(4) \qquad E_n(x) = \prod_h \frac{x - f_p^{(n)}(A)}{x - f_p^{(n)}(B)},$$

où il faut déterminer les indices p de manière que, dans la forme

$$pn^h \, (h = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

tout indice ne soit contenu qu'une seule fois.

En remplaçant les arguments par des valeurs congrues, on fait subir aux fonctions $E_n(x)$ et $E(x, \xi)$ des changements qui sautent aux yeux, à la vue des relations

$$(5) \qquad \begin{cases} E_n(x_m) = E_{n,m} E_n(x), \\ \dfrac{E(x_n, \xi_m)}{E(x, \xi)} = \dfrac{E_n(\xi) E_m(x)}{E_n(x) E_m(\xi)} \dfrac{E_{n,m}}{L_n(x) L_m(\xi)}, \end{cases}$$

où les $E_{n,m}$ sont des constantes telles que $E_{n,m} = E_{m,n}$, et où $L_n(x)$ dénote une fonction linéaire de x dont le carré est égal à $E_{n,n} \frac{dx}{dx_n}$. De plus, les fonctions $E_n(x)$ satisfont aux équations

$$(6) \qquad E_{n,m}(x) = E_n(x) E_m(x), \qquad E_n(x) E_{n'}(x) = 1.$$

Ainsi toutes ces fonctions sont exprimables en produits de puissances des ρ fonctions $E_1(x), E_2(x), \ldots, E_\rho(x)$. Enfin il est remarquable que les $\frac{1}{2}\rho(\rho + 1)$ grandeurs $E_{x,\lambda}(x, \lambda = 1, 2, \ldots, \rho)$ se prêtent à être mises sous la forme de produits infinis : il s'ensuit que ces grandeurs ne dépendent que de $3\rho - 3$ constantes essentielles.

Maintenant on introduit le concept de *fonction intégrale :* c'est toute fonction $I(x)$ qui satisfait à l'équation $I'(x_n) dx_n = I'(x) dx$ et dont la dérivée $I'(x)$ possède partout le caractère de fonction rationnelle, à l'exception des places singulières. Pour pouvoir établir la fonction intégrale la plus générale, développons $\log(\xi + t, \eta; x, y)$ suivant les puissances de t, où ξ, η, x, y désignent des valeurs quelconques non singulières et incongrues et où il faut mettre $\frac{1}{t}$ pour $\xi + t$, si $\xi = \infty$. Le coefficient de t^2, qui se dérive au moyen d'un

calcul aisé, devient

$$F_\lambda(x) = \sum_m \left(\frac{1}{(x_m - \xi)^\lambda} - \frac{1}{(y_m - \xi)^\lambda} \right) \quad \text{ou} \quad \sum_m (x_m^\lambda - y_m^\lambda),$$

selon que ξ est fini ou infini. Voici encore des fonctions intégrales particulières :

1° Les ρ fonctions $\log E_1(x)$, $\log E_2(x)$, ..., $\log E_\rho(x)$;
3° Toute fonction $F_\lambda(x)$;
3° Toute fonction $\log(x, y; \xi, \eta)$ si y, ξ, η dénotent des valeurs quelconques incongrues, non singulières.

C'est de ces fonctions, appelées respectivement de première, de deuxième et de troisième espèce, que se compose linéairement et à coefficients constants la fonction intégrale la plus générale. Les coefficients d'une expression linéaire et entière par rapport à $\rho + 1$ fonctions intégrales se laissent toujours déterminer convenablement de telle sorte que cette expression reste inaltérée si l'on remplace l'argument par une valeur congrue. Des expressions de ce genre représentent des fonctions nommées *invariantes*. Parmi ces fonctions invariantes il est toujours possible de choisir, d'après des méthodes variées, deux fonctions p et q qui sont liées par une équation algébrique du rang ou du genre ρ. Les fonctions intégrales coïncident avec les intégrales des fonctions rationnelles de p et q.

Envisageons x et $E(x, \xi)$ comme fonctions de p : elles satisferont à certaines équations différentielles que l'auteur établit dans le dernier paragraphe de son Mémoire. On trouve en particulier que x est le quotient de deux solutions particulières de l'équation différentielle

$$\frac{d^2 z}{dp^2} - \frac{1}{H}\frac{dH}{dp}\frac{dz}{dp} + \left[\frac{1}{4}\left(\frac{1}{H}\frac{dH}{dp}\right)^2 - \frac{1}{2H}\frac{d^2 H}{dp^2} - 3R_1 + 3R\right] z = 0,$$

où H, R, R_1 dénotent des fonctions rationnelles de p et q. L'auteur enseigne à déterminer les fonctions H et R quand on se donne l'équation entre p et q; mais il n'a pas entamé le problème de déterminer la fonction R_1. Si cela pouvait se faire, il serait possible de faire l'inversion du chemin pris par l'auteur, c'est-à-dire de partir d'une équation algébrique de rang ρ pour parvenir aux fonctions étudiées par lui.

Frobenius (*G.*). — Sur la congruence suivant un module double formé de deux groupes finis. (273-299).

Deux éléments A, B s'appellent équivalents (mod $\mathfrak{G}$) si l'élément AB^{-1} est contenu dans le groupe $\mathfrak{G}$, et équivalents (mod $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$) si $A = GBH$, où G, H sont des éléments appartenant à $\mathfrak{G}$ respectivement à $\mathfrak{H}$. Soit $\mathfrak{S}$ un groupe donné, alors l'ensemble de tous les éléments de $\mathfrak{S}$ qui sont congrus à un élément déterminé d'entre eux (mod $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$), s'appelle une *classe d'éléments congrus*. De là découle la proposition : Soient $\mathfrak{G}$ et $\mathfrak{H}$ deux sous-groupes de $\mathfrak{S}$; faisons parcourir à l'élément S tous les éléments de $\mathfrak{S}$, à G ceux de $\mathfrak{G}$, à H ceux de $\mathfrak{H}$, alors le nombre des solutions de l'équation $GSH = S$ sera ghm, où g, h sont les ordres de $\mathfrak{G}$ respectivement de $\mathfrak{H}$, et m le nombre des éléments incongrus de $\mathfrak{S}$ (mod $\mathfrak{G}, \mathfrak{H}$). Ce résultat entraîne une suite de théorèmes très importants, notamment ceux de Sylow. Une autre réflexion mène aux beaux théorèmes que voici : « Si un

groupe de substitutions d'ordre h est décomposable en m groupes transitifs, la somme du nombre des symboles qui restent inaltérés dans les substitutions individuelles du groupe sera égale à hm. Afin qu'un groupe soit transitif, il est nécessaire et suffisant que la somme du nombre des symboles qui ne se changent pas dans les substitutions individuelles du groupe, soit égale à l'ordre du groupe. Le nombre h_λ des substitutions de $\mathfrak{G}$ qui laissent précisément λ symboles inaltérés a été aussi déterminé. Dans cette recherche le concept de *systèmes conjugués d'éléments* se présente à l'esprit. Ainsi les triples d'éléments $(x_\alpha, x_\beta, x_\gamma)$, $(x_\delta, x_\varepsilon, x_\zeta)$ appartiennent à un système conjugué, si les trois éléments du premier triple se changent simultanément, par une substitution de $\mathfrak{G}$, en ceux du second.

Pour ne pas entrer trop en détail, bornons-nous à citer seulement quelques-uns des autres résultats. Le nombre des substitutions de degré n qui ne laissent aucun symbole inaltéré est égal au nombre entier qui diffère le moins de $\frac{n!}{e}$. Si les substitutions d'un groupe doublement transitif qui n'altèrent pas un symbole fixé forment un groupe primitif, et si ce sous-groupe n'est pas formé des puissances d'une substitution cyclique dont l'ordre est 2 ou un nombre premier de la forme $2^\nu - 1$, alors nul groupe distinct de $\mathfrak{G}$ ne peut convenir avec $\mathfrak{G}$ dans toutes les substitutions qui déplacent tout symbole.

Stahl (*Wilhelm*). — Sur la courbe plane rationnelle de quatrième ordre. (300-325).

Pour étudier la courbe plane rationnelle de quatrième ordre R_4, M. Stahl se sert dans ce Mémoire de la méthode analytique; mais en général ses opérations ont au fond une origine qui se ramène à des réflexions synthétiques. Les propriétés de R_4 se déduisent de la théorie de la courbe gauche rationnelle de quatrième ordre ρ_4 dont on peut envisager R_4 comme l'image perspective. En particulier, on tire profit de la série des ∞^1 courbes gauches cubiques ρ_3, appelées *osculantes* par M. Jolles, qui sont situées sur la surface des tangentes de ρ_4 et dont les plans osculateurs enveloppent une surface steinérienne. Les images de ces ρ_3 dans le plan de R_4 sont les osculantes R_3 de cette dernière courbe.

Après avoir représenté les coordonnées de R_4 comme fonctions d'un paramètre λ, M. Stahl en tire l'équation pour les valeurs paramétriques des points d'inflexion de R_4 et l'équation de la courbe F_3, enveloppe des tangentes d'inflexion de toutes les R_3. Les valeurs paramétriques λ de quatre points de R_4 qui forment un quadruple de l'involution fondamentale biquadratique I_4, suffisent à une équation de quatrième degré en λ dont les coefficients dépendent linéairement d'une grandeur variable. L'involution sert à arranger les osculantes R_3 en groupes, chacun de quatre. Trois R_3 d'un groupe possèdent trois tangentes d'inflexion communes à chacun des trois couples qu'on en peut former, et qui se rencontrent dans un même point H. Le lieu de H est une section conique K qui se trouve en correspondance univoque avec R_4. Le théorème de Brill et de Grassmann qui dit que les six points d'inflexion de R_4 sont sur une même conique w se démontre par un raisonnement de Géométrie pure, mais les points de w se déterminent par une représentation paramétrique. Les quatre tangentes doubles de R_4 sont les tangentes fondamentales d'une série de sections coniques. Toute courbe de cette série a, outre les tangentes doubles, quatre tangentes en commun avec R_4 et de même avec K : les points de contact de ces tangentes

forment des quadruples correspondants de l'involution I_4. Ayant encore indiqué une méthode pour calculer les valeurs paramétriques pour les points doubles de R_4, l'auteur établit l'équation de la courbe cubique C_3 qui passe par les points doubles et d'inflexion de R_4. Soit δ la section conique qui touche C_3 aux points doubles de R_4 : l'équation de R_4 pourra être mise sous la forme $C_3 l = \varpi\delta$, où l dénote une certaine ligne droite. L'involution biquadratique située sur ρ_4 mène à une infinité simple de surfaces de second ordre dont le contour apparent dans le plan de R_4 est formé par les sections coniques f_2 d'une série qui appartient à un tissu linéaire de deuxième espèce. Ce tissu se compose des premières polaires de toutes les droites, par rapport à une courbe déterminée ψ_3 de troisième classe. Les premières polaires des tangentes de K sont les f_2, leurs secondes polaires sont des faisceaux de rayons dont les centres sont sur R_4. A toute droite correspond, par rapport à ψ_3, une seconde polaire dont le centre est l'image perspective d'un point de la surface steinérienne, mentionnée ci-dessus, qui est donc représentée d'une manière univoque sur le champ des droites du plan de R_4. En vertu de cette représentation, la section conique ϖ correspond, dans le même plan, à un faisceau de rayons dont le centre se trouve comme le centre d'une involution sur K de second degré qui est homographique à l'involution fondamentale. Deux quadruples de l'involution fondamentale suffisent complètement pour déterminer la courbe R_4, abstraction faite de transformations collinéaires. Pour éclairer cette circonstance par l'analyse, l'auteur déduit, des coefficients des deux formes de quatrième degré qui déterminent les deux quadruples, les équations de toutes les courbes R_4 qui, étant collinéaires entre elles, portent les involutions.

Thomae (*J.*). — Sur les intégrales de seconde espèce. (326-336).

Dans un Mémoire antérieur [même Journal, t. XCIII, *Bulletin* (2), t. IX_2, p. 43], M. Thomae a achevé de représenter l'expression

$$\frac{\partial \log \vartheta((v))}{\partial \zeta}, \quad v_\nu = u_\nu(\sigma, \zeta) - \sum_\mu u_\nu(s_\mu, z_\mu)$$

par des intégrales de seconde espèce et par des fonctions algébriques aussi bien par rapport aux variables s, z que par rapport au couple de valeurs paramétriques σ, ζ. La partie algébrique contient une fonction q dont la racine carrée a deux valeurs dans l'aire T, mais une seule dans l'aire T', et qui devient zéro de second ordre en certains points dépendant de σ, ζ. Dans le cas d'une surface T à deux feuillets ou d'une surface T à trois feuillets et qui ne possède que des points doubles de ramification, il était facile d'établir cette fonction algébrique. Mais dans le cas général il restait encore à en faire la construction.

Plus tard [*Même journal*, t. XCIV, *Bulletin* (2), t. IX, p. 200] l'auteur s'est appliqué à délivrer le résultat de cette fonction q dans le cas de $p = 3$. Mais à cet effet il avait choisi une forme de l'équation fondamentale représentant la ramification de la surface T, où les points de ramification ne sont pas indépendants les uns des autres, tandis que d'autre part la supposition de cette indépendance servait de fondement à l'investigation. Ce défaut a engagé l'auteur à revenir à son sujet. Ayant encore réussi depuis à effectuer quelques simplifications dans le cas général, il reprend maintenant de nouveau l'étude tout entière et l'expose dans une forme qu'il préfère lui donner d'après les nouveaux aspects

qu'il a gagnés. Les résultats ne diffèrent guère de ceux obtenus dans les travaux antérieurs.

Kronecker (*L.*). — Sur la notion de nombre. (337-355).

M. Kronecker part d'une série d'objets différents et distinguables pour nous, auxquels on peut attribuer certaines désignations ordonnées d'après une suite fixée, les *nombres ordinaux*. L'ensemble des désignations appliquées à une série donnée se comprend par la notion de *nombre des objets* qui l'attache d'une manière univoque à la dernière des désignations que l'on vient d'employer. C'est ce qui conduit à la notion de *nombre cardinal* ou simplement de *nombre*. A une même série d'objets on peut attribuer la suite des nombres ordinaux selon différentes méthodes en fixant de nouveau l'ordre des désignations : cependant l'ensemble des désignations et par conséquent le *nombre* des objets reste invariable, il subsiste comme le seul *invariant*. De là découlent des démonstrations simples pour la permutabilité des termes d'une somme et des facteurs d'un produit, parce que les résultats obtenus de différentes manières se trouvent être des expressions différentes pour le nombre des mêmes objets, seulement dans des ordres divers. Puis l'auteur montre qu'il suffit d'introduire, par principe, les *indéterminées* dans les opérations de l'Algèbre sans que l'on ait besoin d'y introduire les nombres négatifs, fractionnaires, réels et imaginaires. Certains modules algébriques ou systèmes de modules nous mettent à même de renoncer à ces quantités-là. Dans le Mémoire : *Un théorème fondamental de l'Arithmétique générale* [*Bulletin* (2), t. XVI_2, p. 30], l'auteur avait déjà montré qu'on peut se passer d'introduire et d'employer les nombres algébriques à moins qu'il ne s'agisse d'isoler les quantités conjuguées : à présent cet isolement s'achève sans l'introduction d'aucun nouveau concept. C'est que l'on détermine des intervalles d'une petitesse arbitraire dans lesquels la valeur absolue de la fonction ne surpasse pas une grandeur aussi petite que l'on voudra, et pour lesquels elle possède des valeurs de signe opposé aux extrémités.

La première partie de ce Mémoire fait part de la *Festschrift* publiée par les amis de M. Zeller, philosophe de l'Université et de l'Académie de Berlin, en l'honneur du cinquantième anniversaire de son doctorat.

E. Lampe.

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE, publiées, sous les auspices du Ministre de l'Instruction publique, par un Comité de rédaction composé de MM. les Maîtres de Conférences de l'École.

Troisième série, t. VIII, 1891 (1).

Painlevé. — Mémoire sur les équations différentielles du premier ordre. (9-58, 103-140, 201-226, 267-284).

---

(1) Voir *Bulletin*, XVI_2, p. 182.

L'auteur considère une équation quelconque du premier ordre

$$(1) \qquad F[y, y', (x)] = 0,$$

où la fonction et sa dérivée figurent algébriquement, et il fait une importante distinction entre les points critiques fixes des intégrales et les points critiques mobiles, c'est-à-dire susceptibles de se déplacer avec la constante d'intégration. Ces derniers ne peuvent être pour les intégrales des points d'indétermination, tandis que les singularités des équations d'ordre supérieur au premier peuvent être essentiellement mobiles.

L'auteur trace ensuite dans le plan de la variable indépendante un système de coupures qui empêchent cette variable de tourner autour des points critiques fixes.

Si y_0 désigne la valeur en x_0 d'une intégrale particulière $y(x)$ et si, faisant varier x à partir de x_0, on suit les variations correspondantes de y à partir de y_0, il peut arriver que y acquière un nombre limité ou illimité de valeurs en un même point x. Si c'est le premier cas qui se trouve réalisé (quel que soit y_0), on dira que l'intégrale générale ne prend que n valeurs autour des points critiques mobiles.

Deux problèmes se posent alors :

1° Étudier les propriétés de l'intégrale quand elle est de cette nature;

2° Reconnaître si l'intégrale d'une équation donnée (1) ne prend qu'un nombre limité de valeurs autour des points critiques mobiles.

Pour traiter ces deux problèmes, M. Painlevé conçoit l'intégrale générale mise sous une forme qui met en évidence une classe de courbes associées à l'équation proposée et dont chacune est une transformée rationnelle de la courbe représentée par l'équation (1), quand, pour une valeur fixe de la variable, on regarde y et y' comme des coordonnées.

En effet, cette intégrale vérifie une équation telle que

$$\rho[y, y', (x)] = \gamma,$$

γ désignant une constante, ρ une fonction rationnelle de y, y', et y' la fonction de (y, x) que détermine l'équation (1).

Plus généralement, l'intégrale vérifie une infinité de relations de la forme

$$R[y, y', (x)] = A(x, C),$$

où A est une fonction de x dont les points critiques sont indépendants de la constante C.

Deux *constantes intégrales* γ, γ_1 sont liées par une relation algébrique. Deux *fonctions intégrales* A, A_1 sont liées par une relation où x entre d'une façon quelconque, mais où A, A_1 figurent algébriquement.

On peut toujours choisir deux fonctions (ou, si l'on veut, deux constantes) intégrales

$$r = a, \qquad r_1 = a_1,$$

liées par l'équation

$$h[r, r_1, (x)] = 0,$$

de telle sorte que toute autre fonction intégrale $R = a$ s'exprime rationnellement à l'aide de r, r_1

$$R = \varphi[r, r_1, (x)], \qquad A = \varphi[a, a_1, (x)].$$

Cette relation $h = 0$, dont les modules sont indépendants de x, n'est déterminée qu'à une transformation birationnelle près : c'est la *relation entre les fonctions (ou constantes) intégrales.*

Les égalités

$$\gamma = \rho[y, y', (x)], \qquad \gamma_1 = \rho_1[y, y', (x)],$$

définissent une correspondance rationnelle entre la courbe

$$(1) \qquad F[y, y', (x)] = 0$$

et la courbe

$$(2) \qquad h(\gamma, \gamma_1) = 0,$$

que représente la relation entre les constantes intégrales.

Si le genre π de la courbe (2) est égal à zéro, il existe une correspondance birationnelle entre la courbe (1) et les courbes représentées par la relation

$$(3) \qquad G[y, \gamma, (x)] = 0,$$

relations que vérifient les intégrales, et dont le degré en γ est le même que celui de l'équation (1) en y'.

Dans tous les autres cas, il existe entre (1) et (3) une correspondance rationnelle.

On voit comment les transformations rationnelles des courbes algébriques s'introduisent d'elles-mêmes dans l'étude des intégrales des équations différentielles.

L'étude de ces transformations conduit M. Painlevé aux résultats suivants, essentiels pour l'intégration de l'équation (1) :

Soient

$$(\alpha) \qquad f(y, z) = 0,$$

$$(\beta) \qquad F(y_1, z_1) = 0$$

les deux équations de deux courbes de degrés m, m_1, et

$$(\gamma) \qquad \begin{cases} y = \varphi(y_1, z_1), \\ z = \psi(y_1, z_1) \end{cases}$$

deux fonctions rationnelles de (y_1, z_1) qui permettent de passer de (α) à (β).

Si le genre p de (α) est zéro, on peut toujours passer de (α) à (β) par une infinité de substitutions (γ) qui dépendent d'une fonction rationnelle arbitraire du point analytique (y_1, z_1) de (β).

Quand $p = 1$, on ne peut en général passer rationnellement de (α) à (β). Pour qu'il en soit ainsi, il faut qu'une intégrale abélienne de première espèce de la courbe (β) se ramène aux intégrales elliptiques de module égal au module de (α). Une telle transformation, quand elle existe, dépend toujours d'une constante et au moins d'un entier arbitraires, mais ne dépend jamais d'un second paramètre continu.

Quand p est plus grand que 1, il n'existe qu'un nombre fini de substitutions (γ) transformant (α) en (β), et toutes ces substitutions se calculent algébriquement.

Mais la question vraiment intéressante consiste à déterminer toutes les

courbes (α) distinctes qui correspondent rationnellement à une courbe (β) donnée (en entendant par courbes *distinctes* deux courbes qui ne se correspondent pas birationnellement). L'auteur montre qu'on peut calculer algébriquement un type de toutes les classes de courbes (de genre $p > 1$) qui se transforment rationnellement, d'après les formules (γ), en la courbe (β) donnée. Ces types (ou ces classes) sont en nombre limité.

L'application de ces théorèmes à l'étude des équations différentielles est immédiate; car, étant donnée une équation

$$F[y, y', (x)] = 0, \tag{1}$$

dont l'intégrale prend n valeurs autour des points critiques mobiles, il existe une correspondance rationnelle entre la courbe (1) et une certaine courbe

$$H(c, c_1) = 0,$$

qui définit la relation entre les constantes intégrales, et cette correspondance

$$c = R[y, y', (x)],$$
$$c_1 = R_1[y, y', (x)]$$

détermine l'intégrale générale de (1).

On est donc en état de décider s'il existe une telle courbe H de genre π supérieur à 1.

On sait par suite reconnaître algébriquement si l'intégrale de l'équation proposée ne prend qu'un nombre fini de valeurs autour des points critiques mobiles, la valeur correspondante de π étant supposée supérieure à 1. S'il en est ainsi, l'intégrale s'obtient elle-même algébriquement.

Quand le genre π est égal à 1, il peut être nécessaire, pour obtenir l'intégrale, de trouver une solution d'une équation linéaire et de reconnaître si une certaine intégrale abélienne n'a que deux périodes.

Seul, le cas où le genre π est égal à zéro échappe à la méthode; cette circonstance se présentera d'ailleurs nécessairement quand l'équation sera du premier degré par rapport à la dérivée. Quoi qu'il en soit, on pourra toujours décider par un calcul régulier si l'on ne se trouve pas dans le cas spécial où la méthode échoue.

Dans les problèmes de cette nature, la plus grande difficulté vient fréquemment de l'impossibilité où l'on se trouve de fixer la limite d'un entier arbitraire : cet entier est ici le nombre n des valeurs de l'intégrale autour des points critiques mobiles. La méthode de M. Painlevé permet de reconnaître dans un cas étendu si l'intégrale a un nombre limité de valeurs, ce nombre n'étant pas fixé à l'avance. Ce cas est celui où cette intégrale est algébrique dans tout le plan. Des calculs purement algébriques permettent de décider s'il en est ainsi dans l'hypothèse où le genre π est plus grand que 1.

Dans l'hypothèse $\pi = 1$, on ramène l'équation à une équation de la forme

$$\varphi(y)\,dy = \psi(x)\,dx,$$

dont l'intégrale doit être algébrique.

Mais la méthode ne fournit aucun renseignement sur le cas de $\pi = 0$.

Quand on s'est donné le nombre des valeurs que doit prendre la fonction autour des points critiques mobiles, il est possible de résoudre dans tous les cas le problème que s'est posé l'auteur; on est ramené à une équation différen-

tielle possédant des points critiques fixes; par suite l'intégration se fera soit par des calculs algébriques, soit par des quadratures, ou enfin on aura à intégrer une équation de Riccati.

M. Painlevé fait ensuite connaître une seconde méthode plus pratique, qu'il applique aux équations du premier ordre et du premier degré et donne des exemples intéressants de cette forme où il met en évidence les invariants relatifs à une substitution linéaire quelconque faite sur la fonction.

La conclusion générale à laquelle l'auteur est conduit est identique à celle de M. Poincaré dans son étude générale des équations de M. Fuchs : les intégrales générales à n valeurs des équations du premier ordre sont des transcendantes qui ne diffèrent pas de celles que définissent les quadratures ou les équations linéaires. C'est là une distinction essentielle entre les équations de premier ordre et celles du second.

Riquier. — Sur les principes de la théorie générale des fonctions. (59-86, 141-172).

L'auteur se propose de donner un fondement solide à la théorie générale des fonctions en la faisant reposer sur les propriétés des séries entières.

Il développe, en la perfectionnant sur quelques points, la méthode succinctement exposée par M. Méray dans son *Nouveau précis d'Analyse infinitésimale* publié en 1872.

Klein (*F.*). — Considérations comparatives sur les recherches géométriques modernes. (87-102, 173-199).

Brioschi. — Sur la réduction de l'intégrale hyperelliptique à l'elliptique par une transformation du troisième degré. (227-230).

Sauvage. — Théorie des diviseurs élémentaires et applications. (285-340).

La théorie des diviseurs élémentaires (*Elementartheiler*) est due, comme on sait, à M. Weierstrass.

Soient [P], [Q] les deux déterminants :

$$\begin{vmatrix} A_{11} & \dots & A_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & \dots & A_{nn} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} B_{11} & \dots & B_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ B_{n1} & \dots & B_{nn} \end{vmatrix},$$

et [P, Q] le déterminant

$$\begin{vmatrix} pA_{11} + qB_{11} & \dots & pA_{1n} + qB_{1n} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots & \dots\dots\dots\dots \\ pA_{n1} + qB_{n1} & \dots & pA_{nn} + qB_{nn} \end{vmatrix}.$$

[P, Q] est égal à un produit de n facteurs linéaires $ap + bq$, distincts ou non.

Soient l_0 l'exposant du facteur $ap + bq$ dans [P, Q] et l_π l'exposant de ce même facteur dans le plus grand commun diviseur de tous les mineurs d'ordre π.

On démontre que les exposants $l_0, l_1, l_2, \ldots$ vont nécessairement en diminuant. Si donc on pose

$$l_0 - l_1 = e_0, \quad l_1 - l_2 = e_1, \quad \ldots, \quad l_{r-1} - l_r = e_{r-1}, \quad l_r = e_r$$

(l_r étant le dernier exposant l qui ne soit pas nul), on aura

$$l_0 = e_0 + e_1 + \ldots + e_{r-1} + e_r,$$

et pour l'exposant l_0^i du facteur $a_i p + b_i q$ dans [P, Q]

$$l_0^i = e_0^i + e_1^i + \ldots + e_{r_i}^i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Il résulte de là que le déterminant [P, Q] pourra être représenté par le produit

$$\Pi(a_i p + b_i q)^{e_j^i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m; j = 0, 1, \ldots, r_i).$$

Chacun des facteurs de ce produit est un *diviseur élémentaire* du déterminant [P, Q].

La théorie des diviseurs élémentaires est intimement liée à celle des *formes bilinéaires*.

Soient les deux formes bilinéaires

$$N = \Sigma A_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$
$$S = \Sigma B_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$

aux mêmes $2n$ variables $x_1, y_1, \ldots, x_n, y_n$. Les déterminants de ces formes sont par définition les déterminants [P] et [Q].

Si l'on fait les substitutions

$$(S) \qquad \begin{cases} x_i = \Sigma_j h_{ij} x'_j, \\ y_i = \Sigma_j k_{ij} y'_j, \end{cases}$$

les formes P et Q deviendront P′ et Q′.

Or les déterminants des deux formes

$$pP + qQ \quad \text{et} \quad pP' + qQ'$$

admettent les mêmes diviseurs élémentaires.

La réciproque de cette proposition s'énonce ainsi :

Étant donnés deux couples de formes bilinéaires

$$P(x \mid y), \quad Q(x \mid y)$$

et

$$P'(x' \mid y'), \quad Q'(x' \mid y'),$$

si les deux déterminants [P, Q] et [P′, Q′] ont les mêmes diviseurs élémentaires on peut déterminer $2n^2$ constantes h et k telles que les substitutions (S) changent P en P′, Q en Q′.

Une première solution de ce problème considérable a été donnée par M. Weierstrass. M. Sauvage en fait connaître une autre qui n'est qu'une extension de celle qu'a donnée M. Darboux pour les formes biquadratiques.

L'auteur fait, en terminant, l'application de cette théorie à l'étude des équations différentielles linéaires.

Cels. — Sur les équations différentielles linéaires ordinaires. (341-415).

L'objet principal de ce Mémoire, divisé en trois Parties, est l'étude de certaines équations adjointes à une équation différentielle linéaire et analogues à l'adjointe de Lagrange.

L'auteur considère une équation (E) d'ordre n admettant les n solutions fondamentales $y_1, y_2 \ldots, y_n$, avec lesquelles il forme, d'après Jacobi, le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ y'_1 & y'_2 & \cdots & y'_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{n-1} & y_2^{n-2} & \cdots & y_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Il prend ensuite les quotients des mineurs correspondant aux éléments d'une ligne quelconque par le déterminant Δ. Ces quotients, au nombre de n, sont solutions d'une équation linéaire (E_1) d'ordre n, dont les coefficients sont des fonctions des coefficients de l'équation (E) et des dérivées de ces coefficients.

Cette équation adjointe (E_1) est réciproque avec l'équation (E), c'est-à-dire qu'en prenant l'adjointe de l'adjointe on retrouve l'équation proposée.

Il existe donc, pour une équation d'ordre n, n adjointes correspondant aux n lignes du déterminant fondamental relatif à l'équation (E). La dernière, celle qui correspond à la dernière ligne, est l'adjointe de Lagrange, comme l'a montré Jacobi.

Si l'on connaît l'intégrale générale d'une des adjointes, on saura intégrer l'équation donnée. Quand on connaît plusieurs solutions particulières de l'une d'elles, il est facile d'avoir les solutions particulières de l'adjointe de Lagrange et par suite de simplifier l'intégration de la proposée.

Reste à former les adjointes. Il suffit de remarquer qu'une équation d'ordre $n-1$, admettant $n-1$ solutions communes avec l'équation (E), aura précisément pour coefficients les solutions des adjointes correspondant aux différentes lignes du déterminant fondamental de l'équation (E). Il suffira donc d'écrire que cette équation a $n-1$ solutions communes avec l'équation (E) pour avoir n relations desquelles il suffira d'éliminer $n-1$ des quantités pour avoir l'équation que l'on veut obtenir.

Tel est l'objet de la première partie du Mémoire; l'auteur la complète par une théorie de l'élimination relative aux équations différentielles linéaires.

Dans la seconde Partie il imagine pour les équations différentielles linéaires ordinaires une méthode de correspondance doublement infinie, analogue à celle que Laplace a inventée pour les équations linéaires aux dérivées partielles du deuxième ordre.

Partant d'une équation (E) il prend son adjointe de Lagrange (E_1); pour l'équation (E_1) il prend l'adjointe de la première ligne (E_2); pour celle-ci l'adjointe de Lagrange, etc.

Enfin il forme une autre suite en prenant d'abord pour l'équation (E) l'adjointe de la première ligne, pour celle-ci l'adjointe de Lagrange, etc.

Cette suite doublement infinie est telle que, si l'on a l'intégrale générale d'une équation de la suite, on a, sans nouvelle intégration, l'intégrale générale de (E). Si l'on a une solution particulière d'une équation paire, par exemple, on a sans nouvelle intégration les solutions correspondantes de toutes les équations paires.

M. Cels applique sa méthode à des classes particulières d'équations.

Il prend d'abord les équations qui généralisent l'équation hypergéométrique. Dans ce cas, toutes les équations de la suite ont la même forme. L'application du procédé conduit à ce résultat : lorsque toutes les racines de l'équation déterminante du point ∞ sont entières et négatives, il faut et il suffit que les logarithmes disparaissent dans les développements des intégrales *autour du point critique* ∞ pour que l'intégrale générale soit un polynôme.

Qu'arrive-t-il lorsqu'une des équations de la suite a pour intégrale générale un polynôme? L'équation proposée s'intègre alors sous forme finie ou par des quadratures lorsque les racines de l'équation déterminante du point ∞ sont entières et que certaines conditions algébriques sont réalisées. En particulier, lorsque toutes les racines de cette équation déterminante sont entières et positives, pour que l'intégrale générale soit une fraction rationnelle, il faut et il suffit que les logarithmes disparaissent dans les développements des intégrales autour du point ∞. Enfin l'application de ces résultats à une équation déjà considérée par M. Goursat conduit à une proposition très simple qui décide des cas où l'intégration se fait par la méthode de M. Cels.

Appliquée à l'équation du deuxième ordre, cette méthode fournit une formule contenant des dérivées à indice quelconque qui exprime l'intégrale générale de cette équation.

L'auteur aborde ensuite l'étude de l'équation

$$x^{n-1}\frac{d^n z}{dx^n} + a x^{n-2}\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + \ldots + h\frac{dz}{dx} + x^{n-1} z + 0,$$

qui généralise dans les ordres supérieurs l'équation de Bessel et distingue spécialement deux cas :

1° Quand les racines de l'équation déterminante du point o sont

$$0, \quad 1+pn, \quad 2+pn, \quad \ldots, \quad (n-1)+pn,$$

p étant un entier positif ou négatif;

2° Lorsque ces racines sont

$$1+pn, \quad 2+pn, \quad \ldots, \quad (n-2)+pn, \quad (n-1)+qn$$

ou

$$(n-1)+pn, \quad (n-2)+pn, \quad \ldots, \quad 2+pn, \quad 1+qn,$$

p et q étant deux entiers positifs ou négatifs.

Cette étude conduit à l'intégration des équations du deuxième et du troisième ordre dans tous les cas où l'intégrale générale est uniforme autour du point zéro; il n'en est pas de même pour les équations d'ordre supérieur, parce que, dans une équation d'ordre n, les conditions nécessaires et suffisantes pour que l'intégrale générale soit uniforme autour du point critique zéro sont que les racines de l'équation déterminante du point zéro soient respectivement $1, 2, \ldots, (n-1)$ à un multiple de n près, qui n'est pas le même pour toutes les intégrales.

Dans la troisième Partie de son Mémoire, M. Cels étudie le cas où, dans la suite des équations correspondant à l'équation (E), il se trouve une équation identique à la proposée. Le cas le plus intéressant est celui où la suite est périodique, c'est-à-dire où $(E) = (E_{2n})$. Dans ce cas, l'intégration est possible. Les équations appartiennent à la classe de celles que l'on peut ramener aux équations linéaires à coefficients constants par un changement de fonction suivi d'un changement de variable.

L'auteur montre ensuite qu'il existe autant de méthodes de correspondance doublement infinie qu'il y a de combinaisons de lignes deux à deux dans le déterminant fondamental.

Il existe des correspondances plus que doublement infinies; on les obtient en considérant, par exemple, trois lignes du déterminant fondamental; on a alors une correspondance sextuplement infinie.

Ces correspondances permettent de généraliser de plus en plus les caractères d'intégrabilité d'une équation.

Supplément.

Bourlet. — Sur les équations aux dérivées partielles simultanées qui contiennent plusieurs fonctions inconnues. (3-63).

Ce travail est divisé en trois Parties.

Dans la première, M. Bourlet établit la condition nécessaire pour qu'un système d'équations aux dérivées partielles simultanées admette comme système d'intégrales le plus général un système dépendant d'un nombre *fini* de constantes arbitraires. Cette condition avait déjà été énoncée et démontrée d'une autre manière par M. Sophus Lie.

On sait ce que l'on entend par système complètement intégrable de mn équations aux dérivées partielles du premier ordre, à m fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ et à n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

$$(1) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = f_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n).$$

C'est un système où les fonctions f_{ik} satisfont aux relations

$$\frac{\partial f_{ik}}{\partial x_h} + \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_1} f_{1h} + \ldots + \frac{\partial f_{ik}}{\partial u_m} f_{mh} = \frac{\partial f_{ih}}{\partial x_k} + \frac{\partial f_{ih}}{\partial u_1} f_{1k} + \ldots + \frac{\partial f_{ih}}{\partial u_m} f_{mh}$$
$$(i = 1, 2, \ldots, m;\ k, h = 1, 2, \ldots, n),$$

qui expriment que les deux valeurs des dérivées secondes $\dfrac{\partial^2 u_{ij}}{\partial x_k \partial x_h}$ que l'on peut calculer au moyen des équations (1) sont identiques.

Voici, sur ces systèmes, la proposition préliminaire que démontre M. Bourlet pour l'appliquer à la solution du problème proposé.

Étant donné le système de mn équations aux dérivées partielles du premier ordre

$$(1) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = f_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m;\ k = 1, 2, \ldots, n),$$

où f_{ik} désigne une fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n$, et les p relations distinctes

$$(2) \qquad \varphi_h(u_1, u_2, \ldots, u_m, x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0, \qquad (h = 1, 2, \ldots, p),$$

s'il existe des fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ de $x_1, \ldots, x_n$ vérifiant à la fois les équations (1) et (2), ces fonctions satisferont à un système complètement intégrable

de la forme

$$(3) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = F_{ik} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots, n) \qquad r < m,$$

et à $m - r$ relations de la forme

$$(4) \qquad \begin{cases} u_{r+1} = \psi_1(u_1, u_2, \ldots, u_r; x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_m = \psi_{m-r}(u_1, u_2, \ldots, u_r; x_1, \ldots, x_n), \end{cases}$$

et, réciproquement, toutes les solutions des systèmes (3) et (4) satisfont aux systèmes (1) et (2).

Le système (3) étant complètement intégrable, un théorème connu montre que le système d'intégrales le plus général dépend de r constantes arbitraires, et fournit même le moyen de trouver ces intégrales.

Le théorème préliminaire qui vient d'être énoncé conduit enfin à la proposition suivante :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un système (A) d'équations aux dérivées partielles simultanées entre p fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$ et n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ admette comme système le plus général d'intégrales un système dépendant d'un nombre *fini* de constantes arbitraires ou soit incompatible, est qu'en adjoignant aux équations de ce système certaines des équations que l'on peut en déduire en les dérivant une ou plusieurs fois par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_n$, on puisse former un second système (B) équivalent au système (A), tel qu'on puisse tirer de ce système toutes les dérivées des fonctions $z_1, z_2, \ldots, z_p$, respectivement d'ordres $s_1, s_2, \ldots, s_p$ en fonction de $x_1, x_2, \ldots, x_p, z_1, z_2, \ldots, z_p$ et de leurs dérivées d'ordres respectivement inférieurs à $s_1, s_2, \ldots, s_p$.

Lorsque cette condition est remplie, on peut ramener l'intégration du système (A) à l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires du premier ordre.

Ce dernier résultat semble avoir été aperçu antérieurement par M. R. Liouville.

M. Bourlet consacre la deuxième Partie de son Mémoire à l'étude spéciale des systèmes linéaires d'équations aux dérivées partielles du premier ordre.

Voici comment il définit les systèmes canoniques :

Étant donné un système d'équations aux dérivées partielles du premier ordre linéaire, entre m fonctions $u_1, u_2, \ldots, u_m$ et n variables indépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_n$, résolu par rapport à un certain nombre de dérivées $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \psi_{ik},$$

ce système sera dit mis sous forme *canonique* si les fonctions ψ_{ik} de $x_1, x_2, \ldots x_n, u_1, u_2, \ldots, u_m$ et des dérivées de $u_1, u_2, \ldots, u_m$ (qui y sont contenues linéairement) satisfont aux conditions suivantes :

1° ψ_{ik} ne renferme que des dérivées par rapport aux variables x_p dont l'indice h est égal ou supérieur à k;

2° Si une dérivée $\frac{\partial u_j}{\partial x_k}$ d'une fonction u_j par rapport à la variable x_k figure dans ψ_{ik}, l'indice j de cette fonction est supérieur à i.

L'auteur montre que tout système linéaire du premier ordre peut être mis sous forme canonique.

Il définit les systèmes canoniques complètement intégrables et fait voir qu'un pareil système admet toujours un système d'intégrales générales dont le degré de généralité est parfaitement défini.

La troisième Partie du travail sert de lien entre les deux premières et contient les conclusions que voici :

La convergence des développements des intégrales d'un système quelconque, calculés au moyen des équations mêmes de ce système, est établie.

Le degré de généralité du système le plus général d'intégrales n'est précisé en toute rigueur que dans deux cas :

1° Quand le système ne dépend que d'un nombre fini de constantes arbitraires;

2° Quand le système proposé peut être ramené à un système du premier ordre complètement intégrable.

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CXII; 1891 (1).

Brioschi. — Sur une classe d'équations modulaires. (28-32).

Appell. — Sur les équations différentielles linéaires transformables en elles-mêmes par un changement de fonction et de variable. (34-37).

Soit une équation du second ordre

$$\frac{d^2u}{dz^2} - uf(z) = 0.$$

(On peut toujours supposer une équation du second ordre privée de second terme par un changement de fonction.) Si l'on fait

$$u = v[\varphi'(z)]^{-\frac{1}{2}}, \qquad t = \varphi(z),$$

cette équation se transforme en une autre de même forme, où u est remplacé par v et z par t, pourvu que l'on ait

$$f[\varphi(z)] = \frac{1}{\varphi'^2} f(z) - \pi(z),$$

où

$$\pi(z) = \frac{3\varphi''^2 - 2\varphi'\varphi'''}{4\varphi'^4}.$$

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XVI_2, p. 119.

Lorsque $f(z)$ est donnée, la détermination d'une solution $\varphi(z)$ est dans la plupart des cas impossible.

Si, au contraire, on se donne $\varphi(z)$, on aura une fonction particulière $f_1(z)$ vérifiant la condition ci-dessus en formant la série

$$f_1(z) = \sum_{\nu=0}^{\nu=\infty} [\varphi'(z)\varphi'(z_1)\ldots\varphi'(z_\nu)]^2 \pi(z_\nu).$$

On suppose que la fonction $\varphi(z_1)$ est holomorphe dans tout le plan, que les points

$$z_1 = \varphi(z), \qquad z_2 = \varphi(z_1), \qquad \ldots, \qquad z_i = \varphi(z_{i-1}), \qquad \ldots$$

sont tous dans cette région et convergent régulièrement vers un point limite x qui n'est pas un point essentiel de $\varphi(z)$. Alors le module de $\varphi'(x)$ est moindre que l'unité et la fonction $f_1(z)$ est holomorphe au point x.

D'après un théorème de M. Kœnigs, la fonction $f(z)$ la plus générale, holomorphe ou méromorphe au point x et vérifiant la relation ci-dessus, est

$$f(z) = f_1(z) + \alpha\left[\frac{B'(z)}{B(z)}\right]^2,$$

α désignant une constante arbitraire.

L'intégrale générale de l'équation du second ordre est régulière dans le domaine du point limite x. Les racines de l'équation fondamentale déterminante étant r_1 et r_2, on trouve que l'équation admet les deux intégrales particulières

$$B^{r_1}(z)[B'(z)]^{-\frac{1}{2}}, \qquad B^{r_2}(z)[B'(z)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Ce résultat montre que les coefficients de l'équation deviennent constants par la substitution

$$t = \log B(z), \qquad u = v[B'(z)]^{-\frac{1}{2}}.$$

Lorsque $\varphi(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$, $B(z)$ est de même forme (équations intégrées par M. Besge et par Halphen).

Léauté. — Note sur les poulies-volants. (75-77).

Vicaire. — Sur les petites oscillations d'un système soumis à des forces perturbatrices périodiques. (82-87).

On suppose qu'aux forces constitutives d'un système, considéré dans une position stable, viennent s'ajouter des forces perturbatrices très petites, fonctions périodiques du temps. On pourra les développer en séries trigonométriques. Mais, à cause de la forme linéaire des équations des petits mouvements, on sera ramené au cas où toutes les forces perturbatrices, ayant même période et même phase, n'amèneraient dans chaque équation qu'une seule fonction circulaire ayant partout le même argument. C'est ce que M. Vicaire appelle une *force perturbatrice simple*.

Chaque force perturbatrice simple introduit dans le système une oscillation

simple dont la période est celle de la force et dont l'amplitude est déterminée pour chaque point, indépendamment des conditions initiales du mouvement.

Si la période de la force perturbatrice tend vers celle de l'une des oscillations simples propres au système, l'amplitude de la perturbation devient de plus en plus grande. A la limite, la perturbation se confond avec l'oscillation simple correspondante dont l'amplitude augmente indéfiniment avec le temps.

Ce dernier théorème fournit l'explication d'un grand nombre de phénomènes : mise en vibration d'une corde sonore quand l'air ambiant vibre à l'unisson et non autrement; absorption des rayons de lumière et de chaleur par un milieu capable d'engendrer des rayons de même longueur d'onde, etc.

Sire. — Nouvel appareil gyratoire, le gyroscope alternatif. (155-156).

« L'appareil se compose d'une poulie très légère dans la gorge de laquelle s'enroule, en plusieurs spires superposées, un fil dont l'extrémité est fixée à la gorge. La poulie porte diamétralement les crapaudines de l'arbre d'un tore auquel on imprime, à l'aide d'un fil spécial, un mouvement rapide de rotation. En tenant l'extrémité libre du fil de la poulie, on observe d'abord que la poulie descend lentement, en même temps qu'elle tourne autour du fil. Lorsque l'axe du tore devient à peu près parallèle au fil, il se produit un déroulement brusque, mais peu étendu, puis les choses se passent comme ci-dessus, à cette différence près que la rotation autour du fil a changé de sens. »

Phillips. — Pendule isochrone. (177-181).

Picard. — Sur la représentation approchée des fonctions. (185-186).

Étant donnée une fonction $f(\varphi)$, continue et de période 2π, on peut trouver une suite finie de Fourier $F(\varphi)$ telle que $f(\varphi)$ puisse être représentée par $F(\varphi)$ avec une approximation donnée à l'avance.

C'est ce que montre très simplement M. Picard en partant du développement de la célèbre intégrale de Poisson

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1+r^2}{1-2r\cos(\psi-\varphi)+r^2}f(\psi)\,d\psi.$$

De ce résultat M. Picard tire immédiatement la démonstration d'un théorème auquel M. Weierstrass était parvenu récemment par une voie très compliquée :

« On peut représenter la fonction $f(\varphi)$ continue dans l'intervalle (α, β) par un polynôme $P(\varphi)$, avec une approximation au moins égale à 4ε, ε étant donné à l'avance. »

De ce théorème M. Weierstrass a déduit la possibilité de développer toute fonction continue $f(x)$ d'une variable réelle entre α et β par une série de la forme

$$f_0(x)+f_1(x)+\ldots+f_n(x)+\ldots,$$

les f étant des polynômes et la série étant uniformément et absolument convergente.

Les considérations qui précèdent s'étendent aux fonctions d'un nombre quelconque de variables.

Ainsi toute fonction de deux variables $f(\theta, \psi)$ continue sur toute la sphère de rayon 1, est représentable par une suite limitée de fonctions Y_n avec une approximation au moins égale à ε.

On conclut de là que toute fonction de deux variables réelles x et y continue dans un certain domaine peut être représentée par un polynôme $P(x, y)$ avec une approximation au moins égale à une quantité d'ailleurs quelconque ε.

Il en résulte que toute fonction $f(x, y)$ peut être développée en une série absolument et uniformément convergente de polynômes à deux variables.

Minkowski. — Théorèmes arithmétiques. (209-212).

Soient $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ n formes linéaires indépendantes à n variables x, y, z. Parmi ces formes, il y en a 2β qui sont imaginaires, conjuguées deux à deux, et $\alpha = n - 2\beta$ qui sont réelles (l'un ou l'autre des deux nombres α, β, pouvant d'ailleurs être égal à zéro). Soient Δ le déterminant des formes ξ, η, ζ, et p un nombre quelconque au moins égal à 1.

On peut toujours assigner à x, y, z des valeurs entières telles que la somme

$$|\xi|^p + |\eta|^p + |\zeta|^p + \ldots$$

soit différente de zéro, et en même temps plus petite que la quantité

$$\left\{ \left(\frac{2}{\pi}\right)^{\beta} \frac{\Gamma\left(1 + \frac{n}{p}\right)}{\left[\Gamma\left(1 + \frac{1}{p}\right)\right]^{\alpha} 2^{-\frac{2\beta}{p}} \left[\Gamma\left(1 + \frac{2}{p}\right)\right]^{\beta}} |\Delta|^{\frac{p}{n}} \right\},$$

qui est elle-même inférieure à $n|\Delta|^{\frac{p}{n}}$.

De ce théorème M. Minkowski tire divers résultats fondamentaux pour la théorie des nombres algébriques, entre autres celui-ci :

Le discriminant d'un corps algébrique, faisant partie de n corps conjugués dont 2β sont imaginaires, et $n - 2\beta$ réels, est en valeur absolue toujours plus grand que

$$\left[\left(\frac{\pi}{4}\right)^{\beta} \frac{n^n}{2.3\ldots n}\right]^2.$$

Ainsi se trouve démontré le postulat de M. Kronecker, que tout discriminant est différent de $+1$, c'est-à-dire que tout discriminant contient des nombres premiers comme facteurs. C'est là un fait remarquable; tout nombre algébrique irrationnel a ainsi ses nombres premiers critiques, comme toute fonction algébrique irrationnelle a ses points d'embranchement.

Amigues. — Démonstration purement algébrique du théorème fondamental de la théorie des équations algébriques. (212-214).

De Saint-Germain. — Sur le mouvement d'un double cône qui roule sur deux droites. (215-216).

Defforges. — Sur la résistance opposée par l'air au mouvement d'un pendule. (217-219).

Potier. — Sur le principe d'Huygens. (220-223).

Helmholtz et Kirchhoff ont donné le moyen, dans le cas de mouvements périodiques, de déduire l'état vibratoire d'un point de celui d'une couche infiniment mince qui l'entoure complètement. Ils ont trouvé ainsi une solution particulière du problème que soulève le principe d'Huygens : Rechercher comment doivent être distribuées, sur une surface enveloppant les centres d'ébranlement, les sources fictives qui leur sont équivalentes pour les points extérieurs à cette surface, ainsi que la nature du mouvement produit par chacune de ces sources.

M. Potier donne de ce problème une solution plus générale qui ne suppose pas la périodicité des ébranlements. Cette solution repose sur le théorème suivant :

« Soient une surface quelconque Σ, deux points A et B, r et ρ les distances de ces deux points à un élément $d\sigma$ de la surface, dn un élément de la normale à cette surface, F une fonction de $r+\rho$ ne devenant infinie pour aucune valeur de la variable; l'expression

$$\int \frac{d\sigma}{r\rho}\left[\left(\frac{F}{r}-F'\right)\frac{\partial r}{\partial n}-\left(\frac{F}{\rho}-F'\right)\frac{\partial \rho}{\partial n}\right]$$

est égale à

$$0 \quad \text{ou} \quad 4\pi\frac{F(R)}{R},$$

R désignant la distance AB, suivant que les deux points A et B sont du même côté de la surface Σ ou sont séparés par elle ».

Poincaré. — Sur le développement approché de la fonction perturbatrice. (269-273).

Il arrive souvent que, les moyens mouvements étant presque commensurables, certains termes de la fonction perturbatrice acquièrent, malgré leur rang élevé, une importance considérable, par suite de la présence de petits diviseurs.

Il peut être nécessaire d'en trouver des valeurs approchées sans connaître les termes qui précèdent.

M. Flamme, qui s'est occupé du calcul de ces valeurs approchées, commence par développer la fonction perturbatrice en une somme de termes, dont chacun est le produit de deux facteurs, le premier dépendant seulement de la longitude de la première et le second de la longitude de la seconde planète; puis à chacun de ces deux facteurs, il applique la méthode de M. Darboux sur les fonctions de grands nombres.

Comme il y a intérêt à éviter ce développement préliminaire, M. Poincaré applique directement cette méthode à la fonction perturbatrice elle-même, après l'avoir rendue applicable aux fonctions de deux variables.

Mannheim. — Remarques sur le déplacement d'une figure de forme invariable dont tous les plans passent par des points fixes. (283-284).

Andrade. — Sur le mouvement d'un vortex rectiligne dans un liquide contenu dans un prisme rectangle de longueur indéfinie. (418-421).

Ce problème a été résolu par M. Greenhill, grâce à l'emploi de la méthode des images.

Si $2a$ et $2b$ sont les dimensions transversales du prisme, $\operatorname{cotn} u$ et $\operatorname{cotn} u$ deux fonctions doublement périodiques de modules complémentaires dont les demi-périodes Ω, Ω' sont définies par la proportion

$$\frac{\Omega}{a} = \frac{\Omega'}{b} = \frac{1}{\sqrt{\lambda}},$$

la trajectoire décrite par le centre d'une section droite du vortex, dont les distances à deux faces contiguës du prisme sont x_0, y_0, a pour équation

$$\operatorname{cotn}^2\left(\frac{x_0}{\sqrt{\lambda}}\right) + \operatorname{cotn}^2\left(\frac{y_0}{\sqrt{\lambda}}\right) = \text{const.}$$

M. Andrade met en évidence une curieuse propriété du vortex confiné, et il étudie ensuite le régime permanent des pressions dans le cas particulier d'un vortex dont l'axe immobile coïnciderait avec l'axe indéfini du prisme.

D'Ocagne. — Sur la représentation plane des équations à quatre variables. (421-423).

Étant donnée une équation à quatre variables

$$F(x, y, z, t) = 0,$$

à chaque valeur de t correspond une surface. Cette surface est représentable sur un plan par ses courbes de niveau. Mais on ne peut songer à superposer sur un même plan les divers systèmes de courbes de niveau correspondant aux valeurs successives de t. De là l'impossibilité, à moins d'un artifice particulier, de représenter sur un plan les équations à quatre variables. Toutefois M. d'Ocagne expose une méthode, fondée sur l'emploi des *coordonnées parallèles,* qui permet d'effectuer la représentation plane d'une classe très étendue d'équations à quatre variables.

L'auteur a développé antérieurement la théorie de ces coordonnées qui déterminent une droite par les segments qu'elle détache sur deux axes parallèles à partir d'origines fixes.

Raffy. — Sur une classe de surfaces harmoniques. (424-426).

Toute surface harmonique dont les lignes d'égale courbure sont parallèles est applicable sur une surface de révolution.

L'auteur démontre ce théorème en s'appuyant sur une règle qui lui a déjà permis de trouver toutes les surfaces harmoniques résultant de la déformation des surfaces réglées :

Pour qu'un élément linéaire donné sous la forme

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2$$

soit réductible à la forme harmonique, il faut et il suffit qu'on puisse, en choisissant convenablement les deux fonctions A et W de la seule variable v, satisfaire aux équations

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = G\left(W + A' \int \frac{du}{G}\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial u} \frac{\mu' - 3A}{G} = \frac{2}{G\sqrt{G}} \frac{\partial}{\partial v}\left[\sqrt{G}\left(W + A' \int \frac{du}{G}\right)\right].$$

Mannheim. — Transformation de démonstration. (475-477).

Schœnflies. — Sur les surfaces minima limitées par les quatre arêtes d'un quadrilatère gauche. (478-480).

M. Schwarz a énoncé ce théorème que, parmi les surfaces limitées par les quatre arêtes d'un tétraèdre, il y en a cinq qui sont *périodiques*, c'est-à-dire telles que, dans une portion limitée de l'espace, il n'y a qu'un nombre fini de répétitions symétriques de la portion primitive de la surface. Toutes ces surfaces possèdent la symétrie de l'octaèdre.

Mais le résultat obtenu par M. Schwarz n'est pas complet. M. Schœnflies, appliquant aux surfaces minima les groupes de transformations de l'espace, montre que le nombre des surfaces minima passant par les quatre arêtes d'un tétraèdre est de six et non de cinq.

Raffy. — Sur les spirales harmoniques. (518-521).

L'objet de cette Note est de déterminer tous les éléments linéaires qui conviennent à la fois à des surfaces spirales et à des surfaces harmoniques. Ces éléments sont tous compris dans le type

$$ds^2 = (au^m - bv^m)(du^2 + dv^2),$$

auquel il faut adjoindre les deux formes

$$ds^2 = (e^{au} - e^{bv})(du^2 + dv^2),$$
$$ds^2 = (\log au - \log bv)(du^2 + dv^2),$$

qui n'en sont que des dégénérescences ($m = \infty$ et $m = 0$).

Pour le démontrer, l'auteur résout complètement, dans le cas des spirales, l'équation différentielle indéterminée qui exprime qu'un élément linéaire $\lambda\, dx\, dy$ est réductible à la forme harmonique.

Autonne. — Sur une application des groupes de M. Lie. (570-573).

Étant donnée une équation différentielle du premier ordre

$$f(\xi, \eta, \eta') = 0, \qquad \eta' = \frac{d\eta}{d\xi},$$

où ξ, η sont regardées comme les coordonnées d'un point sur un certain plan E. on peut, comme l'a montré M. Autonne, représenter birationnellement tout élément (ξ, η, η') du plan E par un point (x, y, z) d'un espace R.

L'équation différentielle se représente par une certaine surface f de l'espace R et les intégrales par des courbes *intégrantes* tracées sur f et ayant leurs tangentes sur un complexe linéaire toujours le même.

Les intégrales sont définies par la relation infinitésimale

$$dz - y\,dx + x\,dy = 0,$$

qui, dans l'espace R, représente la relation $d\tau_1 - \tau_1'\,d\xi = 0$ dans le plan E.

La recherche des intégrales de l'équation $f = 0$ est ainsi ramenée à celle des intégrantes sur la surface f.

L'introduction de la notion de groupes continus de transformation due à M. Lie conduit l'auteur à quelques résultats nouveaux dans cet ordre d'idées.

Soient P et R deux fonctions de x, y, z, liées par la relation

$$\begin{vmatrix} P'_x & P'_y \\ R'_x & R'_y \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} P'_z & P \\ R'_z & R \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} P'_z & xP'_x + yP'_y \\ R'_z & xR'_x + yR'_y \end{vmatrix} = 0.$$

En suivant une marche analogue à celle qu'a ouverte M. Picard dans son Mémoire couronné de 1888, M. Autonne parvient à résoudre le problème des intégrantes sur une surface quelconque f du faisceau

$$\alpha P + \beta R = 0, \qquad \alpha, \beta = \text{const}.$$

Les résultats qu'il obtient sont à rapprocher de ce théorème de M. Lie :

« Étant donnée une équation différentielle du premier ordre résolue par rapport a la dérivée

$$X(\xi, \tau_1)\,d\tau_1 - Y(\xi, \tau_1)\,d\xi = 0,$$

si l'on connaît une transformation infinitésimale (ponctuelle ou de contact) qui transforme l'équation en elle-même, on pourra former un facteur d'intégrabilité et l'on sera ramené aux quadratures. »

Weingarten. — Sur la théorie des surfaces applicables. (607-610).

On peut déterminer la situation d'un point P d'une surface par sa distance à l'origine des coordonnées rectilignes x, y, z et par la longueur de la normale abaissée de l'origine sur le plan tangent en P, c'est-à-dire par les paramètres

$$q = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{2}, \qquad p = cx + c'y + c''z.$$

Dès lors, si la surface appartient à la famille déterminée par l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + (\rho + \rho')\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p\,\partial q} + \rho\rho'\frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0,$$

où φ représente une fonction donnée des variables p et q, et ρ, ρ' les rayons de

courbure principaux, on aura, pour chacune de ces surfaces,

$$x\,d\frac{\partial\varphi}{\partial q} + c\,d\frac{\partial\varphi}{\partial p} = d\xi,$$

$$y\,d\frac{\partial\varphi}{\partial q} + c'\,d\frac{\partial\varphi}{\partial p} = d\eta,$$

$$z\,d\frac{\partial\varphi}{\partial q} + c''\,d\frac{\partial\varphi}{\partial p} = d\zeta,$$

$d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ étant des différentielles exactes.

Le carré de l'élément linéaire des surfaces dont les points sont déterminés par les coordonnées ξ, η, ζ sera donné par la formule

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = 2q\left(d\frac{\partial\varphi}{\partial q}\right)^2 + 2p\,d\frac{\partial\varphi}{\partial q}\,d\frac{\partial\varphi}{\partial p} + \left(d\frac{\partial\varphi}{\partial p}\right)^2,$$

qui montre que toutes ces surfaces sont applicables les unes sur les autres.

Si l'on prend

$$\varphi = pq - p^2\frac{\beta}{2} - \frac{p^3}{3},$$

et qu'on fasse ensuite la substitution

$$q = u + \beta p + \frac{p^2}{2},$$

on retrouve une forme d'élément linéaire

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = du^2 + 2(u + \beta p)\,dp^2,$$

étudiée par M. Darboux (*Leçons sur la théorie des surfaces*, 3e Partie, p. 234).

Comme on peut trouver explicitement toutes les surfaces définies par l'équation

$$\rho + \rho' = 2p + \beta,$$

on pourra obtenir toutes les surfaces admettant l'élément linéaire précédent. Elles sont applicables sur la surface de révolution

$$X = \alpha t\cos\frac{t}{\alpha}, \qquad Y = \alpha t\sin\frac{t}{\alpha}, \qquad Z = \int\sqrt{t^2 - \alpha^2 - 1}\,dt,$$

et déterminables par quadratures.

On peut aussi trouver par des quadratures les surfaces vérifiant l'équation

$$2(\rho' - \rho) = \sinh(2\rho + 2\rho').$$

Verschaffelt. — Des déformations que présente après l'imbibition un système formé par la superposition de deux lames hygroscopiques, minces et homogènes, à propriétés différentes. (610-611).

La dilatation qu'éprouve une lame mince homogène, par suite de l'imbibition, peut être la même dans toutes les directions (dilatation isotrope), ou inégale dans les divers sens (dilatation anisotrope). M. Verschaffelt appelle *dilatation*

anisotrope simple une dilatation consistant en ce que toutes les lignes parallèles à une certaine direction ne subissent aucun allongement et s'écartent les unes des autres d'une quantité proportionnelle à la distance qui les sépare. Il énonce le théorème suivant :

« Tout système de dilatations anisotropes simples et isotropes se compose en un système de deux dilatations anisotropes simples perpendiculaires entre elles. »

Ce théorème s'applique aux contractions qui sont la conséquence de la dessiccation des lames.

Il permet de trouver toutes les formes que peut affecter, après l'imbibition (ou la dessiccation), le système des deux lames supposées. On peut considérer l'une d'elles seulement comme active, et subissant deux dilatations anisotropes simples rectanuglaires. Ces deux dilatations tendent à produire une déformation cylindrique du système, qui se courbe dans les deux directions de ces dilatations en présentant dans chacune de ces deux directions une courbure proportionnelle à la dilatation correspondante.

D'après cela, on peut classer toutes les formes que peut prendre le système en deux groupes : au premier se rattachent toutes les formes présentant des courbures principales de même signe; au second, toutes les formes présentant des courbures principales de signe contraire. On les obtient respectivement, lorsque les deux dilatations sont de même signe ou de signe contraire. Le cylindre qui correspond au cas où une des dilatations est nulle peut être considéré comme une forme de transition, et la sphère (deux dilatations égales et de même signe) est un cas particulier du premier groupe.

L'expérience vérifie ces conclusions théoriques.

Sire. — Nouvel appareil gyroscopique. (638-641).

Painlevé. — Sur la théorie de la représentation conforme. (653-657).

M. Painlevé indique un moyen simple de lever l'objection de Harnack relative à la représentation conforme.

Soit S une aire du plan des z de contour s et ζ une fonction analytique de z qui représente l'aire S sur le cercle Γ de rayon 1. Quand z tend vers un point z_0 de s, ζ tend vers la circonférence γ de Γ, mais il n'est pas certain (et c'est là l'objection de Harnack) que ζ tende vers un point déterminé de γ.

Or, M. Painlevé montre qu'il en est toujours ainsi lorsque la tangente le long de s varie axec l'arc d'une manière continue, sauf en un nombre fini de points anguleux.

L'auteur démontre même un théorème qui comprend celui-là et qu'il énonce ainsi :

Soient AB un arc de courbe le long duquel la tangente varie d'une manière continue (sauf en un nombre fini de points anguleux), Σ une aire que AB limite partiellement, $Z(z) = X + iY$ une fonction holomorphe dans Σ. Si $X(x, y)$ prend sur AB une valeur constante, Y prend une suite continue de valeurs le long de tout fragment A'B' de AB. De plus, l'angle a de deux courbes z qui se coupent au point z_0 de A'B' est égal à l'angle A des deux courbes Z correspondantes. Si toutefois z_0 est un point anguleux de A'B', α désignant l'angle des deux tangentes en ce point, on a $A = a\frac{\alpha}{\pi}$.

Enfin M. Painlevé énonce cette proposition plus générale encore :

Soient AB un arc de courbe tel que les fonctions $x(s)$, $y(s)$ admettent une dérivée continue d'ordre $p+2$, et $Z(z) = X + iY$ une fonction de z holomorphe dans l'aire Z attenante à AB.

Si $X(x, y)$ prend sur AB des valeurs $X_1(s)$ qui admettent une dérivée d'ordre $q+1$ intégrable, $Z(z)$ et ses dérivées jusqu'à l'ordre n inclusivement prennent, le long de tout fragment A'B' de AB, des valeurs continues; n désigne le plus petit des nombres p et q.

Picard. — Sur un système d'équations aux dérivées partielles. (685-688).

L'auteur a établi récemment une proposition relative aux équations linéaires

$$A\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} + C\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + D\frac{\partial u}{\partial x} + E\frac{\partial u}{\partial u} + Fu = 0,$$

où les coefficients sont supposés des fonctions analytiques des deux variables réelles x et y : Dans toute région du plan où l'on a

$$B^2 - AC < 0,$$

toute intégrale de cette équation, continue ainsi que ses dérivées partielles des deux premiers ordres, est une fonction analytique des variables. Ce théorème fondamental permettra dans des cas étendus de prendre les équations aux dérivées partielles pour point de départ de l'étude de classes parfaitement définies de fonctions; la nature analytique des solutions étant ainsi précisée, on a pour cette étude une base que ne fournissait pas l'idée, vague auparavant, de solution de l'équation aux dérivées partielles.

L'auteur indique un système particulier où ces vues générales trouvent leur application : c'est le système

$$\frac{\partial v}{\partial x} = a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial y},$$
$$\frac{\partial v}{\partial y} = c\frac{\partial u}{\partial x} + d\frac{\partial u}{\partial y},$$

où a, b, c, d sont des fonctions analytiques de x et y. Dans toute région du plan où ces coefficients sont continus et satisfont à l'inégalité

$$(a-d)^2 + 4bc < 0,$$

la fonction u (ou v) sera déterminée par les valeurs qu'elle prend sur un contour fermé (principe de Dirichlet), et l'on pourra exprimer par une intégrale définie le nombre des racines communes aux deux équations

$$u(x, y) = u_0, \qquad v(x, y) = v_0,$$

(théorème de Cauchy).

L'ensemble des deux fonctions u et v pourra être appelé la fonction (u, v). Les points singuliers (x_0, y_0) qui jouent un rôle analogue à un pôle simple sont ceux dans le voisinage desquels u et v sont de la forme

$$\frac{P(x, y)}{R(x, y)} + Q(x, y)\log R(x, y).$$

P, Q, R étant trois fonctions analytiques de x et y dans le voisinage de x_0, y_0.

Pour étudier les fonctions à l'infini, on supposera que a, b, c, d restent finis et tendent vers des valeurs déterminées quand le point (x, y) s'éloigne indéfiniment.

On pourra étudier la nature des intégrales autour du point à l'infini en ramenant le point à l'origine par une certaine transformation quadratique

$$x = \frac{mx' + ny'}{Gx'^2 + 2Hx'y' + Ky'^2}, \qquad y = \frac{px' + qy'}{Gx'^2 + 2Hx'y' + Ky'^2}$$

$$(H^2 - GK \neq 0).$$

Une classe intéressante de fonctions (u, v) est formée des fonctions uniformes qui n'ont dans tout le plan que des pôles, même à l'infini : ce sont les analogues des fonctions rationnelles.

Si l'on considère deux de ces fonctions *pseudo-rationnelles* (u, v) et (u_1, v_1), à une valeur de la fonction (u, v) correspondra un nombre limité de valeurs de la fonction (u_1, v_1), et inversement.

Weingarten. — Sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. (706-707).

Si l'on prend

$$\varphi = pq + P$$

(*voir* pour les notations l'analyse de la précédente Communication de M. Weingarten), P désignant une fonction de la seule variable p, on aura

$$d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2 = du^2 - 2(-u + P' + p^2)\,dp^2.$$

Si l'on cherche quelle doit être l'expression de P′ pour que cet élément linéaire soit réductible à la forme de Liouville

$$[f(\alpha) - f(\beta)][d\alpha^2 + d\beta^2],$$

on trouve

$$P' = -p^2 - \frac{2}{b}p + \frac{2}{b^2}(e^{bp} - 1),$$

b étant une constante.

Mais alors l'équation

$$\rho + \rho' + P'' = 0$$

s'intègre aisément, et de là résulte l'existence d'une nouvelle classe de surfaces applicables les unes sur les autres dont l'élément linéaire prend la forme de Liouville

$$ds^2 = (\alpha - \beta)\left[\frac{d\alpha^2}{\alpha^2}(\alpha - 2) + \frac{d\beta^2}{\beta^2}(\beta - 2)\right].$$

Toutes ces surfaces peuvent être obtenues par de simples quadratures.

Goursat. — Sur la théorie des surfaces applicables. (707-710).

M. Goursat généralise le résultat précédemment obtenu (p. 608) par M. Weingarten, en prenant

$$\varphi = pq - p^2\frac{\beta}{3} - \alpha\frac{p^3}{3}.$$

Alors l'équation à laquelle φ doit satisfaire

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial p^2} + (\rho + \rho') \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p \, \partial q} + \rho\rho' \frac{\partial^2 \varphi}{\partial q^2} = 0$$

se réduit à

$$\rho + \rho' = 2\alpha p + \beta$$

et l'élément linéaire, après qu'on a posé

$$q = \beta p + \frac{2\alpha - 1}{2} p^2 + u, \qquad p = \frac{v}{\sqrt{2}},$$

prend la forme

$$ds^2 = du^2 + (u + kv^2 + lv)\, dv^2$$

où

$$k = \frac{\alpha - 1}{2}, \qquad l = \frac{\beta}{\sqrt{2}}.$$

La détermination des surfaces qui admettent cet élément linéaire se ramène donc (puisque l'on peut, sans diminuer la généralité, supposer $\beta = 0$) à l'intégration de l'équation aux dérivées partielles

$$\rho + \rho' = 2\alpha p,$$

c'est-à-dire à la recherche des surfaces pour lesquelles la somme des rayons de courbure principaux est proportionnelle à la distance d'un point fixe au plan tangent.

Or, M. Goursat a montré (*American Journal of Math.*, t. X) que la recherche de ces surfaces se ramène à l'intégration d'une équation dont l'intégrale générale peut être obtenue sous forme finie pour une infinité de valeurs de la constante α.

On conclut de là qu'il existe une infinité de valeurs de la constante k pour lesquelles on peut déterminer, par des quadratures, toutes les surfaces qui admettent l'élément linéaire donné par la formule

$$ds^2 = du^2 + (u + kv^2 + lv)\, dv^2.$$

Liouville (*R.*). — Sur un problème d'Analyse qui se rattache aux équations de la Dynamique. (710-712).

Soit un système matériel dont le mouvement dépend de trois paramètres.

En profitant d'une remarque due à M. Darboux, on peut supposer que la fonction des forces est réduite à une constante; soit alors

$$2T = \alpha^2 \left(\frac{dx_1}{dt}\right)^2 + \beta^2 \left(\frac{dx_2}{dt}\right)^2 + \gamma^2 \left(\frac{dx_3}{dt}\right)^2$$

la force vive du système rapporté à des coordonnées convenables. M. R. Liouville cherche à choisir pour les fonctions α, β, γ des expressions telles que les équations différentielles du mouvement puissent être déduites, soit de la forme $2T$, soit d'une seconde forme où entrent en général les produits $\frac{dx_2}{dt}$, $\frac{dx_3}{dt}$, ...

Il existe des cas où, les équations des trajectoires étant données, il ne suffit

pas de connaître le déterminant de la forme ρT pour en conclure cette forme elle-même. En d'autres termes, il existe des cas où l'on peut choisir α, β, γ de telle manière qu'une seconde forme, de même discriminant, corresponde aux mêmes formes.

Tous les cas de cette espèce sont donnés par les relations

$$\frac{d\beta}{\gamma\, dx_1} = \frac{d\gamma}{dx_2}, \qquad \frac{d\gamma}{\beta\, dx_2} = \frac{d\beta}{dx_1}, \qquad \frac{d\beta}{dx_1} = \frac{d\gamma}{dx_1} = 0,$$

jointes à l'une des suivantes

$$\cos\varphi \frac{d\alpha}{\beta\, dx_2} - \sin\varphi \frac{d\alpha}{\gamma\, dx_1} = 0,$$

$$\sin\varphi \frac{d\alpha}{\beta\, dx_2} + \cos\varphi \frac{d\alpha}{\gamma\, dx_1} = 0.$$

Alors, par un choix convenable de variables, on peut donner à T la forme

$$\rho T\, dt^2 = \Phi[x_1, F(X_2) - f(X_2)]\, dx_1^2 + dX_2\, dX_3.$$

Il n'y a aucune difficulté à calculer la seconde forme quadratique T_1 associée à T, et il est clair que l'équation

$$\frac{T_1}{T} = \text{const.}$$

est toujours une intégrale des équations différentielles des trajectoires.

Padé. — Sur les fractions continues régulières relatives à e^x. (712-714).

Poincaré. — Sur l'intégration algébrique des équations différentielles. (762-764).

M. Poincaré écrit l'équation différentielle sous la forme

$$\begin{vmatrix} dx & dy & dz \\ x & y & z \\ L & M & N \end{vmatrix} = 0,$$

L, M, N étant trois polynômes, homogènes et de degré m en x, y, z.

Si l'intégrale générale est algébrique, elle sera de la forme

$$(1) \qquad f - C\varphi = 0,$$

C étant une constante arbitraire, f et φ deux polynômes homogènes de degré p en x, y, z. Le problème de l'intégration algébrique des équations différentielles serait résolu si l'on avait une limite supérieure du nombre p.

Soit x_0, y_0, z_0 un des points singuliers de l'équation, donnés par les relations

$$\frac{L}{x} = \frac{M}{y} = \frac{N}{z}$$

et supposés tous distincts.

Dans le voisinage de ce point l'intégrale générale peut se mettre sous la forme

$$X_1^{-1} X_2^s = \text{const.},$$

s étant une constante, et X_1, X_2 deux séries s'annulant au point singulier et ordonnées suivant les puissances de $\frac{x}{x_0} - \frac{z}{z_0}$, $\frac{y}{y_0} - \frac{z}{z_0}$.

Supposant s réel et commensurable (car, dans le cas contraire, l'équation ne serait pas intégrable algébriquement), M. Poincaré appelle *nœuds* les points pour lesquels s est positif, *cols* ceux pour lesquels il est négatif.

Posant $s = \frac{\mu}{\nu}$ (μ et ν étant deux nombres premiers entre eux) et supposant que la courbe (1) ait en un nœud λ branches distinctes, l'auteur montre que l'on a

$$p^2 = \Sigma \lambda^2 \mu\nu, \qquad (m+2)\,p = \Sigma \lambda (\mu + \nu),$$

les sommations devant être étendues à tous les nœuds.

D'ailleurs le genre q de la courbe (1) est donné par la formule

$$q = 1 + \Sigma \frac{\lambda}{2} \left[(\mu + \nu) \frac{m+1}{m+2} - 1 \right].$$

Cette formule permet, toutes les fois que m est plus grand que 4, de reconnaître si l'intégrale générale de l'équation différentielle est une courbe algébrique de genre donné.

M. Poincaré montre encore que le nombre des valeurs *remarquables* de C (valeurs pour lesquelles le polynôme $f + C\varphi$ n'est pas irréductible) ne peut dépasser le nombre des cols de deux unités. Pour toutes les valeurs remarquables de C, la courbe (1) va passer par un col :

Si pour tous les nœuds $s = 1$, le nombre des nœuds est au moins $\frac{(m+2)^2}{4}$;

Si $s = +1$ pour tous les nœuds et $s = -1$ pour tous les cols, le nombre des nœuds est précisément $\frac{(m+2)^2}{4}$;

Si pour tous les cols $s = 1$, on a

$$\alpha_1 \alpha_2 (m+2) = p(\alpha_1 + \alpha_2),$$

α_1, α_2 étant deux entiers premiers entre eux. Cette formule limite le nombre p et, par conséquent, résout le problème de l'intégration algébrique dans ce cas particulier.

Vessiot. — Sur les équations différentielles linéaires. (778-780).

L'auteur énonce deux théorèmes analogues au théorème fondamental de Galois sur les équations algébriques.

« *Théorème I.* — A toute équation linéaire

$$(1) \qquad \frac{d^n x}{dt^n} + p_1 \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \ldots + p_n x = 0$$

correspond un groupe Γ de transformations *infinitésimales*, linéaires et homo-

gènes, tel que : 1° toute fonction R, qui s'exprime algébriquement au moyen de $t, p_1, \ldots, p_n$ et de leurs dérivées, admet le groupe Γ; 2° toute fonction R qui admet ce groupe s'exprime *algébriquement* en fonction des mêmes éléments. »

« *Théorème II.* — A toute équation linéaire (1) correspond un groupe G de transformations *finies* linéaires et homogènes, tel que : 1° toute fonction R qui s'exprime *rationnellement* (toujours au moyen des éléments précédents) admet le groupe G; 2° toute fonction R admettant le groupe G s'exprime *rationnellement* en fonction des mêmes éléments. »

M. Picard avait déjà démontré la première partie de ce second théorème.

Les théorèmes sur la réduction du groupe Γ ou G par l'adjonction d'intégrales d'équations auxiliaires sont analogues aux théorèmes connus de la théorie de Galois; ils conduisent aux résultats suivants :

Pour que l'équation (1) soit intégrable par quadratures, il faut et il suffit que le groupe Γ soit un groupe intégrable, c'est-à-dire contienne un sous-groupe invariant à un paramètre de moins, celui-ci de même, et ainsi de suite.

Une équation linéaire d'ordre supérieur au premier n'est pas en général intégrable par quadratures.

Ce résultat peut encore être énoncé sous la forme que voici : Ω étant un invariant rationnel du groupe

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad x_2 \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad x_1 \frac{\partial f}{\partial x_3}, \quad x_2 \frac{\partial f}{\partial x_3}, \quad \ldots, \quad x_n \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

pour que l'équation (1) soit intégrable par quadratures, il faut et il suffit que l'équation d'ordre $\frac{n(n-1)}{2}$ dont dépend Ω ait une intégrale rationnelle.

Plus généralement, la connaissance du groupe G ou Γ permet de ramener l'intégration de l'équation (1) à celle d'une suite d'équations plus simples.

La théorie ci-dessus s'étend à toutes les équations différentielles non linéaires dont l'intégrale générale s'exprime par une formule connue en fonction d'un certain nombre d'intégrales particulières.

Markoff. — Sur une classe de nombres complexes. (780-782).

Raffy. — Sur la déformation des surfaces spirales. (850-852).

Étant donné un élément linéaire, exprimé au moyen de variables quelconques, reconnaître s'il existe des spirales admettant cet élément linéaire.

Pour résoudre ce problème, on calculera la courbure totale $-2e^{\theta}$ et l'on formera l'invariant $e^{-\theta}\Delta\theta$. (*Voir*, pour les notations, Darboux, *Théorie des surfaces*, Liv. VI, Ch. I.)

S'il ne se réduit pas à une constante, on formera les deux invariants

$$\frac{\Theta(e^{-\theta}\Delta\theta, \theta)}{\Delta(e^{-\theta}\Delta\theta)}, \quad \frac{\Delta_2(e^{-\theta}\Delta\theta)}{\Delta(e^{-\theta}\Delta\theta)},$$

et l'on devra vérifier que chacun d'eux est une fonction de $e^{-\theta}\Delta\theta$.

Si $e^{-\theta}\Delta\theta$ est une constante, on calculera l'invariant $e^{-\theta}\Delta_2\theta$. Si ce dernier est constant aussi, l'élément linéaire donné convient à des spirales en même temps

qu'à des surfaces de révolution. Si $e^{-\theta}\Delta_2\theta$ n'est pas une constante, on formera

$$\frac{\Theta(e^{-\theta}\Delta_2\theta, \theta)}{\Delta(e^{-\theta}\Delta_2\theta)}$$

et ce nouvel invariant devra être une fonction de $e^{-\theta}\Delta_2\theta$.

L'emploi des conditions précédentes permet d'établir les théorèmes suivants (qui pourraient d'ailleurs être établis directement).

Les éléments linéaires qui conviennent à la fois à des spirales et à des surfaces moulures sont tous compris dans les formules

$$ds^2 = du^2 + a^2\left(u^m - v^{\frac{m}{1-m}}\right)dv^2,$$
$$ds^2 = du^2 + a^2(\log u - \log v)^2\,dv^2,$$

où a et m sont des constantes arbitraires.

Les éléments linéaires qui conviennent à la fois à des spirales et à des surfaces réglées sont tous compris dans la formule

$$ds^2 = du^2 + \left(a\frac{u^2}{v^2} + b\frac{u}{v} + c\right)dv^2,$$

où a, b, c sont trois constantes arbitraires.

On peut, en s'aidant d'un résultat récemment acquis par M. Weingarten, obtenir toutes les surfaces ayant l'élément linéaire précédent dans le cas particulier $a = 0$.

Resal. — Sur les expressions des pressions dans un corps élastique homogène. (911-914).

En 1852, Lamé est parvenu, en introduisant une notion prématurée sur la traction et la torsion et à l'aide d'une transformation de coordonnées, à réduire de 36 à 2 le nombre des coefficients qui figurent dans les expressions dont il s'agit.

En 1856, de Saint-Venant est arrivé au même résultat d'une manière plus simple, par la considération des plans et des axes d'élasticité.

A ces deux méthodes, M. Resal propose d'en substituer une troisième qui lui paraît plus courte et plus satisfaisante.

Poincaré. — Sur la théorie de l'élasticité. (914-915).

Dans sa *Théorie mathématique de la lumière*, M. Poincaré a écrit la fonction fondamentale qui définit l'élasticité d'un corps avec 27 coefficients arbitraires au lieu de 21. M. Brillouin, en rendant compte de cet Ouvrage dans le t. XIII du *Bulletin des Sciences mathématiques*, a contesté la légitimité de cette expression, parce que la pression P_{xy} ne serait plus égale à la pression P_{yx}, ce qui rendrait impossible l'équilibre du corps élastique.

M. Poincaré montre que cette objection n'est pas fondée.

Ledieu. — Sur le rendement des machines marines et celui des hélices. Méthode géométrique pour calculer le premier de ces rendements sans dynamomètre. (926-930).

Haton de la Goupillière. — Sur la durée de l'évaporation dans les générateurs. (977-983).

L'une des causes les plus graves et les plus fréquentes d'explosion pour les générateurs consiste dans l'abaissement du plan d'eau au-dessous de la ligne des carneaux, si le chauffeur cesse d'alimenter en temps utile. Il est utile de déterminer la plus ou moins grande rapidité de cet abaissement.

L'équation de la surface du générateur est rapportée à trois axes rectangulaires x, y, z. A une altitude fixe z_0 se trouve le plan horizontal de la ligne des carneaux, au dessous duquel s'étend la surface totale de chauffe S_0. Quand le niveau s'abaisse à une hauteur z, cette superficie se réduit à S.

La *conductibilité directe* s'opère à travers la surface S avec l'activité v; une *conductibilité indirecte* s'opère entre le métal rouge et la zone adjacente de tôle mouillée; d'où un supplément d'activité w par mètre courant du périmètre σ du plan d'eau. Enfin la surface échauffée exerce par son rayonnement sur le bain liquide s une action spéciale u. Les quantités v, w, u sont des mètres cubes d'eau vaporisés en une seconde par le mètre carré de surface métallique.

Cela posé, la durée de l'évaporation quand l'eau passe au-dessous de la ligne des carneaux est donnée par la formule

$$t = \int_z^{z_0} \frac{s\,dz}{(v-u)S + w\sigma + uS_0}.$$

On peut renverser ce problème et chercher le profil que doit présenter la méridienne pour réaliser une loi d'abaissement assigné *a priori* $-\frac{dz}{dt} = F(x)$. On trouve

$$z = \int dx \sqrt{\left[\frac{xF'(x) + 2F(x) - \frac{2w}{x}}{v-u}\right]^2 - 1}.$$

L'auteur applique cette formule à divers cas particuliers.

Tarry. — Théorème de Géométrie. (984-985).

Si deux points A et B d'une figure de similitude constante parcourent deux droites fixes qui se coupent en un point P :

1° Il existe sur la figure semblablement variable un cercle dont chaque point décrit une ligne droite passant par le point P; ce cercle passe constamment par le point P;

2° Tous les autres points de la figure décrivent des courbes du même ordre;

3° Le nombre de ces courbes est égal à la classe de la courbe inverse par rapport à l'origine P de l'enveloppe des cercles PAB.

Dans le cas particulier où le point O est à l'infini, l'ordre des courbes est égal à la classe de l'enveloppe de la droite AB.

Cels. — Sur une classe d'équations différentielles linéaires. (984-988).

L'auteur indique divers cas où l'on peut intégrer l'équation

$$(\mathrm{E}) \qquad x^{n+1}\frac{d^n z}{dx^n} + a x^{n+2}\frac{d^{n+1} z}{dx^{n+1}} + b x^{n+3}\frac{d^{n+2} z}{dx^{n+2}} + \ldots + h x \frac{dz}{dx} + x^{n+1} z = 0,$$

où $a, b, \ldots, h$ sont des constantes.

Quand les racines de l'équation déterminante du point critique zéro pour une équation (E) sont

$$0, \quad 1 - pn, \quad 2 - pn, \quad \ldots, \quad (n-1) - pn:$$

1° Si p est un nombre positif, les solutions de (E) sont

$$z = \frac{1}{x^{p+1}}\frac{d}{dx}\frac{1}{x^{n-1}}\cdots\frac{d}{dx}e^{\alpha x},$$

le nombre des dérivations étant p, et α étant racine de $r^n + 1 = 0$.

2° Si p est un nombre négatif, les solutions sont

$$z = \int x^{n-1}\,dx \int x^{n-1}\,dx \ldots \int e^{\alpha x}\,dx,$$

le nombre des intégrations étant p.

Appliquant ensuite à l'équation (E) la méthode qu'il a indiquée dans les *Comptes rendus* du 15 juillet 1890, M. Cels forme la suite

$$\mathrm{E}_{-2q}, \quad \ldots, \quad \mathrm{E}_{-1}, \quad \mathrm{E}, \quad \mathrm{E}_1, \quad \ldots, \quad \mathrm{E}_{2p}, \quad \ldots,$$

et montre facilement que l'équation (E) s'intègre immédiatement si cette suite comprend une équation du type

$$x\frac{d^n z}{dx^n} + np\frac{d^{n-1} z}{dx^{n-1}} + xz = 0,$$

p étant un nombre entier.

Or, pour cela, il faut et il suffit que les racines de l'équation déterminante du point 0 soient

$$0, \quad 1 - pn, \quad 2 - pn, \quad \ldots, \quad (n-2) - pn, \quad (n-1) - qn$$

ou

$$0, \quad (n-1) - pn, \quad (n-2) - pn, \quad \ldots, \quad 2 - pn, \quad 1 - qn,$$

p et q étant des entiers.

Ces résultats permettent d'intégrer l'équation du troisième ordre dans tous les cas où l'intégrale générale est uniforme autour du point zéro.

Il n'en est pas de même quand il s'agit d'une équation d'ordre n. Comme le montre l'auteur, pour que l'équation (E) ait son intégrale générale uniforme dans tout le plan, il faut et il suffit que les racines de l'équation déterminante du point critique 0 (excepté la racine 0) soient respectivement $1, 2, \ldots, (n-1)$ à un multiple de n près qui n'est pas le même pour toutes ces racines.

Padé. — Sur la convergence des fractions continues simples. (988-990).

Les fractions qui ont pour numérateurs des monômes en x à coefficients et

exposants différents de zéro et pour dénominateurs partiels des polynômes en x à terme constant différent de zéro, jouent, dans l'étude des fractions continues, le même rôle que les séries entières dans l'étude des séries : M. Padé les nomme *fractions continues simples*.

Soit

$$a_1 + \frac{\alpha_2}{a_2} + \frac{\alpha_3}{a_3} + \cdots$$

une telle fraction; ses réduites $\frac{U_1}{V_1}, \frac{U_2}{V_2}, \frac{U_3}{V_3}, \ldots$ sont des fractions rationnelles irréductibles, et l'on a, pour $q > p$,

$$\frac{U_q}{V_q} = \frac{U_p}{V_p} + \frac{(-1)^{p+1}\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{p+1}}{V_p V_{p+1}} + \ldots + \frac{(-1)^q \alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_q}{V_{q-1}V_q}.$$

Cette formule ramène l'étude de la fraction continue à celle de la série illimitée

$$(S) \qquad \frac{(-1)^{p+1}\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{p+1}}{V_p V_{p+1}} + \frac{(-1)^{p+2}\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_{p+2}}{V_{p+1}V_{p+2}} + \ldots$$

Soit (C) le cercle de convergence de la *série entière*

$$(S') \qquad \alpha_2 - \alpha_2\alpha_3 + \alpha_2\alpha_3\alpha_4 - \ldots + (-1)^n\alpha_2\alpha_3\ldots\alpha_n + \ldots$$

et soit un ensemble (E) de points du plan tels que, pour chacun d'eux et pour les valeurs de l'entier i supérieures à un nombre positif fixe N, on ait

$$a < |V_i| < A,$$

a et A désignant deux nombres positifs fixes. Pour chacun des points de l'ensemble (E), la série (S), où l'on suppose p plus grand que N et la série (S') sont convergentes et divergentes en même temps.

Si tous les points d'une partie (γ) du plan intérieur au cercle (C) appartiennent à l'ensemble (E), dans le champ (γ), la fraction continue définit une fonction analytique continue uniforme de x.

La principale difficulté de l'étude de la convergence se trouve dans la détermination de l'ensemble (E). M. Padé examine divers cas où il est relativement facile de déterminer quels sont ceux des points d'une partie donnée du plan qui appartiennent à cet ensemble.

Léauté. — Essai de Dynamique graphique pour l'étude des périodes de trouble dans les moteurs hydrauliques. (1033-1036).

L'étude du mouvement des machines, dans la période de trouble comprise entre une perturbation brusque et le régime reconstitué, présente une haute importance. C'est dans cette période que se produisent les accélérations dangereuses, les ralentissements trop considérables, et les oscillations de la vitesse auxquelles il est souvent si difficile de remédier.

La loi d'après laquelle le rendement est modifié suivant la vitesse, celle qui le fait dépendre de la quantité de fluide consommé, la manière dont varie cette quantité avec l'ouverture d'admission, sont autant de conditions dont il faut tenir compte; or, ces conditions ne sont presque toujours données que

sous une forme empirique. Une solution purement analytique est impossible et la question, comme toutes celles que la Statique pratique a résolues, ne peut être utilement traitée que par une méthode mixte et par des procédés graphiques.

La méthode dont M. Léauté indique le principe pour les moteurs hydrauliques est un essai de Dynamique graphique : elle donne aux mécaniciens le moyen de calculer, en toutes circonstances, le mouvement que prendront leurs machines après une perturbation, absolument comme la Statique graphique donne aux constructeurs le moyen de prévoir les efforts que subiront leurs constructions sous l'action de toute charge accidentelle.

Laisant. — Sur les permutations limitées. (1047-1049).

Étant donnés n objets $a, b, c, \ldots, l$, on suppose que l'on ait formé le Tableau de toutes les permutations, telles que le premier rang, le deuxième, etc., ne puisse être occupé dans chacune d'elles que par certains de ces objets, et l'on se propose de déterminer le nombre X des permutations.

Si, parmi les objets en question, on désigne par $a_1, b_1, c_1, \ldots$ ceux qui peuvent occuper le prèmier rang, par $a_2, b_2, c_2, \ldots$ ceux qui peuvent occuper le second, etc., et que l'on pose

$$F(a, b, c, \ldots, l) = (a_1 + b_1 + c_1 + \ldots)(a_2 + b_2 + c_2 + \ldots)\ldots(a_n + b_n + c_n + \ldots),$$

on aura

$$X = \frac{d^n F(a, b, c, \ldots, l)}{da\, db\, dc \ldots dl}.$$

Markoff. — Sur une classe de nombres complexes. (1049-1050).

Lucas (*F.*). — Expression du nombre π par une série très convergente. (1050-1051).

Cette expression est la suivante

$$\frac{\pi}{4} = 1 - 16 \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{(4m+1)^2(4m+3)^2(4m+5)^2}.$$

L'emploi des quatre premiers termes seulement donne

$$\pi = 3,1416.$$

Brillouin. — Théorie élastique de la plasticité et de la fragilité des corps solides. (1054-1056).

Boussinesq. — Sur l'explication physique de la fluidité. (1099-1101).

Goursat. — Sur les intégrales intermédiaires des équations aux dérivées partielles du second ordre. (1117-1120).

Étant donnée une équation quelconque aux dérivées partielles du second

ordre

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, r, s, t) = 0,$$

les conditions pour que cette équation admette une intégrale du premier ordre dépendant de deux constantes arbitraires

$$V(x, y, z, p, q, a, b) = 0$$

sont de deux sortes.

Il faut d'abord que l'équation (1), où x, y, z, p, q sont traitées comme des constantes et r, s, t comme des coordonnées courantes, représente une surface réglée ayant ses génératrices parallèles à celle du cône

$$s^2 - rt = 0.$$

Cette condition étant remplie, les paramètres m, μ, ν d'une génératrice

$$r = ms + \mu,$$
$$s = mt + \nu$$

devront vérifier deux équations de condition qui dépendent de la surface considérée

$$A(x, y, z, p, q, m, \mu, \nu) = 0, \qquad B(x, y, z, p, q, m, \mu, \nu) = 0.$$

Si dans ces relations on pose

$$m = -\frac{\frac{\partial N}{\partial q}}{\frac{\partial N}{\partial p}}, \qquad \mu = -\frac{\frac{\partial N}{\partial x} + p\frac{\partial N}{\partial z}}{\frac{\partial N}{\partial p}}, \qquad \nu = -\frac{\frac{\partial N}{\partial y} + q\frac{\partial N}{\partial z}}{\frac{\partial N}{\partial p}},$$

on aura, pour déterminer la fonction inconnue V, deux équations du premier ordre, qui devront admettre une intégrale commune avec deux constantes arbitraires. S'il en est ainsi, la méthode de la variation des constantes permettra d'obtenir une intégrale du premier ordre dépendant d'une fonction arbitraire; mais la présence de cette fonction arbitraire ne permettra pas, en général, d'achever l'intégration.

M. Goursat signale cependant un cas où, malgré la présence de cette fonction arbitraire, l'intégration pourra être achevée.

Caspary. — Sur une méthode élémentaire pour établir les équations différentielles dont les fonctions thêta forment les intégrales. (1120-1123).

L'auteur a montré précédemment que les éléments d'un système orthogonal s'expriment par les fonctions thêta d'un nombre quelconque d'arguments, et que les identités algébriques et différentielles qui ont lieu entre ces éléments peuvent servir de base à la théorie des fonctions thêta.

Actuellement, il donne une nouvelle application de la liaison qui existe entre les éléments d'un système orthogonal et les fonctions thêta en en déduisant une méthode élémentaire pour établir les équations différentielles dont les fonctions thêta forment les intégrales.

Markoff. — Sur une classe de nombres complexes. (1123-1124).

Painlevé. — Sur l'intégration algébrique des équations différentielles du premier ordre. (1190-1191).

Étant donnée une équation de premier ordre et d'un degré quelconque

$$F(y', y, x) = 0,$$

dont le premier membre est un polynôme irréductible en y', y, x du degré q en y', quand son intégrale générale est algébrique, le genre ω de la relation entre les constantes intégrales est nul, égal à 1 ou plus grand que 1.

Quand ω est plus grand que 1, on a une limite supérieure du degré de l'intégrale.

Quand ω est égal à 1, on est ramené au problème de la réduction des intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques.

Quand ω est nul, on peut, comme le montre M. Painlevé, reconnaître si l'intégrale est algébrique dans les cas suivants :

1° Quand l'équation différentielle n'admet pas de points d'indétermination;

2° Quand elle n'admet pas de cols par lesquels passent plusieurs branches isolées;

3° Lorsqu'il existe de tels cols, mais que certains nombres $l_2, l_3, \ldots$ qui figurent en exposants dans les facteurs de l'intégrale générale, sont, pour chacun de ces points, ou égaux à l'unité ou plus grands que 5.

Au cas où il existe des nœuds, le théorème suppose essentiellement que l'équation n'admet pas d'intégrale singulière multiple.

Si l'équation n'admet ni cols ni intégrales singulières multiples et si l'intégrale générale n'est pas algébrique, on ramène l'équation à une quadrature (sauf dans quelques cas exceptionnels).

Voici maintenant d'autres résultats relatifs à une question différente :

Soit $F = 0$ une équation irréductible entre y' et y, de degré q en y', dont les coefficients sont des fonctions quelconques de x, et soit m le plus grand des nombres $m_i + i$, m_i étant le degré en y du coefficient de y'^i. On reconnaît algébriquement si l'intégrale de cette équation ne prend qu'un nombre donné n de valeurs autour des points critiques mobiles, et l'équation s'intègre alors par quadrature, à moins que n ne soit précisément égal à $\frac{m-q+r}{2}$, r étant le degré en y de l'intégrale singulière. Dans ce dernier cas, il peut rester à intégrer une équation de Riccati.

Collet. — Sur la détermination des intégrales des équations aux dérivées partielles du premier ordre. (1193-1196).

Étant donnée une équation aux dérivées partielles

$$(1) \qquad F(z, x_i, p_k) = 0 \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

les éléments initiaux (z^0, x_i^0, p_k^0) définissant les caractéristiques qui engendrent une des intégrales devront former une *multiplicité intégrale* $(M_{n-1})^0$ d'ordre $n-1$, c'est-à-dire qu'il devront dépendre de $n-1$ variables indépendantes et

satisfaire aux équations

$$(2) \qquad F(z^0, x_i^0, p_k^0) = 0,$$

$$(3) \qquad dz_0 - p_1^0\,dx_1^0 - p_2^0\,dx_2^0 - \ldots - p_n^0\,dx_n^0 = 0.$$

Une pareille multiplicité renferme toujours une *multiplicité ponctuelle* $(P_{n-q})^0$ d'ordre $n-q$ $(1 \leqq q \leqq n)$, définie par

$$\varphi_h(z^0, x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0) = 0, \qquad (h = 0, 1, 2, \ldots, q).$$

Les autres relations déterminant $(M_{n-1})^0$ sont l'équation (1) jointe aux suivantes

$$(4) \qquad \begin{cases} \lambda_0 \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial z_0} + \ldots + \lambda_q \dfrac{\partial \varphi_q}{\partial z_0} = 1, \\[2ex] \lambda_0 \dfrac{\partial \varphi_0}{\partial x_k^0} + \ldots + \lambda_q \dfrac{\partial \varphi_q}{\partial x_k^0} = p_k^0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n). \end{cases}$$

Pour chaque point de $(P_{n-q})^0$, dont $n-q$ coordonnées sont arbitraires, on pourra choisir à volonté $q-1$ des quantités $p_1^0, p_2^0, \ldots, p_n^0$, les autres étant définies pour chaque point par les équations (1) et (4).

L'ensemble de toutes les caractéristiques que l'on peut ainsi définir constitue une multiplicité intégrale d'ordre n, c'est-à-dire une intégrale dont M. Collet enseigne à former l'équation.

Pellet. — Sur les équations abéliennes. (1196-1197, 1249-1250).

Caspary. — Sur deux systèmes d'équations différentielles dont les fonctions hyperelliptiques de première espèce forment les intégrales. (1305-1308).

Boussinesq. — Sur les déformations et l'extinction des ondes aériennes isolées ou périodiques, propagées à l'intérieur de tuyaux de conduite sans eau, de longueur indéfinie. (1337-1343).

Caspary. — Sur les deux formes sous lesquelles s'expriment, au moyen des fonctions thêta de deux arguments, les coordonnées de la surface du quatrième degré, décrite par les sommets des cônes du second ordre, qui passent par six points donnés. (1356-1359).

Picard. — Sur une généralisation des équations de la théorie des fonctions d'une variable complexe. (1399-1403).

L'étude d'une fonction analytique d'une variable complexe revient à l'étude des fonctions réelles P et Q des deux variables réelles x et y satisfaisant aux deux équations

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \qquad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x},$$

Deux couples quelconques, P, Q et P_1, Q_1 de solutions jouissent, comme on sait, de la propriété fondamentale exprimée par les relations

$$\frac{\partial P_1}{\partial P} = \frac{\partial Q_1}{\partial Q}, \qquad \frac{\partial P_1}{\partial Q} = -\frac{\partial Q_1}{\partial P}.$$

C'est cette propriété qui sert à M. Picard de point de départ pour étudier, au cas de plusieurs fonctions et de plusieurs variables, la notion de variable complexe.

Il considère, pour fixer les idées, trois fonctions, P, Q, R, de trois variables, et un système de trois équations

$$f_i\left(\frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial z}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3),$$

telles que P, Q, R et P_1, Q_1, R_1 désignant deux systèmes quelconques de solutions, on ait, en considérant P_1, Q_1, R_1 comme fonctions de P, Q, R,

$$f_i\left(\frac{\partial P_1}{\partial P}, \frac{\partial P_1}{\partial Q}, \frac{\partial P_1}{\partial R}, \frac{\partial Q_1}{\partial P}, \frac{\partial Q_1}{\partial Q}, \frac{\partial Q_1}{\partial R}, \frac{\partial R_1}{\partial P}, \frac{\partial R_1}{\partial Q}, \frac{\partial R_1}{\partial R}\right) = 0 \qquad (i = 1, 2, 3).$$

On peut effectuer la recherche de toutes les équations jouissant de la propriété précédente. En effet, soient

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + cz, \\ y' &= a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ z' &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \end{aligned}$$

des équations définissant un *groupe continu* à six paramètres dont les a, b, c sont des fonctions. On posera

$$\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x} &= a, & \frac{\partial P}{\partial y} &= b, & \frac{\partial P}{\partial z} &= c, \\ \frac{\partial Q}{\partial x} &= a_1, & \frac{\partial Q}{\partial y} &= b_1, & \frac{\partial Q}{\partial z} &= c_1, \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= a_2, & \frac{\partial R}{\partial y} &= b_2, & \frac{\partial R}{\partial z} &= c_2. \end{aligned}$$

En éliminant les six paramètres entre les neuf équations, on obtiendra un système de trois équations différentielles entre P, Q, R, jouissant, comme le montre l'auteur, de la propriété demandée.

Les méthodes de M. Lie permettent de trouver les groupes à deux variables et à deux paramètres. La question proposée est donc résolue.

M. Picard fait voir que le mode de généralisation s'étend au cas où les équations différentielles sont en nombre plus grand que les fonctions. Si l'on a n fonctions de n variables et $n + p$ relations distinctes entre les dérivées partielles du premier ordre, on aura à considérer les groupes linéaires $n^2 - n - p$ paramètres.

Raffy. — Sur la détermination des surfaces spirales d'après leur élément linéaire. (1421-1424).

Toute spirale est représentée en coordonnées semi polaires par les formules

$$z = z_0 e^v, \qquad r = r_0 e^v, \qquad \theta = \omega_0 + kv,$$

où z_0, r_0, ω_0 sont des fonctions d'un paramètre v et k une constante, et l'élément linéaire de spirale peut s'écrire, comme on sait,

$$ds^2 = e^{2v} U^2 (du^2 + dv^2).$$

U étant une fonction de v.

M. Raffy montre que la détermination des spirales d'après leur élément linéaire dépend d'une équation très simple

$$k^2 (z_0^2 + z_0'^2) = k^2 U^2 - U'^2.$$

On ne sait pas intégrer cette équation en général; mais, comme elle est du genre zéro par rapport à z_0 et z_0', on peut la ramener à un type étudié par divers auteurs, savoir

$$\frac{dt}{du} + (t^2 + 1)\left[t \frac{f'(u)}{f(u)} - 1\right] = 0.$$

Celle-ci est visiblement intégrable par une quadrature quand $\frac{f'(u)}{f(u)}$ est constant. D'où cette conséquence :

Quelle que soit la constante m, on peut obtenir, par des quadratures, toutes les spirales d'élément linéaire

$$ds^2 = e^{2v} e^{2mu} (du^2 + dv^2).$$

L'auteur montre, en terminant, que l'on peut trouver explicitement une infinité de spirales applicables sur la surface engendrée par la développée d'une chaînette tournant autour de sa base.

Guichard. — Sur une classe particulière de droites. (1424-1426).

Soit D une droite de la congruence; F, F′ les foyers; C le milieu de FF′; π le plan mené par C perpendiculairement à D. Si l'on appelle *surface médiane* le lieu du point C et *surface centrale* l'enveloppe du plan π, les congruences considérées par M. Guichard jouissent de la double propriété qu'aux développables de la congruence correspondent des courbes conjuguées sur la surface médiane et sur la surface centrale.

Désignant par ξ, η, ζ des quantités proportionnelles aux cosinus directeurs de D; par x, y, z les coordonnées du point C; par x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 celles de F et F′, on a

$$x_1 = x + \lambda\xi, \qquad x_2 = x - \lambda\xi.$$

L'auteur montre que le problème revient à trouver quatre solutions ξ, η, ζ, λ d'une équation de Laplace à invariants égaux

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial u\, \partial v} = M\theta,$$

et telles que λ soit une fonction de $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ (u = const., v = const. représentent les développables de la congruence).

Voici des solutions particulières :

1° $\lambda =$ const.; les surfaces focales se réduisent à des courbes;

2° $\rho =$ const.; les développables de la congruence touchent les surfaces focales suivant leurs lignes de courbure; les courbes conjuguées que l'on trouve sur la surface centrale sont des géodésiques;

3° $\lambda = \rho$; les surfaces médiane et centrale sont confondues; la surface commune est minima, et la congruence est composée de normales à cette surface.

Petot. — Sur certains systèmes de coordonnées sphériques et sur les systèmes triples orthogonaux correspondants. (1426-1429).

L'auteur montre que la détermination des surfaces qui forment une famille de Lamé lorsqu'on les soumet à une translation rectiligne convenable revient à celle des systèmes sphériques pour lesquels les paramètres différentiels q^2 et p_1^2 de l'élément linéaire de la sphère vérifient la relation

$$\frac{\partial q^2}{\partial v} = \frac{\partial p_1^2}{\partial u}.$$

Mangeot. — Des surfaces qui possèdent la symétrie courbe des systèmes de plans. (1497-1500).

Les surfaces S qui admettent toutes ces surfaces de symétrie des surfaces polyédrales sont représentées par l'équation

$$(S) \qquad f\left(\frac{y^2}{n} - \frac{z^2}{r},\ \frac{z^2}{r} - \frac{x^2}{m},\ \frac{x^2}{m} - \frac{y^2}{n}\right) = 0,$$

où f désigne une fonction arbitraire. Les surfaces de symétrie Σ sont définies par l'équation

$$(\Sigma) \qquad x^m y^n z^r = \text{const.}$$

Elles peuvent être regardées comme des formes limites des surfaces dites *tétraédrales*.

La symétrie qui se présente ici est toute semblable à la symétrie plane; car, si l'on mène une normale à une surface Σ, tous ses points de rencontre N avec une même surface S sont deux à deux symétriques par rapport au point d'incidence de la normale. Lorsque l'on fait mouvoir la normale de façon que le point d'incidence se déplace sur une ligne asymptotique de Σ, deux points N, se correspondant symétriquement, décrivent deux arcs égaux, et les segments de la normale compris entre ces deux points et le point d'incidence engendrent des aires équivalentes.

Si m et n sont égaux, l'équation (S) représente toutes les surfaces qui ont la symétrie courbe des angles tétraèdres réguliers.

On peut démontrer ces propositions :

Les surfaces réglées ou les surfaces de révolution qui admettent toutes les surfaces de symétrie des surfaces polyédrales sont des surfaces du second ordre.

Les surfaces possédant à la fois la symétrie plane du cube et la symétrie courbe du système de ses six plans diagonaux sont celles que définit une rela-

tion de forme arbitraire entre les deux expressions

$$(y^2 - z^2)^2 + (z^2 - x^2)^2 + (x^2 - y^2)^2,$$
$$(y^2 + z^2 - 2x^2)(z^2 + x^2 - 2y^2)(x^2 + y^2 - 2z^2) = 0.$$

Brillouin. — Déformations homogènes finies. Énergie d'un corps isotrope. (1500-1502).

ATTI DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI. In-8°, série 4ᵃ, Rendiconti.

Vol. V, 1889; 1ᵉʳ semestre (¹).

Pincherle (*S.*). — Les systèmes récurrents de premier ordre et de deuxième degré. (8-12).

L'auteur étudie les systèmes de fonctions rationnelles définis par la relation

$$p_{n+1}(x) = (x - \alpha_n)(x - \beta_n)\, p_n(x),$$

et trouve que les champs de convergence des séries de fonctions $p_n(x)$ sont limités par un système de cassinoïdes homofocales. Dans ces champs elles sont uniformément convergentes. Une fonction $f(x)$ régulière dans une cassinoïde convexe ou dans une des ovales d'une cassinoïde non convexe peut être développée de la manière suivante

$$f(x) = \Sigma(c_n + x c'_n)\, p_n(x),$$

étant

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int (a_n + z)\, q_n(z)\, f(z)\, dz,$$

$$c'_n = \frac{1}{2\pi i} \int q_n(z)\, f(z)\, dz,$$

où, ayant posé $(x - \alpha_n)(x - \beta_n) = x^2 + a_n x + b_n$, on a défini un nouveau système de fonctions $q_n(z)$ par la relation

$$q_{n-1}(z) = (z^2 + a_n z + b_n)\, q_n(z), \qquad [1 = (z^2 + a_0 z + b_0)\, q_0].$$

Si le champ donné est une des ovales d'une cassinoïde non convexe, il peut arriver que la série donnée ci-dessus ne représente pas la même fonction dans l'autre ovale, tout en y étant aussi convergente. En outre, le développement n'est pas unique.

Millosevich (*E.*). — Sur les dernières comètes découvertes. (16-17).

(¹) Voir *Bulletin*, t. XIV₂, p. 210.

Guccia (*G.-B.*). — Sur la classe et le nombre des inflexions d'une courbe algébrique douée de singularités quelconques. (18-25).

La classe d'une courbe algébrique quelconque est égale au genre de la courbe composée par la courbe donnée et une première polaire, moins la somme des genres de ces courbes, plus l'unité.

Le nombre des points d'inflexion d'une courbe algébrique quelconque est égal au genre de la courbe composée par la courbe donnée et sa hessienne, moins la somme des genres de ces deux courbes, plus l'unité.

Chistoni (*C.*). — Valeurs absolues des éléments de magnétisme terrestre déterminées en quelques lieux d'Italie en 1887. (32).

Garibaldi (*P.-M.*). — Amplitude de l'oscillation moyenne mensuelle de l'aiguille de déclinaison à Gênes pour 1888, et époque probable de la congruence d'un minimum de taches solaires et de variations déclinométriques ayant eu lieu dans la même année.

Govi (*G.*). — Sur l'emploi des plans centraux et des plans centriques, des points polaires et des points poliques et des plans correspondants pour déterminer les foyers conjugués, le lieu, la situation et la grandeur des images dans les systèmes optiques. (103-110).

Ricci (*G.*). — Sur certains systèmes de fonctions. (112-118).

Dans cette Note, l'auteur s'occupe des systèmes de fonctions à n variables, dont la composition varie avec le système de variables indépendantes suivant l'une ou l'autre de deux certaines lois. En général, si l'on indique par m un nombre entier $\geqq 0$, il considère des systèmes qu'il appelle m^{uples} ou d'ordre m, dont les éléments sont en nombre de n^m et peuvent par conséquent être représentés par un symbole général $U_{r_1, r_2, \ldots, r_m}$, chaque r_i pouvant prendre toutes les valeurs de 1 à n. Or, lorsqu'on fait un changement de variables indépendantes, il ne suffit pas de substituer dans chaque élément du système aux anciennes variables leurs expressions par les nouvelles variables, mais on doit aussi faire une certaine substitution sur les éléments du système. L'auteur considère deux cas :

1° Ou la substitution est de la nature de celle au moyen de laquelle on passe des dérivées d'une fonction par rapport aux anciennes variables aux dérivées par rapport aux nouvelles variables;

2° Ou bien de celle au moyen de laquelle on passe des différentielles des unes à celles des autres variables.

Dans le premier cas, le système est appelé par l'auteur *covariant* et dans le second *contrevariant*. Un système d'ordre o est constitué par une seule fonction, et par suite ne donne lieu à aucune substitution sur les éléments; l'auteur l'appelle *invariant*. Il étudie tous ces systèmes en les rattachant à une forme

différentielle quadratique irréductible φ, dont les coefficients constituent un système double covariant; ceux de la forme réciproque forment un système double contrevariant.

A l'aide de la forme φ et suivant une certaine loi, on peut passer d'un système covariant à un autre contrevariant d'ordre égal, et réciproquement. Entre deux tels systèmes, que l'auteur appelle *réciproques*, il y a une loi de dualité par laquelle une propriété de l'un en donne immédiatement une de l'autre par le simple échange des mots *covariant* et *contrevariant*.

Christoffel a démontré qu'à l'aide d'une forme φ on peut déduire d'un système covariant d'ordre m un autre système covariant d'ordre $m+1$. M. Ricci étudie les propriétés de cette opération qu'il appelle *dérivation covariante*, et d'une autre, que l'on peut regarder comme sa réciproque, et appelée par lui *dérivation contrevariante*, au moyen de laquelle de tout système contrevariant d'ordre m on en déduit un d'ordre $m+1$; il établit aussi les propositions et les formules fondamentales relatives à ces opérations, qui outre leur haute importance analytique en ont une assez remarquable pour leurs applications géométriques, mécaniques et physiques, que les lecteurs du *Bulletin* connaissent déjà par le résumé que l'auteur même a rédigé pour ce recueil (XVI_2, p. 167-189).

Volterra (*V.*). — Sur les variables complexes dans les hyperespaces. (158-165).

La notion de *fonctions d'hyperespaces* est analogue à celle de *fonctions de lignes* et de *fonctions de surfaces* que l'auteur a données et employées dans des recherches précédentes (voir *Lincei, Rendiconti,* t. III et IV). Une variable φ est appelée une fonction des hyperespaces S_r plongés dans un hyperespace S_n et indiquée par $\varphi|[S_r]|$ lorsqu'à tout hyperespace S_r renfermé en S_n et ayant une certaine *direction* correspond une valeur de φ. L'auteur donne pour ces fonctions les notions de continuité et de dérivation et les conditions d'intégrabilité des dérivées d'une fonction φ *du premier degré*, c'est-à-dire telle qu'on ait

$$\varphi|[S_r]| = \varphi|[S'_r]| + \varphi|[S''_r]|,$$

S'_r et S''_r étant deux hyperespaces qui ont en commun une portion S ayant direction différente suivant qu'on l'envisage comme appartenant à l'un ou à l'autre des deux hyperespaces, et S'''_r étant l'hyperespace qu'on obtient en supprimant S dans l'ensemble de S'_r et S''_r. Il donne aussi l'extension de la notion de monogénéité : il dit que deux fonctions f et φ sont *liées isogéniquement* lorsqu'en un point quelconque P de l'hyperespace le rapport

$$\frac{d\varphi}{dS_{r+1}} : \frac{df}{dS_{r+1}}$$

ne dépend que de P.

Padova (*E.*). — Sur les déformations infinitésimales. (174-178).

Imaginons une déformation de l'espace, telle que des points infiniment voisins restent indéfiniment voisins. La dilatation linéaire d'un élément quelconque A peut être représentée par une forme quadratique des quantités qui déterminent la direction de l'élément, et les coefficients de cette forme seront des fonctions des coordonnées de A. Dans un espace de trois dimensions ces coefficients,

appelés par l'auteur les *coefficients de la déformation,* sont six. On peut alors se proposer les deux problèmes suivants, que l'auteur résout dans cette Note :

1° Trouver les conditions qui doivent être satisfaites dans un espace donné par six fonctions continues des coordonnées pour qu'elles puissent être les coefficients d'une déformation.

2° Trouver les conditions qui doivent être satisfaites par les coefficients du carré de l'élément linéaire de l'espace pour que les coefficients d'une déformation la déterminent à moins de six constantes arbitraires.

Tonelli (*A.*). — Sur une classe d'équations différentielles aux dérivées partielles d'ordre m. (178-185).

L'intégration de l'équation

$$\sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m} \frac{\partial^m z}{\partial x_{\alpha_1}, \ldots, \partial x_{\alpha_m}} + P_{m-1}^{(m)} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}} \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_{\alpha_1}, \ldots, \partial x_{\alpha_{m-1}}} + \ldots$$
$$+ P_1^{(m)} \sum_{\alpha_1} \frac{\partial z}{\partial x_{\alpha_1}} + P_0^{(m)} z = M$$

peut, sous certaines conditions, être ramenée à celle d'une équation de même forme et d'ordre inférieur d'une unité.

Pizzetti (*P.*). — Sur une généralisation du principe de la moyenne arithmétique. (186-191).

Pizzetti (*P.*). — Sur une certaine formule exprimant la probabilité des erreurs d'observation. (191-199).

Cesaro (*E.*). — Sur les formules de Maxwell. (199-204).

Soient P, Q, R les composantes de la force électromotrice, f, g, h celles du déplacement électrique, A, B, C celles de l'action totale exercée sur une portion S du champ électrique par les autres parties du même champ.

Alors, ayant posé

$$(1) \quad \begin{cases} p_{xx} = Pf - \frac{1}{2}(Pf + Qg + Rh), & p_{yx} = Pg, & p_{zx} = Ph, \\ p_{yy} = Qg - \frac{1}{2}(Pf + Qg + Rh), & p_{zy} = Qh, & p_{xy} = Qf, \\ p_{zz} = Rh - \frac{1}{2}(Pf + Qg + Rh), & p_{xz} = Rf, & p_{yz} = Rg, \end{cases}$$

l'auteur trouve pour le cas que S ne renferme pas des surfaces ou des lignes électrisées

$$A = f(lp_{xx} + mp_{yx} + np_{zx})\, ds,$$

l, m, n étant les cosinus de direction de la normale externe à la surface s de

l'espace S; et les composantes de la tension en ds sont

$$a = lp_{xx} + mp_{yx} + np_{zx} = \mathrm{P}\mathfrak{D}_\nu - \frac{l}{2}(\mathrm{P}f + \mathrm{Q}g + \mathrm{R}h),$$

$$b = lp_{xy} + mp_{yy} + np_{zy} = \mathrm{Q}\mathfrak{D}_\nu - \frac{m}{2}(\mathrm{P}f + \mathrm{Q}g + \mathrm{R}h),$$

$$c = lp_{xz} + mp_{yz} + np_{zz} = \mathrm{R}\mathfrak{D}_\nu - \frac{n}{2}(\mathrm{P}f + \mathrm{Q}g + \mathrm{R}h),$$

où $\mathfrak{D}_\nu$ est la composante du déplacement électrique $\mathfrak{D}$ suivant la normale.

Après avoir examiné le cas où dans l'espace S il y a des surfaces électrisées, l'auteur démontre que la variation d'énergie produite par une déformation quelconque du champ électrique peut prendre la forme d'un travail de forces internes, et trouve pour cette variation δW l'expression

$$\delta W = \int \left(p_{xx}\frac{\partial \delta x}{\partial x} + p_{yy}\frac{\partial \delta y}{\partial y} + p_{zz}\frac{\partial \delta z}{\partial z} + p_{yz}\frac{\partial \delta z}{\partial y} + p_{zy}\frac{\partial \delta y}{\partial z} + \ldots \right) dS.$$

Enfin il montre que les formules (1) subsistent pour tout espace, même non euclidien.

Crescini (*E.*). — Sur le mouvement d'une sphère roulant sur un plan fixe. (204-209).

Volterra (*V.*). — Sur les variables complexes dans les hyperespaces. (291-299).

M. Volterra reprend ici en examen la notion de *liaison isogénique* entre deux fonctions complexes F, Φ d'hyperespaces.

En posant

$$\frac{d\mathrm{F}}{d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r+1}})} = p_{i_1, \ldots, i_{r+1}}, \qquad \frac{d\Phi}{d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{r+1}})} = \varpi_{i_1, \ldots, i_{r+1}},$$

la liaison isogénique est exprimée par

$$\frac{\varpi_{i_1, \ldots, i_{r+1}}}{p_{i_1, \ldots, i_{r+1}}} = f,$$

f étant une fonction des points de l'hyperespace total, indépendante des indices $i_1, \ldots, i_{r+1}$. On en conclut que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction F soit susceptible d'être liée isogéniquement à une autre, est qu'il existe une intégrale commune au système d'équations différentielles linéaires simultanées

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^s p_{i_1, \ldots, i_{s-1}, i_{s+1}, \ldots, i_{r+2}} \frac{\partial f}{\partial x_{i_s}} = 0.$$

L'auteur étudie ce système, et démontre que, si les conditions d'intégrabilité

$$\sum_1^{r+2}{}_s (-1)^{s-1} \frac{dp_{i_1, \ldots, i_{s-1}, i_{s+1}, \ldots, i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

et les autres

$$\sum_{1}^{r+2}{}_{\varsigma} (-1)^{\varsigma} p_{i_\varsigma, h_1, \ldots, h_r} p_{i_1, \ldots, i_{\varsigma-1}, i_{\varsigma+1}, \ldots, i_{r+2}} = 0$$

sont satisfaites, le système est complet. La fonction F est alors appelée une fonction *élémentaire*. Après d'autres résultats, l'auteur donne une extension du théorème de Cauchy en démontrant que si f et F sont liées isogéniquement on a, pour le cas d'un seul hyperespace fermé S_{r+1} dans lequel f et F n'ont pas des singularités

$$\int_{S_{r+1}} f\, dF = 0,$$

et, pour le cas de plusieurs hyperespaces

$$\sum_{1}^{m}{}_{i} \int_{S_{r+1}^{(i)}} f\, dF = 0.$$

Govi (*G.*). — Sur les points correspondants dans les plans central et centrique, pour deux milieux réfringents divers, séparés par une seule surface sphérique. Signification d'une construction proposée par Newton pour trouver les foyers des lentilles. (307-311).

Bianchi (*L.*). — Sur les systèmes d'équations linéaires aux différentielles totales. (312-323).

Pincherle (*S.*). — Nouvelles observations sur les systèmes récurrents du premier ordre et de second degré. (323-327).

Tacchini (*P.*). — Sur la distribution en latitude des protubérances hydrogéniques solaires observées à l'observatoire royal du collège romain pendant le troisième et le quatrième trimestre de 1888. (330-331).

Arzela (*C.*). — Sur les fonctions de lignes. (342-348).

Ce travail se rattache à ceux de M. Volterra, et contient la démonstration de ces propriétés :

Une fonction continue de lignes prend effectivement une valeur maximum, une valeur minimum, et toute autre valeur comprise entre ces deux.

Guccia (*G.-B.*). — Sur une propriété des surfaces algébriques douées de singularités quelconques. (349-353).

Soient

$$\Phi = 0, \qquad \Psi = 0, \qquad X = 0$$

les équations irréductibles de trois surfaces algébriques dont les premiers membres dépendent linéairement des paramètres arbitraires λ_i, μ_i, ν_i respectivement. Soient

$p_{\Phi\Psi}$ le genre de la courbe mobile, intersection résiduelle de Φ et Ψ,
$p_{\Phi X}$ celui de l'intersection mobile de Φ et X,
$p_{\Phi\Xi}$ le genre de l'intersection mobile de Φ avec la surface

$$\Xi = \Psi_r X_t + a \Psi_s X_u = 0,$$

a étant une constante arbitraire, et les Ψ_r, Ψ_s, X_t, X_u deux couples de polynômes Ψ, X déterminés par des systèmes quelconques de valeurs attribuées aux paramètres μ, ν,
Q le nombre des points mobiles d'intersection de Φ, Ψ, X.

Cela posé, sous une certaine condition imposée au système Φ, on a

$$Q + p_{\Phi\Psi} + p_{\Phi X} - p_{\Phi\Xi} = 1.$$

En supposant que le système Φ soit le système ∞^3 des plans de l'espace, cette relation donne

$$N + \pi_\Psi + \pi_X - \pi_\Xi = 1,$$

N étant l'ordre de la courbe mobile d'intersection résiduelle de Ψ, X,
π_Ψ, π_X les genres de sections planes de Ψ, X,
π_Ξ le genre de la section plane de la surface

$$\Xi = \Psi_r X_t + a \Psi_s X_u = 0.$$

Riccò (*A.*). — Sur la fréquence des jours à Soleil sans taches ni trous pendant le minimum actuel de l'activité solaire. (353-356).

Millosevich (*E.*). — Sur la comète découverte par l'astronome Barnard le 2 septembre 1888. (356-357).

Venturi (*A.*). — Sur l'influence exercée par la réfraction astronomico-géodésique sur la formation de l'image du Soleil naissant réfléchi sur la mer. (357-361).

Beltrami (*E.*). — Un précurseur italien de Legendre et de Lobatchewsky. (441-448).

Compte rendu d'un Ouvrage du père Gérôme Saccheri, jésuite, intitulé : *Euclides ab omni nævo vindicatus, sive conatus geometricus quo stabiliuntur prima ipsa universæ Geometriæ principia.* Milan, 1733. La question principale traitée dans ce livre est l'établissement de la théorie des parallèles, et M. Beltrami fait ressortir toute l'importance historique de ce travail en montrant comment l'auteur était parvenu rigoureusement aux propositions principales de la théorie moderne des parallèles et à la distinction des trois Géométries.

Reina (*V.*). — Sur les oricycles des surfaces pseudosphériques. (448-456).

Guccia (*G.-B.*). — Sur l'intersection de trois surfaces algébriques en un point singulier et sur une question relative aux transformations rationnelles dans l'espace. (456-461).

L'auteur donne la solution de ce problème :

Trois surfaces $\Phi = 0$, $\Psi = 0$, $X = 0$ étant données, qui passent d'une manière quelconque par un point P, quel est le nombre I d'intersections absorbées par ce point?

Indiquons par $[\rho]$ les singularités de Φ en P, et considérons toutes les surfaces $F_1, F_2, \ldots$, d'ordre quelconque, chacune desquelles ait les propriétés suivantes :

1° Qu'elle substitue identiquement la surface Φ autour de P, soit pour les singularités $[\rho]$ soit pour la manière de se comporter par rapport à Ψ et X;

2° Que si elle a d'autres points singuliers et même des courbes singulières, ces dernières ne passent point par P, et les points singuliers soient à distance finie de P.

Cela posé, on suppose que pour la surface Φ soit satisfaite la condition suivante : que parmi les surfaces $F_1, F_2, \ldots$, il y en ait une au moins qui soit homaloïdique.

Sous cette condition l'auteur trouve que :

Le nombre des intersections absorbées par P est égal à l'abaissement du genre que la courbe

$$\Phi = 0, \qquad \Psi_r^{(m)} X_t^{(n)} + a \Psi_s^{(m)} X_u^{(n)} = 0$$

doit à ce même point, moins la somme des abaissements du genre des courbes

$$\Phi = 0, \qquad \Psi = 0,$$
$$\Phi = 0, \qquad X = 0.$$

(a est une constante arbitraire, et $\Psi_r^{(m)}$, $\Psi_s^{(m)}$, $X_t^{(n)}$, $X_u^{(n)}$ sont deux couples de surfaces pris arbitrairement dans les systèmes linéaires

$$\mu_1 \Psi_1 + \mu_2 \Psi_2 + \ldots = 0,$$
$$\nu_1 X_1 + \nu_2 X_2 + \ldots = 0.)$$

Relativement aux transformations rationnelles, l'auteur démontre le théorème suivant :

Étant donné un système homaloïdique $[\Phi] = 0$ (doué de singularités bases quelconques) qui détermine une transformation rationnelle de l'espace, le degré de la transformation inverse est égal au genre de la section plane arbitraire de la surface

$$\Phi_r \Phi_s + a \Phi_t \Phi_u = 0,$$

moins le double du genre de la section plane de $\Phi = 0$ plus l'unité (a est une

constante arbitraire et Φ_x, Φ_y, Φ_z, Φ_u sont quatre surfaces du système linéairement indépendantes).

Tacchini (*P.*). — Sur la photographie de l'éclipse totale de Soleil du 1er janvier 1889, faite à l'observatoire de Lick. (472-474).

Tacchini (*P.*). — Sur les observations de taches, facules et protubérances solaires, faites à l'observatoire royal du collège romain dans le premier trimestre de 1889. (474-475).

Guccia (*G.-B.*). — Nouveaux théorèmes sur les surfaces algébriques douées de singularités quelconques. (490-497).

En appliquant les propositions établies dans une Note précédente, l'auteur donne d'importantes relations entre des nombres relatifs aux systèmes linéaires à base quelconque, ainsi que l'ordre de la courbe parabolique d'une surface à singularités quelconques.

Montesano (*D.*). — Sur la transformation involutive de l'espace, qui détermine un complexe tétraédral. (497-501).

Pucci (*E.*). — Sur l'angle caractéristique et sur les lignes caractéristiques d'une surface (501-507).

Deux familles de lignes sur une surface sont appelées par l'auteur *tangentiellement conjuguées* lorsque les directions des lignes de l'une sont conjuguées à celles des lignes de l'autre. En supposant la surface rapportée à ses lignes de courbure, dont σ, τ soient les paramètres et R_σ, R_τ les rayons principaux, l'angle Ω déterminé par

$$\operatorname{tang}\Omega = \pm\frac{2\sqrt{R_\sigma R_\tau}}{R_\sigma - R_\tau}$$

est ce qu'il appelle *angle caractéristique*, et les *lignes caractéristiques* sont les lignes tangentiellement conjuguées se coupant sous cet angle. Les équations différentielles de ces lignes sont

$$\sqrt{D'_1}\,d\sigma + \sqrt{D'_2}\,d\tau = 0,$$
$$\sqrt{D'_1}\,d\sigma - \sqrt{D'_2}\,d\tau = 0,$$

D'_1, D'_2 étant les valeurs que prennent les expressions

$$D_1 = \Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial u^2}, \qquad D = \Sigma X\frac{\partial^2 x}{\partial v^2},$$

lorsque, comme on l'a supposé, on rapporte la surface à ses lignes de courbure (X, Y, Z sont les cosinus de direction de la normale).

Tonelli (*A.*). — Quelques formules relatives à certaines équa-

tions différentielles aux dérivées partielles de l'ordre m. (508-514).

L'auteur donne ici une transformation des conditions d'intégrabilité de l'équation

$$\sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_m} \frac{\partial^m z}{\partial x_{\alpha_1}, \ldots, \partial x_{\alpha_m}} + P_{m-1}^{(m)} \sum_{\alpha_1, \ldots, \alpha_{m-1}} \frac{\partial^{m-1} z}{\partial x_{\alpha_1}, \ldots, \partial x_{\alpha_{m-1}}} + \ldots$$
$$+ P_1^{(m)} \sum_{\alpha_1} \frac{\partial z}{\partial x_{\alpha_1}} + P_0^{(m)} z = M.$$

Millosevich (*E.*). — Sur la planète (264) Libussa en troisième opposition. (514-515).

Wolynski (*A.*). — Galilée à Rome en 1624. (578-580).

Bianchi (*L.*). — Sur les formes quadratiques à coefficients et à indéterminées complexes. (589-599).

Une forme complexe primitive

$$ax^2 + 2bxy + cy^2$$

est appelée de première, deuxième ou troisième espèce respectivement suivant que son diviseur σ, c'est-à-dire le plus grand diviseur commun de a, $2b$, c est 1, $1+i$ ou 2.

Le nombre h des classes de première espèce à déterminant donné D a été déterminé par Dirichlet. L'auteur détermine le nombre h_2 des classes de deuxième espèce, et le nombre h_3 de celles de troisième, en appliquant une extension de la méthode suivie par Gauss pour les formes réelles. Il trouve :

1° Que le nombre h_2 est égal au nombre h ou à sa moitié suivant que l'équation de Pell

$$t^2 - Du^2 = (1+i)^2$$

est résoluble ou non en nombres impairs t, u;

2° Le nombre h_3 pour $D \equiv \pm 1 \pmod 4$ est la moitié du nombre h pour $D \equiv \pm 1 \,[\mathrm{mod}\,(1+i)^2]$, ou bien lorsqu'on a $D \equiv \pm 5 \,[\mathrm{mod}\,(1+i)^2]$ et l'équation de Pell $t^2 - Du^2 = 4$ a des solutions impaires. En tout autre cas $h_3 = \frac{1}{6} h$.

Volterra (*V.*). — Sur les fonctions conjuguées. (599-611).

L'auteur étend au cas de n variables la notion de fonctions conjuguées qui se présente dans la théorie des variables complexes, en donnant la définition suivante :

Dans un espace de n dimensions on dit que deux fonctions de premier degré $F[[S_{r-1}]]$, $\Phi[[S_{n-r-1}]]$ sont conjuguées lorsqu'on a

$$\frac{dF}{d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})} = \frac{d\Phi}{d(x_{i_{r+1}}, \ldots, x_{i_n})},$$

$i_1, \ldots, i_n$ étant une permutation paire des indices $1, 2, \ldots, n$. Il fait précéder son étude sur les fonctions conjuguées par quelques propriétés de certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. Par exemple, il démontre que : la condition nécessaire et suffisante pour que le système

$$\sum_{1}^{r+1}{}_t (-1)^t \frac{\partial P_{i_1, \ldots, i_{t-1}, i_{t+1}, \ldots, i_{r+1}}}{\partial x_{i_t}} = p_{i_1, i_2, \ldots, i_{r+1}}$$

soit intégrable est qu'on ait

$$\sum_{1}^{r+2}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1, \ldots, i_{s-1}, i_{s+1}, \ldots, i_{r+2}}}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

en supposant que les x_i soient en nombre de n, que le système soit obtenu en prenant les combinaisons des n indices $r+1$ à $r+1$, et que les p, P changent de signe par une transposition d'indices. Il en déduit que toute fonction de premier degré d'hyperespaces S_r peut être exprimée par une intégrale multiple étendue aux hyperespaces S_r. En venant ensuite à la construction des fonctions conjuguées il démontre que :

Si les fonctions $M_{i_1, \ldots, i_r}$ satisfont à l'équation

$$\Delta^2 M_{i_1, \ldots, i_r} = 0,$$

et si l'on pose

$$\sum_{1}^{n}{}_t \frac{\partial M_{i_1, \ldots, i_{r-1}, i_t}}{\partial x_{i_t}} = P_{i_1, \ldots, i_{r-1}},$$

$$\sum_{1}^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial M_{i_1, \ldots, i_{s-1}, i_{s+1}, \ldots, i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = Q_{i_1, \ldots, i_{r+1}},$$

et puis

$$\sum_{1}^{r}{}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1, \ldots, i_{s-1}, i_{s+1}, \ldots, i_r}}{\partial x_{i_s}} = p_{i_1, \ldots, i_r},$$

$$\sum_{1}^{n}{}_t \frac{\partial Q_{i_1, \ldots, i_r, i_t}}{\partial x_{i_t}} = q_{i_{r+1}, \ldots, i_n},$$

on pourra poser

$$p_{i_1, \ldots, i_r} = \frac{dF}{d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_r})}, \qquad q_{i_1, \ldots, i_{n-r}} = \frac{d\Phi}{d(x_{i_1}, \ldots, x_{i_{n-r}})},$$

et les deux fonctions F, Φ seront conjuguées. Après avoir démontré quelques propriétés des fonctions conjuguées, il démontre aussi le réciproque du théorème précédent.

Morera (*G*). — Sur le mouvement hélicoïdal des fluides. (611-617).

Le mouvement du fluide est déterminé au moyen de trois fonctions λ, φ, ψ.

satisfaisant aux deux équations aux dérivées partielles

$$\Delta(\varphi, \psi) + \lambda \Delta\psi = 0,$$
$$\Delta(\lambda, \varphi) + \lambda \Delta(\lambda, \psi) = 0,$$

étant

$$\Delta\psi = \sum \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2,$$
$$\Delta(\lambda, \psi) = \sum \frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial x}.$$

Après avoir établi ces équations et ajouté quelques observations générales, l'auteur donne, comme application des mêmes équations, et en faisant usage d'un système de coordonnées cylindriques ρ, θ, z, un exemple de mouvement hélicoïdal défini par les équations

$$u = \sqrt{R(\rho) + \Theta(\theta)}\cos\theta,$$
$$v = \sqrt{R(\rho) + \Theta(\theta)}\sin\theta,$$
$$w = \sqrt{Z(z) - \Theta(\theta)},$$

u, v, w étant les composantes de la vitesse, et R, Θ, Z des fonctions arbitraires.

Siacci (*F.*). — Sur les forces capables de produire des déplacements égaux. (626-630), Note II (856-860).

On dit que deux systèmes sont *homologues* lorsque leurs positions sont déterminées par le même nombre de coordonnées indépendantes, et leurs forces vives ont même expression. On appelle *trajectoire* du système l'ensemble des positions compatibles avec $n-1$ équations entre les n coordonnées, et *direction* l'ensemble des n accroissements de ces coordonnées dans le passage du système à une position infiniment rapprochée. Cela posé, on a le théorème suivant :

Soient $s_1, s_2, \ldots, s_m$ des systèmes homologues qui partent d'une même position initiale, et suivent la même trajectoire, et lorsqu'ils passent par une position commune quelconque, les expressions de leurs forces vives soient T_1, T_2, ..., T_m, les moments virtuels des forces soient δU_1, δU_2, ..., δU_m. Un autre système homologue S soit soumis à l'action du moment virtuel

$$\lambda_1 \delta U_1 + \lambda_2 \delta U_2 + \ldots + \lambda_m \delta U_m;$$

alors il suivra la même trajectoire sous les conditions suivantes :

1° Que les forces soient indépendantes du temps;

2° Qu'on ait

$$T_1 \delta\lambda_1 + T_2 \delta\lambda_2 + \ldots + T_m \delta\lambda_m = 0;$$

3° Que dans la position initiale, la direction de S étant égale à celle des autres systèmes, la force vive soit

$$T_1\lambda_1 + T_2\lambda_2 + \ldots + T_m\lambda_m.$$

Dans la seconde Note en partant de ce théorème (énoncé sous une autre forme) l'auteur établit la proposition suivante

La condition nécessaire et suffisante pour que plusieurs problèmes de Mécanique aient $2n-2$ intégrales communes indépendantes du temps est que les n forces P_r satisfassent aux $n-1$ conditions

$$P_r q'_s - P_s q'_r = q'^2 \prod_r \left(q_1, \ldots, q_n; \frac{dq_1}{dq_n}, \ldots, \frac{dq_{n-1}}{dq_n}\right),$$

et alors les intégrales communes sont les intégrales des équations

$$\frac{d^2 q_r}{dq_n^2} = \prod_r \left(q_1, \ldots, q_n; \frac{dq_1}{dq_n}, \ldots, \frac{dq_{n-1}}{dq_n}\right).$$

Volterra (V.). — Sur les fonctions d'hyperespaces et sur leurs paramètres différentiaux. (630-640).

Les théorèmes suivants sont des extensions du théorème de Green au cas des hyperespaces.

1. Si les $p_{i_1,\ldots,i_r}$, $p'_{i_1,\ldots,i_r}$ satisfont aux conditions

$$\sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

$$\sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p'_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

on pourra poser

$$p_{i_1,\ldots,i_r} = \sum_1^{r}{}_s (-1)^s \frac{\partial P_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}},$$

$$p'_{i_1,\ldots,i_r} = \sum_1^{r}{}_s (-1)^s \frac{\partial P'_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}},$$

et si dans l'hyperespace S_n les P, P', p, p' sont monodrômes, finies et continues ainsi que leurs dérivées, on aura

$$\begin{aligned}
&(-1)^{r-1} \int_{S_n} \sum_i p_{i_1,\ldots,i_r} p'_{i_1,\ldots,i_r}\, dS_n \\
&= \int_{S_{n-1}} \sum_i P_{i_1,\ldots,i_{r-1}} \left\{ \sum_1^n{}_t p'_{i_1,\ldots,i_{r-1},i_t} \cos(\nu x_{i_t}) \right\} dS_{n-1} \\
&\quad + \int_{S_n} \sum_i P_{i_1,\ldots,i_{r-1}} \left\{ \sum_1^n{}_t \frac{\partial p'_{i_1,\ldots,i_{r-1},i_t}}{\partial x_{i_t}} \right\} dS_n \\
&= \int_{S_{n-1}} \sum_i P_{i_1,\ldots,i_{r-1}} \left\{ \sum_1^n{}_t p_{i_1,\ldots,i_{r-1},i_t} \cos(\nu x_{i_t}) \right\} dS_{n-1} \\
&\quad + \int_{S_n} \sum_i P'_{i_1,\ldots,i_{r-1}} \left\{ \sum_1^n{}_t \frac{\partial p_{i_1,\ldots,i_{r-1},i_t}}{dx_{i_t}} \right\} dS_n.
\end{aligned}$$

2. Si les $p_{i_1,\ldots,i_r}$, $p'_{i_1,\ldots,i_r}$ satisfont aux conditions

$$\sum_1^n{}_t \frac{\partial p_{i_1,\ldots,i_{r-1},i_t}}{\partial x_{i_t}} = \qquad \sum_1^n{}_t \frac{\partial p'_{i_1,\ldots,i_{r-1},i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0,$$

nous pouvons poser

$$p_{i_1,\ldots,i_r} = \sum_1^n{}_t \frac{\partial Q_{i_1,\ldots,i_r,i_t}}{\partial x_{i_t}},$$

$$p'_{i_1,\ldots,i_r} = \sum_1^n{}_t \frac{\partial Q'_{i_1,\ldots,i_r,i_t}}{\partial x_{i_t}},$$

et si en S_n les Q, Q', p, p' sont monodrômes finies et continues ainsi que leurs dérivées, on a

$$\begin{aligned}
&(-1)^r \int_{S_n} \sum_i p_{i_1,\ldots,i_r} p'_{i_1,\ldots,i_r}\, dS_n \\
&= \int_{S_{n-1}} \sum_i Q_{i_1,\ldots,i_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s p'_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) \right\} dS_{n-} \\
&\quad + \int_{S_n} \sum_i Q_{i_1,\ldots,i_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1} (-1)^s \frac{\partial p'_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} \right\} dS_n \\
&= \int_{S_{n-1}} \sum_i Q'_{i_1,\ldots,i_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s p_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}) \right\} dS_{n-1} \\
&\quad + \int_{S_n} \sum_i Q'_{i_1,\ldots,i_{r+1}} \left\{ \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} \right\} dS_n.
\end{aligned}$$

Après l'auteur déduit de ces théorèmes que, les équations différentielles simultanées

$$\sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s \frac{\partial p_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0, \qquad \sum_1^n{}_t \frac{\partial p_{i_1,\ldots,i_{r-1},i_t}}{\partial x_{i_t}} = 0$$

étant satisfaites, les p sont déterminées en S_n lorsqu'on connaît au contour les valeurs des quantités

$$a_{i_1,\ldots,i_{r-1}} = \sum_1^n{}_t p_{i_1,\ldots,i_{r-1},i_t} \cos(\nu x_{i_t}),$$

ou bien celles des quantités

$$b_{i_1,\ldots,i_{r+1}} = \sum_1^{r+1}{}_s (-1)^s p_{i_1,\ldots,i_{s-1},i_{s+1},\ldots,i_{r+1}} \cos(\nu x_{i_s}),$$

et résout la question suivante :

Les valeurs des b étant données, et en supposant que les p satisfassent aux

équations

$$\sum_{1}^{r+1}{}_{s} (-1)^{s} \frac{\partial p_{i_1,\ldots,i_s,i_{s+1},\ldots,i_{r+1}}}{\partial x_{i_s}} = 0,$$

déterminer ces p de manière que l'expression

$$V = \int_{S_n} \sum_{t} p^2_{i_1,\ldots,i_r} dS_n$$

soit un maximum ou un minimum. Enfin il vient à interpréter les résultats précédents au moyen des fonctions d'hyperespaces et des fonctions conjuguées, et à étudier certaines expressions différentielles invariantives qui se présentent dans ces recherches.

Pincherle (*S.*). — Quelques théorèmes sur les fractions continues. (640-643).

Exposé sans démonstrations de quelques propositions relatives à la convergence des fractions continues.

Ricci (*G.*). — Sur un point de la théorie des formes différentielles quadratiques ternaires. (643-651).

L'auteur a démontré dans un autre travail la proposition suivante :

Soit φ^2 une forme différentielle quadratique à n variables et de première classe, c'est-à-dire telle qu'on puisse la déduire d'une forme de même nature, positive, à coefficients constants et à $n+1$ variables par une relation opportune; alors il existe une forme covariante ψ, déterminée en général pour $n > 2$, et qui pour $n = 2$, et relativement à une surface dont φ soit l'élément linéaire, peut être ramenée à celle dont les coefficients apparaissent dans les formules de Codazzi.

Or on peut se proposer de déterminer les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe un système au moins de variables, qui réduise en même temps φ^2 et ψ à ne renfermer que les différentielles des variables indépendantes. En langage géométrique ce problème n'est que le suivant : « Une surface de n dimensions étant donnée, est-il toujours possible de considérer tout système de lignes de courbure comme déterminé par les intersections de $n-1$ systèmes de variétés à $n-1$ dimensions renfermés dans la surface? »

Dans la Note présente, l'auteur résout ce problème pour $n = 3$, et au moyen des opérations de dérivation covariante et contrevariante il arrive aisément aux résultats suivants :

1° Si toutes les courbures principales de la surface à trois dimensions S_3 sont identiquement égales entre elles (et en ce cas leur valeur commune est constante et S_3 est une sphère), φ^2 et ψ se réduisent toujours ensemble à ne renfermer que les carrés des différentielles des variables indépendantes.

2° Si deux seulement des courbures principales de S_3 sont identiquement égales, par chaque point de S_3 passe une surface S_2 à deux dimensions, applicable sur une sphère dans l'espace euclidien, et telle que chacune de ses courbes est une ligne de courbure pour S_3. Le système des S_2 fait partie d'un

système simplement infini de systèmes triples orthogonaux, et les surfaces de deux de ces systèmes se coupent toujours suivant un système de lignes de courbure de S_3. Dans ce deuxième cas, il existe donc un nombre simplement infini de systèmes de variables indépendantes, qui réduisent φ^2 et ψ à ne renfermer que les carrés de leurs différentielles.

3° Si les courbures principales de S_3 sont toutes distinctes, il ne peut exister en S_3 plus d'un système triple de surfaces à deux dimensions, tel que les surfaces de deux quelconques de ces systèmes se coupent suivant une ligne de courbure de S_3; et pour qu'il existe ce système triple il est nécessaire et suffisant que les coefficients de φ^2 satisfassent à une équation aux dérivées partielles du troisième ordre, dont l'auteur donne la forme.

Sous cette condition seulement, et d'une seule manière, sera-t-il possible, en ce dernier cas, de réduire ensemble φ^2 et ψ à la forme demandée.

Bigiavi (*C.*). — Sur les équations différentielles linéaires. (651-657).

L'auteur étudie une classe d'équations différentielles à coefficients doublement périodiques, qui ont un nombre d'intégrales uniformes inférieur à leur ordre. Ces équations ne sont pas complètement intégrables, mais elles sont réductibles, et l'on peut abaisser leur ordre du nombre k des intégrales uniformes. Ces k intégrales appartiennent à une équation de Picard à intégrales uniformes, et les nouvelles équations qu'on obtient par l'abaissement de l'ordre sont aussi à coefficients doublement périodiques.

Pizzetti (*P.*). — Sur le calcul de l'erreur moyenne d'un système d'observations. (740-744).

Tacchini (*P.*). — Sur les photographies de l'éclipse totale de Soleil du 1er janvier 1889 faites en Californie. (763-764).

Tacchini (*P.*). — Sur la distribution en latitude des taches, facules et éruptions solaires, observées à l'observatoire royal du Collège romain pendant le troisième et le quatrième trimestre de 1888. (765-766).

Millosevich (*E.*). — Observations de la comète Barnard (2 septembre 1888) 1889, I, faites à l'équatorial de 152mm d'ouverture de Chauchoix. (770).

Cerulli (*V.*). — Formules pour l'aplatissement de l'image du Soleil dans la mer. (770-771).

Brioschi (*F.*). — Notice sur la vie et les ouvrages de George Henry Halphen. (815-823).

Beltrami (*E.*). — Sur l'extension du principe de d'Alembert à l'électrodynamique. (852-856).

Maxwell a eu l'idée profonde et originelle de ramener les équations relatives aux forces électromotrices aux équations générales de la Mécanique, mais dans l'exposition qu'il en a donnée il ne tient compte qu'indirectement de la loi d'Ohm, qui est une condition essentielle dans cette application. Pour ôter cet inconvénient, M. Beltrami donne d'abord une généralisation du théorème de d'Alembert, en l'appliquant, au moyen de la loi d'Ohm, au cas des forces électromotrices, et il arrive ensuite, sans d'autres modifications, aux équations finales de Maxwell.

Padova (*E.*). — La théorie de Maxwell dans les espaces courbes. (852-856).

M. Beltrami a observé que les composantes des tensions d'un milieu élastique isotrope, équivalentes aux actions newtoniennes, ne satisfont pas aux conditions que doivent remplir les tensions engendrées dans un milieu isotrope ordinaire par une déformation. M. Padova commence par mettre en relief la nature de ces conditions, en montrant qu'elles naissent de ce que l'on a supposé que le milieu qui est déformé soit euclidien avant et après la déformation. Il se propose ensuite de chercher si les tensions trouvées par Maxwell satisfont aux conditions analogues pour le cas d'un milieu à courbure constante avant et après la déformation. Par cela il a pu ôter une restriction imposée par M. Beltrami aux valeurs des constantes d'isotropie, mais il y a encore bien des difficultés pour l'interprétation des tensions de Maxwell dans un milieu isotrope à courbure constante négative.

Reina (*V.*). — Sur quelques propriétés des lignes caractéristiques. (881-885).

Les lignes caractéristiques sont celles ainsi appelées par M. Pucci (*voir* ci-dessus). L'auteur trouve qu'on peut aussi les définir comme les lignes le long desquelles les normales consécutives ont la plus grande distance. Il trouve aussi quelques autres propriétés de ces lignes.

2e semestre.

Bianchi (*L.*). — Sur les équations linéaires aux dérivées partielles du second ordre. (35-44).

L'auteur démontre que, pour les équations du type elliptique (à caractéristiques imaginaires), les valeurs de l'intégrale dans un champ connexe sont généralement déterminées par les valeurs de la même intégrale au contour.

Castelnuovo (*G.*). — Nombre des espaces qui coupent plusieurs droites dans un espace de n dimensions. (71-78).

Montesano (*D.*). — Sur les transformations involutrices de l'espace dans lesquelles aux plans correspondent des surfaces d'ordre n douées d'une droite $(n-2)^{\text{ple}}$. (123-130).

Castelnuovo (*G.*). — Nombre des involutions rationnelles sur une courbe de genre donné. (130-133).

Cesàro (*E.*). — Formules fondamentales pour l'analyse intrinsèque des courbes. (165-170).

Dans les *Annali di Matematica* (1888) l'auteur a établi les formules fondamentales de la Géométrie intrinsèque des courbes. Ici il les obtient par des considérations mécaniques. Elles sont, pour un espace linéaire de n dimensions,

$$\begin{aligned}
\frac{\delta x_1}{ds} &= \frac{dx_1}{ds} - \frac{x_n - \rho_1}{\rho},\\
\frac{\delta x_2}{ds} &= \frac{dx_2}{ds} - \frac{x_1}{\rho_{n-1}},\\
\frac{\delta x_i}{ds} &= \frac{dx_i}{ds} + \frac{x_{i-1}}{\rho_{n-i+2}} - \frac{x_{i+1}}{\rho_{n-i+1}}, \qquad (i = 3, 4, \ldots, n-1),\\
\frac{\delta x_n}{ds} &= \frac{dx_n}{ds} + \frac{x_1}{\rho_1} + \frac{x_{n-1}}{\rho_2},
\end{aligned}$$

où les ρ sont les rayons de courbure. Il fait aussi l'application de ces formules à l'étude d'un fil flexible et inextensible dans un espace de n dimensions.

Cerruti (*V.*). — Sur la déformation d'un involucre sphérique isotrope pour des déplacements donnés des points des deux surfaces limites. (189-201).

L'auteur résout ce problème par les méthodes qu'il a données et appliquées dans des travaux précédents. Dans le cas présent, la solution dépend principalement d'une expression particulière d'une fonction φ finie, continue et monodrome à l'intérieur de l'involucre, et satisfaisant dans cet espace à l'équation $\Delta^2\varphi = 0$. Si l'on appelle φ' et φ'' les valeurs de cette fonction sur les surfaces limites s_1 et s_2, O le centre commun des deux sphères, $m^{(0)}$ un point quelconque intérieur à l'involucre, m' et m'' deux points variables sur les deux surfaces, et P_s le polynôme de Legendre d'indice s, ayant pour argument le cosinus de l'angle $m^{(0)}Om'$ ou bien de l'angle $m^{(0)}Om''$, on a

$$\varphi = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{2s+1}{4\pi}\left(\frac{a_1^{s+1}}{r^{s+1}}\,\frac{a_2^{2s+1} - r^{2s+1}}{a_2^{2s+1} - a_1^{2s+1}}\int_{s_1}\varphi' P_s\, ds_1 + \frac{a_2^{s+1}}{r^{s+1}}\,\frac{r^{2s+1} - a_1^{2s+1}}{a_2^{2s+1} - a_1^{2s+1}}\int_{s_2}\varphi'' P_s\, ds_2\right).$$

et la forme de φ adoptée par l'auteur est la suivante

$$\varphi = \varphi_{21}^{(0)} + \varphi_{12}^{(0)} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^n (\varphi_{21}^{(n)} - \varphi_{11}^{(n)}) + \sum_{n=1}^{n=\infty} \left(\frac{a_2}{a_1}\right)^n (\varphi_{12}^{(n)} - \varphi_{22}^{(n)}),$$

ayant posé

$$\varphi_{11}^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{2s+1}{4\pi a_1^2} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2ns} \left(\frac{r}{a_1}\right)^s \int_{s_1} \varphi' P_s \, ds_1,$$

$$\varphi_{21}^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{2s+1}{4\pi a_2^2} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2ns} \left(\frac{r}{a_2}\right)^s \int_{s_2} \varphi'' P_s \, ds_2,$$

$$\varphi_{12}^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{2s+1}{4\pi a_1^2} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2n(s+1)} \left(\frac{a_2}{r}\right)^{s+1} \int_{s_1} \varphi' P_s \, ds_1,$$

$$\varphi_{22}^{(n)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{2s+1}{4\pi a_2^2} \left(\frac{a_1}{a_2}\right)^{2n(s+1)} \left(\frac{a_2}{r}\right)^{s+1} \int_{s_2} \varphi'' P_s \, ds_2.$$

Tacchini (*P.*). — Sur les observations solaires faites à l'observatoire du Collège romain pendant le deuxième et le troisième trimestre de 1889. (201-202).

Cesàro (*E.*). — Sur le pouvoir rotatoire magnétique. (202-208).

Bortolotti (*E.*). — Sur un théorème de la théorie de la connexion. (229-234).

Tacchini (*P.*). — Sur les observations spectroscopiques de la chromosphère solaire faites à l'observatoire royal du Collège romain pendant le deuxième et le troisième trimestre de 1889. (248).

Cesàro (*E.*). — Sur les variations de volume dans les corps élastiques. (259-264).

L'auteur démontre que le théorème que M. Betti avait établi pour le cas d'une sphère se déformant par effet de sa pesanteur, et que M. Padova avait étendu aux corps de révolution, subsiste pour un corps de forme quelconque.

Marcolongo (*R.*). — Sur la déformation d'une sphère homogène isotrope pour des conditions spéciales aux limites. (349-357).

Cavalli (*E.*). — Sur l'échange de chaleur entre vapeur et métal dans les motrices monocylindriques. (357-365).

COMPTES RENDUS HEBDOMADAIRES DES SÉANCES DE L'ACADÉMIE DES SCIENCES.

Tome CXIII; 1891 [1].

Boussinesq. — Sur la manière dont les vitesses, dans un tube cylindrique de section circulaire, évasé à son entrée, se distribuent depuis son entrée jusqu'aux endroits où se trouve établi un régime uniforme. (9-15).

Dans un tube rectiligne à entrée bien évasée, on peut supposer les filets liquides à très peu près parallèles dès la première section de la partie cylindrique. Alors les vitesses u du fluide, toutes sensiblement égales entre elles et à leur moyenne U sur cette première section, tendent rapidement, dès qu'on s'en éloigne d'amont en aval, vers les inégalites qu'elles présentent aux endroits où le régime est uniforme et où le rapport $\frac{U}{u}$ est la fonction

$$\varphi = 2\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

r désignant la distance à l'axe et R le rayon du tube.

Mais comment se fait le passage du premier mode de distribution au dernier? ou quelle est la fonction $\pi\left(x, \frac{r^2}{R^2}\right)$ qu'il faut ajouter à φ pour que la somme $\varphi + \pi$ exprime le rapport $\frac{u}{U}$ depuis l'abscisse $x = 0$ (entrée du tube) où $\varphi + \pi = 1$, c'est-à-dire $\pi = \frac{2r^2}{R^2} - 1$, jusqu'à $x = \infty$ où π est égal à zéro?

Des considérations plausibles conduisent M. Boussinesq à cette valeur approchée de π

$$\pi = -8{,}2\, e^{-\frac{16\varepsilon x}{\rho U^2 R}} \psi\left(\frac{r^2}{R^2}\right)$$

où le rapport $\frac{2}{\rho}$ est pour l'eau à 10° égal à 0,0000031 et où

$$\psi\left(\frac{r^2}{R^2}\right) = 0{,}160 - \frac{r^2}{R^2} - 2{,}222\left(\frac{r^2}{R^2}\right)^3 + 1{,}778\left(\frac{r^2}{R^2}\right)^4 - 1{,}102\left(\frac{r^2}{R^2}\right)^5 + 0{,}561\left(\frac{r^2}{R^2}\right)^6 - 0{,}242\left(\frac{r^2}{R^2}\right)^7.$$

Boussinesq. — Calcul de la moindre longueur que doit avoir un tube circulaire évasé à son entrée pour qu'un régime sensiblement uniforme s'y établisse, et de la dépense de charge qu'y entraîne l'établissement de ce régime. (49-51).

---

[1] Voir *Bulletin*, t. XVII$_2$, p. 30.

M. Boussinesq emploie la formule qu'il a donnée dans sa précédente Communication au calcul approché à la longueur L nécessaire pour que l'écoulement devienne uniforme. Une différence relative de 0,01 sur chacune des vitesses réalisées aux divers points d'une section étant pratiquement inappréciable, il suffira que le rapport de π à $2\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right)$ soit, pour $x = L$ et quel que soit $\frac{r}{R}$, inférieur à 0,01, ce qui conduit à une inégalité qui, résolue par rapport à L, donne la limite cherchée

$$L > 200\,000\,R^2 U.$$

L'auteur évalue ensuite la dépense totale de charge afférente à l'établissement du régime uniforme qu'il faut retrancher préalablement de la hauteur totale donnée de charge motrice avant d'appliquer à l'écoulement les lois simples de Poiseuille. Il trouve que la dépense de charge due à l'établissement du régime uniforme, qui était $U^2 : g$ à une première approximation, ne se trouve accrue à la seconde approximation que d'environ 0,12 de cette quantité.

Ribaucour. — Sur les systèmes cycliques. (304-307).

L'auteur considère un couple de droites N et N′ normales à des surfaces ayant même image sphérique comme élément générateur d'une infinité de systèmes cycliques.

Les *points-images* des cercles d'un système cyclique sont obtenus en cherchant les sommets des cônes isotropes passant par les cercles du système.

Si l'on considère tous les systèmes cycliques dérivés d'un couple *satisfaisant* de droites N et N′, ainsi que leurs points-images, ceux-ci appartiennent à chaque instant à deux corps invariables symétriques par rapport à un plan.

Le plan du couple en question touche une surface (S) que l'on peut déformer comme on veut en entraînant N et N′, sans que ces droites cessent d'être normales à des surfaces ayant même image sphérique. Les lignes de (S) correspondant aux lignes de courbure des surfaces orthogonales à N et N′ forment un réseau conjugué dont les tangentes passent à chaque instant par les foyers des congruences (N) et (N′).

Cette propriété peut être généralisée : soient N et N′ deux droites génératrices de deux congruences ayant même image sphérique (mais pouvant ne pas être normales à ces surfaces). Si l'on déforme la surface (S) touchant le plan des droites N et N′, chaque plan tangent entraînant les droites en question, les congruences obtenues ont toujours la même image sphérique. Elles sont polaires réciproques d'une infinité de couples d'enveloppes de sphères ayant leurs centres sur (S) et dont les rayons ne diffèrent que par une constante. Les développables suivant lesquelles on peut ranger simultanément les droites des deux congruences correspondent au réseau conjugué de (S) dont les tangentes contiennent les foyers situés sur N et N′.

La proposition qui précède s'applique très heureusement à l'étude des couples des surfaces applicables l'une sur l'autre.

La recherche analytique des systèmes cycliques se ramène à celle des couples de droites satisfaisantes N et N′. Si Z désigne le rayon d'une certaine sphère ayant son centre sur (S), N et N′ sont les polaires des enveloppes de sphères de rayon Z et Z + C. On trouve pour déterminer Z en coordonnées symétriques

imaginaires l'équation de Bonnet

$$\varphi(rt - s^2) - 2\frac{\partial\varphi}{\partial y}qr - 2\frac{\partial\varphi}{\partial x}pt + 4pq\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} = 0.$$

Ribaucour. — Sur les systèmes cycliques. (324-326).

Étant donnés un corps et une surface (Ω) qui lui est liée invariablement; si l'on fait rouler (Ω) sur une surface (O) applicable sur (Ω) sans déchirure ni duplicature, à chaque instant du mouvement tous les points du corps ont pour image isotrope, sur le plan tangent commun aux deux surfaces (O) et (Ω), des cercles engendrant des systèmes cycliques; les surfaces trajectoires ont leurs lignes de courbure en correspondance; le réseau conjugué unique qu'on peut tracer sur (Ω) et (O) de telle façon que les tangentes soient en correspondance instantanée correspond à toutes les lignes de courbure.

Si l'on considère dans le corps une ligne de longueur nulle, à chaque instant les cercles-images des points de cette ligne sont osculateurs à une certaine courbe tracée dans le plan de contact des surfaces (Ω) et (O); tous ces cercles engendrent des systèmes cycliques qui se correspondent; par conséquent la courbe plane osculatrice des cercles-images est normale à une infinité de surfaces faisant partie d'un système triplement orthogonal.

Serret (*P.*). — Sur une propriété d'involution commune à un groupe plan de cinq droites et à un système de neuf plans. (326-328).

Les côtés $P_1, P_2, \ldots, P_5$ d'un pentagone plan quelconque, et les médianes correspondantes $M_1, M_2, \ldots, M_5$ des cinq quadrilatères auxquels donnent lieu ces mêmes côtés, moins le premier, ou le deuxième, ..., ou le dernier, forment toujours cinq couples

$$P_1,\ M_1;\qquad P_2,\ M_2;\qquad \ldots;\qquad P_5,\ M_5$$

de directions conjuguées en involution.

En d'autres termes, les médianes M_i représentent, relativement à une certaine conique auxiliaire, les diamètres conjugués des cordes parallèles aux côtés correspondants P_i.

La forme de cette conique, qui résulte de l'énoncé, peut aussi être définie analytiquement; elle n'est autre que la conique dérivée cubiquement des cinq droites P_i, conique comprise dans la forme

$$\sum_1^5 \lambda_i P_i^3 = 0$$

abaissée au second degré par un choix convenable des coefficients.

Serret (*P.*). — Sur une propriété d'involution commune à un groupe plan de cinq droites et à un système de neuf plans. (347-349).

Étant donnés neuf plans parallèles aux neuf plans tangents communs à deux

cônes concentriques de troisième classe, les diamètres $D_1, D_2, \ldots, D_9$, communs aux surfaces du second ordre inscrites dans les neuf plans moins le premier P_1, ou le deuxième $P_2, \ldots$ ou le dernier P_9, représentent, relativement à une certaine surface auxiliaire du second ordre de centre d (point de concours des droites D_i), les diamètres conjugués des sections parallèles aux plans correspondants P_i. Cette surface auxiliaire n'est autre que l'ellipsoïde dérivé cubiquement des neuf plans P_i ou compris accidentellement dans la forme

$$\sum_1^9 \lambda_i P_i^2 = 0$$

abaissée au second degré à l'aide des coefficients.

Picard. — Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées. (356-358).

M. Kronecker a donné une formule relative au nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées dans un certain domaine D. Malheureusement l'intégrale de Kronecker, intégrale multiple d'ordre $n-1$ étendue à la *surface* du domaine D, ne représente pas le nombre cherché des racines, mais seulement la différence entre le nombre des racines pour lesquelles le déterminant fonctionnel des premiers membres des équations simultanées est positif et celui des racines pour lequel il est négatif.

M. Picard montre qu'il est possible de représenter le nombre *exact* des racines par une intégrale triple, qu'on peut d'ailleurs aisément réduire à une intégrale double.

Cosserat. — Sur les systèmes conjugués et sur la déformation des surfaces. (460-463).

M. Ribaucour a énoncé récemment le théorème suivant :

« Soient deux surfaces (Σ) et (Σ') applicables l'une sur l'autre; il existe deux réseaux conjugués tracés respectivement sur (Σ) et (Σ') qui se correspondent; le réseau conjugué tracé sur (Σ) correspond aux lignes de courbure des surfaces trajectoires des systèmes cycliques, en triple infinité, déduits de la connaissance de (Σ'). »

M. Cosserat prend cette remarquable proposition pour base de recherches sur la déformation des surfaces.

Il démontre ce lemme préliminaire :

« Les plans des cercles des systèmes cycliques déduits d'une *congruence cyclique et de Ribaucour* ont leurs points de contact avec leurs enveloppes en ligne droite; la droite ainsi déterminée forme une congruence dont les développables correspondent à celles de la congruence primitive et découpent les enveloppes des plans des cercles suivant des réseaux conjugués. »

Le théorème de M. Ribaucour entraîne le suivant :

« Étant données deux surfaces (Σ) et (Σ') applicables l'une sur l'autre, les deux réseaux conjugués qui se correspondent sur ces surfaces sont particuliers;

ils sont caractérisés par cette propriété que leur représentation sphérique est celle des développables d'une congruence cyclique. »

Il doit y avoir entre les coefficients E, F, G de l'élément linéaire d'une surface Σ deux relations pour que les lignes coordonnées forment un réseau conjugué sur l'une des surfaces résultant de la déformation de (Σ). Si l'on trace sur (Σ) un réseau conjugué, il n'y aura pas de surface applicable sur (Σ) et pour laquelle le réseau sera conjugué, tant que le réseau donné sera quelconque.

Si une surface admet plus d'une déformation conservant les lignes de courbure, elle en admet une infinité; ses normales forment une congruence cyclique et de Ribaucour, et réciproquement; c'est une surface moulure particulière.

Si une surface admet une seule déformation conservant les lignes de courbure, ses normales forment une congruence cyclique, et réciproquement; c'est une surface dont la représentation sphérique est celle d'une surface à courbure constante.

En particulier, les normales d'une surface à courbure constante forment une congruence cyclique; le système cyclique correspondant est celui de M. Ribaucour, formé par des cercles de rayon constant.

Elliot. — Sur la réduction à une forme canonique des équations aux dérivées partielles du premier ordre et du second degré. (495-498).

L'équation aux dérivées partielles

$$(4) \qquad ap^2 + 2bpq + cq^2 + 2dp + 2eq + f = 0,$$

où les coefficients $a, b, \ldots, f$ sont des fonctions données de deux variables x et y ne change pas de forme quand on effectue un changement de variables et de fonctions

$$x_1 = \varphi(x, y), \qquad y_1 = \psi(x, y), \qquad z = z_1 + t.$$

Elle admet pour invariants les trois fonctions

$$b^2 - ac, \qquad \mathrm{J} = \begin{vmatrix} a & b & d \\ b & c & e \\ d & e & f \end{vmatrix}, \qquad \mathrm{H} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{be - cd}{ac - b^2}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{bd - ac}{ac - b^2}\right).$$

$\mathrm{H} = 0$ exprime la condition nécessaire et suffisante pour qu'une équation (1) puisse être ramenée à ne plus contenir de termes du premier degré en p et q.

On peut profiter des trois fonctions arbitraires φ, ψ, t pour simplifier l'équation (1), en faisant disparaître trois termes, et pour la ramener à la forme canonique

$$(2) \qquad pq = \mathrm{M}p + \mathrm{N}.$$

Cette forme est canonique, car la réduction, avec les fonctions arbitraires qu'elle comporte, est indépendante d'un changement quelconque de variables et de fonctions préalablement opéré sur l'équation (1).

Dans le cas où l'invariant H est nul, l'équation canonique se réduit à

$$pq = \mathrm{N}.$$

A ce dernier type appartiennent les équations aux dérivées partielles admettant une intégrale de la forme

$$e^z = u + \mathrm{C}v + \mathrm{C}^2 w,$$

où u, v, w sont trois fonctions quelconques de x et y et C une constante arbitraire. L'équation correspondante est

$$pq + \frac{1}{(\mathrm{Y} - \mathrm{X})^2} = 0.$$

Au type réductible à la forme canonique (2) appartiennent les équations qui admettent une intégrale de la forme

$$(z - u)^\alpha (z - v)^\beta (z - w)^\gamma = \text{const}.$$

On peut aussi chercher quelles doivent être les fonctions M et N pour que l'équation canonique admette une intégrale du premier degré

$$\alpha p + \beta q + \gamma = \text{const}.$$

On trouve un résultat tout à fait analogue à celui qu'on obtient dans la recherche des lignes géodésiques.

La réduction à la forme canonique exige que l'invariant $b^2 - ac$ ne soit pas nul. S'il est nul, on peut ramener l'équation à la forme

$$p^2 - \lambda q = 0.$$

Cosserat. — Sur les systèmes cycliques et sur la déformation des surfaces. (498-500).

Dans une Communication récente, M. Cosserat montrait que la recherche des surfaces applicables sur une surface Σ se ramène à celle de certains réseaux conjugués tracés sur cette surface.

C'est un point qu'il précise dans sa Note actuelle.

Parmi les applications des résultats généraux qu'il obtient, signalons la suivante :

La surface applicable sur une surface à courbure moyenne constante avec correspondance des lignes de courbure est une nouvelle surface à courbure moyenne constante ayant mêmes rayons de courbure principaux. Les surfaces à courbure moyenne constante, que le théorème de M. O. Bonnet fait dériver d'une telle surface, s'associent donc par couples se correspondant par leurs lignes de courbure.

Poincaré. — Sur la théorie des oscillations hertziennes. (515-519).

Soient f, g, h; α, β, γ; F, G, H; u, v, w; p, q, r; φ, ρ (notations de Maxwell) les

composantes du déplacement électrique, de la force magn tique, du potentiel vecteur, du courant total, du courant de conduction, le potentiel électrostatique et la densité électrique.

On suppose que le champ ne soit occupé que par des conducteurs et par un diélectrique unique de pouvoir inducteur K, et que ces milieux ne soient pas magnétiques. Posant

$$\frac{\partial p_0}{\partial t} = p, \qquad \frac{\partial q_0}{\partial t} = q, \qquad \frac{\partial r_0}{\partial t} = r, \qquad \frac{\partial p_0}{\partial x} + \frac{\partial q_0}{\partial y} + \frac{\partial r_0}{\partial z} = -\rho,$$

on a d'abord dans tout l'espace

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{\partial F}{\partial x} + \dfrac{\partial G}{\partial y} + \dfrac{\partial H}{\partial z} = 0, & \Delta F = -4\pi u, \quad \ldots, \\ \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} + \dfrac{\partial w}{\partial z} = 0, & u = \dfrac{\partial (f + p_0)}{\partial t}, \quad \ldots, \\ \dfrac{\partial p_0}{\partial x} + \dfrac{\partial q_0}{\partial y} + \dfrac{\partial r_0}{\partial z} + \rho = 0, & K\Delta\varphi = -4\pi\rho. \end{array} \right.$$

On a dans le diélectrique

$$(2) \qquad \frac{4\pi f}{K} = -\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \qquad \ldots.$$

Eu égard à la rapidité des oscillations hertziennes, la couche superficielle est le siège de courants de conduction très intenses par rapport aux courants de déplacement; de sorte que pour cette couche (où l'on peut attribuer à f une valeur quelconque) l'équation (2) est encore valable.

Dans la région intérieure, il n'y a pas de courant sensible, en sorte que l'équation (2) est encore satisfaite.

Il y a intérêt à exprimer toutes les quantités en fonction des courants de conduction p, q, r dont il est plus facile de se faire une idée.

Soient p', q', r' les valeurs de p_0, q_0, r_0 en un point x', y', z' de la couche superficielle dont un élément sera désigné par dt'; p'', q'', r'' ce que deviennent ces valeurs quand on y remplace t par $t - R\sqrt{K}$, R désignant la distance du point (x', y', z') à un point quelconque (x, y, z) de l'espace.

Si l'on pose

$$X = \int \frac{p''}{R}\,dt', \qquad Y = \int \frac{q''}{R}\,dt', \qquad Z = \int \frac{r''}{R}\,dt', \qquad X_1 = \int \frac{p'' - p'}{R}\,dt' \quad \ldots,$$

$$\Theta = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z}, \qquad \Theta_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x} + \frac{\partial Y_1}{\partial y} + \frac{\partial Z_1}{\partial z},$$

on vérifiera aisément les équations

$$\Delta X = K\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} - 4\pi\rho_0, \qquad \Delta X_1 = K\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}, \qquad \ldots,$$

$$\Delta\Theta = K\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2} + 4\pi\rho, \qquad \Delta\Theta_1 = K\frac{\partial^2 \Theta}{\partial t^2}, \qquad \Theta = \Theta_1 - K\varphi,$$

puis on démontre qu'on satisfait aux équations (1) et (2) en posant

$$(3)\quad \begin{cases} K\dfrac{\partial F}{\partial t} = K\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \dfrac{\partial \Theta_1}{\partial x} = \Delta X + 4\pi p_0 - \dfrac{\partial \Theta_1}{\partial x}, & \ldots, \\ -4\pi f = K\dfrac{\partial F}{\partial t} + K\dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = K\dfrac{\partial^2 X}{\partial t^2} - \dfrac{\partial \Theta}{\partial x} = \Delta X + 4\pi p_0 - \dfrac{\partial \Theta_1}{\partial x}, & \ldots, \end{cases}$$

ce qui donne la solution du problème.

Dans le diélectrique, les formules se simplifient parce que p_0 est nul; en outre, les composantes de la force magnétique y ont pour valeurs

$$\alpha = \frac{\partial^2 Z}{\partial y\,\partial t} - \frac{\partial^2 Y}{\partial z\,\partial t}, \qquad \ldots.$$

Examinant ensuite le cas des oscillations périodiques avec amortissement, M. Poincaré montre que le problème peut se présenter sous un double aspect (comme le problème de la distribution électrique) :

On peut se proposer de satisfaire aux équations (1) et (2) *dans le diélectrique* de telle sorte que les lignes de force aboutissent normalement aux conducteurs; ou bien on peut se proposer de déterminer les courants superficiels de conduction p, q, r de telle sorte que, *à l'intérieur du conducteur*,

$$X\,dx + Y\,dy + Z\,dz$$

soit une différentielle exacte.

Autonne. — Sur les intégrales algébriques de l'équation différentielle du premier ordre. (632-635).

L'intégrale algébrique G de degré n et de genre p supposée dépourvue de points multiples (*voir* pour les définitions une Note de M. Autonne, *Comptes rendus,* 16 mars 1891) est définie en coordonnées homogènes x_1, x_2, x_3, z par les deux équations

$$(1)\qquad f(x_1, x_2, x_3) = 0,$$

$$(2)\qquad z = \frac{x_2\theta_1 - x_1\theta_2}{f_3},$$

où $f = 0$ est une courbe plane g de degré n et de genre p et θ_1, θ_2, θ_3 trois formes ternaires en x_1, x_2, x_3 de degré $n-1$ satisfaisant aux identités

$$\left(f_i = \frac{\partial f}{\partial x_i},\ \theta_{ij} = \frac{\partial \theta_i}{\partial x_j}\right) \qquad (i, j = 1, 2, 3),$$

$$(3)\qquad \Sigma_i f_i \theta_i = 0,$$

$$(4)\qquad \theta_3 + f_3 = x_3(\theta_{11} + \theta_{22} + \theta_{23}).$$

G dépend de $2n+1-p$ arbitraires et présente $6p + 2(n-3)$ points d'inflexion. Entre les coefficients de $f(x)$ existent $n + 2p$ relations dont n expriment que n points d'inflexion de g sont à l'infini.

Les identités (3) et (4) sont aussi les conditions nécessaires et suffisantes

pour que l'intégrale abélienne, attachée à la courbe g,

$$\int \frac{x_2\,dx_1 - x_1\,dxz}{x_3^2},$$

soit une fonction rationnelle.

M. Autonne montre comment la théorie des connexes permet de ramener à un problème de Géométrie plane la construction de l'intégrale G et de sa projection g.

Passant aux propriétés des intégrantes tracées sur une surface algébrique $F(z_1, z_2, z_3, z_4) = 0$ de degré n, l'auteur obtient des résultats analogues à ceux qu'a trouvés M. Poincaré dans ses recherches sur l'équation du premier ordre et du premier degré.

Par un point quelconque de F passe une intégrante et une seule, sauf pour les points nodaux définis par les équations

$$\frac{1}{z_2}\frac{\partial F}{\partial z_1} = \frac{1}{-z_1}\frac{\partial F}{\partial z_2} = \frac{1}{-z_4}\frac{\partial F}{\partial z_3} = \frac{1}{z_3}\frac{\partial F}{\partial z_4}.$$

Aux abords d'un point nodal les intégrantes se comportent comme les courbes planes $\eta\xi^{-k} = \text{const.}$, les directions $\xi = 0$, $\eta = 0$ correspondant aux asymptotes de l'indicatrice en z.

Si toutes les intégrantes sont algébriques (intégrale générale algébrique), tous les exposants k sont réels et commensurables. Si k est positif, le point nodal est un nœud; si k est négatif, c'est un col.

Une intégrale algébrique G ne peut avoir de point multiple qu'en un point nodal. L'intégrante algébrique générale Γ ne passe par aucun col. Donc, si F n'a que des cols, Γ est dépourvue de points multiples et c'est à ce cas que s'appliquent les considérations qui précèdent.

Lelieuvre. — Sur les surfaces à génératrices rationnelles. (635-637).

Dans des Communications antérieures, M. Lelieuvre a déterminé certaines classes de surfaces à génératrices rationnelles telles que des lignes tracées sur la surface (par exemple, les conjuguées des génératrices) soient définies par une équation de Riccati.

Actuellement il indique une méthode qui permet de traiter des problèmes plus compliqués, comme la recherche des surfaces telles que les intégrales générales des équations différentielles du premier ordre et du second degré dont dépendent les lignes tracées sur elles (par exemple, les asymptotiques, les lignes de courbure, etc.) aient leurs points critiques fixes.

Cette méthode permet de retourner et de relier entre eux beaucoup de résultats connus; elle en fournit de nouveaux, entre autres ceux-ci :

1° Les lignes asymptotiques des surfaces engendrées par une conique qui reste tangente à une droite et à quatre plans tangents fixes s'obtiennent par quadratures.

2° Il en est de même de celles des surfaces engendrées par une cubique gauche ayant quatre points ou une tangente fixe, ou quatre points et deux plans osculateurs fixes, ou quatre points fixes et une enveloppe plane dont le plan reste constamment osculateur à la cubique.

3° Les seules surfaces cerclées pour lesquelles les points critiques de l'intégrale de l'équation des lignes de courbure puissent être fixes sont celles qui admettent une enveloppe de leurs génératrices circulaires ou sur lesquelles sont tracées deux lignes telles que chacune soit une ligne d'ombilics ou une ligne de courbure double $1 + p^2 + q^2 = 0$.

Picard. — Sur la recherche du nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées. (669-672).

M. Picard lève la difficulté principale qui dans cette question provient du changement de signe possible pour le déterminant des fonctions formant les premiers membres des équations. Il montre qu'on peut représenter par une intégrale multiple d'ordre n le nombre des racines communes à n équations à n inconnues et contenues dans un certain domaine de l'espace à n dimensions.

Quand les équations sont au nombre de deux

$$f(x, y) = 0,$$
$$\varphi(x, y) = 0,$$

le nombre de leurs racines communes à l'intérieur d'un contour C est égal à la somme de deux intégrales

$$\int_C P\,dx + Q\,dy + \frac{\varepsilon}{2\pi}\iint \frac{R\,dx\,dy}{(f^2 + \varphi^2 + \varepsilon^2 D^2)^{\frac{3}{2}}},$$

où l'on a posé

$$D = f'_x \varphi'_y - f'_y \varphi'_x,$$

$$P = \frac{1}{2\pi}\,\frac{f\varphi'_x - \varphi f'_x}{f^2 + \varphi^2}\,\frac{\varepsilon D}{(f^2 + \varphi^2 + \varepsilon^2 D^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$Q = \frac{1}{2\pi}\,\frac{f\varphi'_y - \varphi f'_y}{f^2 + \varphi^2}\,\frac{\varepsilon D}{(f^2 + \varphi^2 + \varepsilon^2 D^2)^{\frac{1}{2}}},$$

$$R = \begin{vmatrix} f & f'_x & f'_y \\ \varphi & \varphi'_x & \varphi'_y \\ D & D'_x & D'_y \end{vmatrix}.$$

L'auteur appelle l'attention sur les deux cas limites où le nombre arbitraire ε est égal à o ou à l'infini.

Markoff. — Sur les équations différentielles. (685-688).

Étant donnée l'équation différentielle linéaire

$$X_0 \frac{d^n y}{dx^n} + X_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + X_n y = 0,$$

où les coefficients $X_0, \ldots, X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sont des fonctions entières de x, on sait trouver toutes les intégrales rationnelles, ou bien l'on sait démontrer que y ne peut être une fonction rationnelle de x.

Cette méthode est fondée sur la décomposition d'une fraction rationnelle en éléments simples.

M. Markoff remarque que la même méthode peut servir à trouver toutes les

intégrales dont les dérivées logarithmiques sont fonctions rationnelles de x, ou bien à montrer que ces dérivées logarithmiques ne peuvent être des fonctions rationnelles.

Painlevé. — Remarque sur une Communication de M. Markoff, relative à des équations différentielles linéaires. (739-740).

A propos du problème traité dans la récente Communication de M. Markoff, M. Painlevé fait observer qu'il a entièrement résolu un problème plus général.

« Étant donnée une équation linéaire d'ordre n à coefficients quelconques (rationnels, algébriques ou même transcendants), trouver toutes les intégrales dont la dérivée logarithmique $\frac{y'}{y}$ soit une fonction algébrique à p valeurs (p étant donné) ».

En considérant l'équation d'ordre $n-1$ en $\frac{y'}{y}=u$, M. Painlevé est parvenu à ce théorème :

« Étant donnée une équation linéaire à coefficients quelconques, on trouve algébriquement toutes les intégrales algébriques y; ou bien on en ramène la recherche à une quadrature $\frac{z'}{z}=h(x)$, où z doit être algébrique. »

Le même théorème subsiste relativement aux intégrales algébriques de l'équation en $\frac{y'}{y}=u$.

Markoff. — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (790-791).

M. Fabry a posé et résolu la question suivante :

« Étant donnée une équation différentielle linéaire d'ordre m_2 dont les coefficients sont des fonctions rationnelles de x, trouver une équation d'ordre n et de même forme, dont toutes les intégrales vérifient la proposée et chercher dans quel cas le problème est possible ».

M. Markoff montre que cette question se ramène à une autre plus simple :

« Trouver parmi les intégrales d'une équation différentielle linéaire, à coefficients rationnels, celles dont les dérivées logarithmiques sont rationnelles, et, parmi les intégrales de certaines autres équations différentielles linéaires, les intégrales rationnelles ».

Poincaré. — Sur la distribution des nombres premiers. (819).

1° La somme des logarithmes des nombres premiers de la forme $4n+1$ supérieurs à x est une infinité de fois plus petite que $\frac{ax}{2}$ si $a>1$, et une infinité de fois plus grande que $\frac{ax}{2}$ si $a<1$;

2° Le nombre des nombres premiers de la forme $4n+1$ inférieurs à x est une infinité de fois plus petit que $\frac{ax}{2\log x}$ si $a>1$, et une infinité de fois plus grand que $\frac{ax}{2\log x}$, si $a<1$.

Liouville (*R.*). — Sur les intégrales du second degré dans les problèmes de Dynamique. (838-841).

Soient $x_1, x_2, \ldots, x_n$ les coordonnées cartésiennes d'un système de points libres soumis à des forces dérivant d'un potentiel $u + h$.

Dans le cas où ce potentiel est de la forme

$$(1) \qquad u + h = f(\rho) + \frac{1}{\rho} F\left(\frac{x_2}{x_1}, \frac{x_3}{x_1}, \ldots, \frac{x_m}{x_1}\right),$$

où $\rho = \Sigma x_i^2$, il y a, quelles que soient les fonctions arbitraires f et F, une integrale du second degré qui diffère de celle des forces vives et qui est la suivante :

$$(u + h)^2 \left[d\rho^2 - \frac{4\rho f(\rho)}{u + h} \Sigma\, dx_i^2 \right] = 4C\, dt^2.$$

La fonction F peut être choisie de telle manière qu'il y ait au moins une troisième intégrale quadratique. Il faut, pour cela, que F vérifie une certaine équation aux dérivées partielles du second ordre.

La formule (1) ne fournit d'ailleurs qu'une solution particulière du problème proposé; mais l'auteur apprend à reconnaître tous les cas où les équations du mouvement admettent, avec l'intégrale des forces vives, une autre intégrale du second degré.

Quand il y a seulement deux variables, les cas où cela a lieu sont aussi ceux où le problème de M. Dini est résoluble. Quand le nombre des coordonnées est supérieur à 2, on peut (sans d'ailleurs se borner aux formes quadratiques qui correspondent à un système de points libres) imaginer un problème analogue à celui de M. Dini, et qui dépend d'équations qu'on peut rendre linéaires par un choix convenable des inconnues.

Petot. — Sur une classe de congruences de droites. (841-844).

La détermination des congruences données par leur représentation sphérique (u, v) se ramène, comme on sait, à l'intégration d'une équation de Laplace.

Quand le système (u, v) est la représentation sphérique σ des lignes asymptotiques d'une surface, M. Guichard a montré que les développables des congruences H correspondantes découpent un réseau conjugué sur leurs surfaces centrales, et réciproquement.

Sans passer par la détermination des systèmes σ qui est difficile, M. Petot cherche à déterminer directement les congruences H; il fait voir que, pour cela, on a seulement à intégrer des équations de Laplace d'une forme toute particulière. De là résulte une méthode pour obtenir des surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques.

Kronecker. — Sur le nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées. (1006-1012).

Picard. — Du nombre des racines communes à plusieurs équations simultanées. (1012-1013).

La formule fondamentale de M. Kronecker exprime au moyen d'une intégrale multiple d'ordre $n-1$ étendue à la *surface* d'un domaine de l'espace à n dimensions la différence entre le nombre des racines communes à n équations

$$f_i = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

pour lesquelles le déterminant fonctionnel D des fonctions f_i est positif et celles pour lesquelles il est négatif.

Si donc on veut avoir le nombre exact de racines compris dans le domaine, il suffira de le partager, au moyen de l'équation $D = 0$, en plusieurs autres où le déterminant garde un signe invariable. C'est en définitive ce que fait M. Kronecker. Mais cette méthode exige des discussions spéciales relativement au système particulier des équations $f = 0$, tandis que M. Picard, en considérant $n+1$ équations convenables (au lieu de n), obtient une formule où la recherche du nombre des racines est ramenée au calcul d'intégrales définies ne dépendant que du domaine Δ.

Kœnigs. — Sur les systèmes conjugués à invariants égaux. (1022-1024).

Étant données une surface S et une congruence, le lieu des points conjugués harmoniques de ceux de S par rapport aux foyers de chaque droite de la congruence est une surface S′ que M. Kœnigs appelle la *conjuguée ponctuelle* de S.

Lorsque les développables de la congruence tracent sur S un réseau conjugué, peuvent-elles en tracer un sur la conjuguée ponctuelle S′? Il faut et il suffit pour cela que les invariants de l'équation (E) attachée au premier réseau soient égaux.

Les congruences H étudiées par M. Guichard et plus récemment par M. Petot sont un cas particulier de celles qui possèdent la propriété de déterminer par leurs développables un réseau conjugué à invariants égaux sur une surface S convenable et par suite sur la surface S′ conjuguée de la première.

Une congruence ne possède pas en général un pareil couple de surfaces. Lorsqu'elle en possède un, elle n'en possède généralement pas d'autre. Lorsqu'elle en possède deux, l'intégration de l'équation $E(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ permet de former la représentation générale de la congruence. Enfin, lorsqu'une congruence possède trois couples de surfaces conjuguées ponctuelles sur lesquelles elle trace par ses développables un réseau conjugué, elle admet une infinité de couples analogues.

Markoff. — Sur la théorie des équations différentielles linéaires. (1024-1025).

Bougaief. — Complément à un problème d'Abel. (1025-1028).

Il s'agit des cas où l'intégrale elliptique

$$\int \frac{(x+A)\,dx}{\sqrt{R}}$$

peut être réduite à la forme logarithmique

$$\frac{1}{m}\log\frac{p+q\sqrt{R}}{p-q\sqrt{R}},$$

p et q étant des polynômes premiers entre eux.

BULLETIN DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE.

Tome XIX; 1891 (1).

Kobb. — Sur les surfaces développables. (1-3).

M. Picard a fait connaître une méthode pour reconnaître si une équation linéaire du second ordre aux dérivées partielles peut avoir une infinité d'intégrales régulières passant par un contour donné.

L'emploi de cette méthode peut être étendu, avec quelques restrictions, aux équations non linéaires. M. Kobb l'applique à l'équation des surfaces développables

$$rt - s^2 = 0.$$

Il montre qu'il ne peut pas exister deux intégrales régulières et infiniment voisines de cette équation qui passent par le même contour fermé C.

En d'autres termes, par un contour fermé C il ne passe jamais deux surfaces développables qui n'aient pas de points singuliers et qui soient infiniment voisines l'une de l'autre.

Laisant. — Propriété géométrique des coefficients du binôme. (4-5).

Pellet. — Sur la rectification approximative d'un arc de courbe. (5-8).

Si, sur la tangente en un point M d'une courbe, on prend des longueurs égales de part et d'autre du point M, ML, ML', puis sur la normale en M et du côté du centre de courbure une longueur égale au triple du rayon de courbure MC; qu'on joigne CL et CL'; qu'on désigne par P, P' les points de rencontre de ces deux droites avec la courbe, la différence de l'arc PP' et de la ligne LL' sera un infiniment petit du cinquième ordre.

Laisant. — Détermination directe de l'intégrale.

$$\int \cos^p mx \cos^{p'} m'x \ldots \sin^q nx \sin^{q'} n'x\, dx.$$

(8-11).

(1) Voir *Bulletin*, XVII, p. 5.

Caspary. — Sur les fonctions sphériques. (11-18).

En généralisant la formule de M. Beltrami

$$(x^2-1)\frac{dP_n}{dx} = \frac{n(n+1)}{2n+1}(P_{n+1}-P_{n-1}),$$

M. Hermite a établi la relation (*Journal de Kronecker,* t. CVII, p. 80)

$$(x^2-1)^\nu \frac{d^\nu P_n}{dx^\nu} = AP_{n+\nu} + A_1 P_{n+\nu-1} + \ldots + A_\nu P_{n-\nu},$$

et exprimé, au moyen d'une formule de Jacobi, les coefficients A, A_1, ... sous forme d'intégrales définies.

M. Caspary généralise les formules de Jacobi, de M. Beltrami et de M. Hermite, déduit les valeurs numériques des coefficients A, et établit d'une manière élémentaire quelques autres formules qui intéressent la théorie des fonctions sphériques.

Laisant. — Tétraèdre arithmétique. (18-23).

D'Ocagne. — Sur la liaison entre les expressions du rayon de courbure en coordonnées ponctuelles et en coordonnées tangentielles. (26-29).

L'auteur donne diverses expressions du rayon de courbure : en coordonnées pluckériennes, en coordonnées parallèles tangentielles, en coordonnées parallèles ponctuelles.

Il en déduit ce théorème :

« Si les tangentes menées d'un point quelconque à une courbe algébrique de la classe n ont pour longueurs $t_1, t_2, \ldots, t_n$, et si $R_1, R_2, \ldots, R_n$ sont les rayons de courbure aux points de contact, on a

$$\frac{R_1}{t_1^3} + \frac{R_2}{t_2^3} + \ldots + \frac{R_n}{t_n^3} = 0.$$

Laisant. — Sur l'extension de la Géométrie cartésienne aux figures imaginaires. (29-30).

Le principe de cette *Géométrie génerale* est la conception du point double (M, M') formé par le *couple* de deux points ordinaires M, M' pris dans un ordre déterminé; M et M' sont dits les *composantes positive* et *négative* du point (M, M') qui devient réel quand les deux composantes coïncident.

On démontre que les formules ordinaires de transformation de coordonnées s'appliquent identiquement aux points doubles de la Géométrie générale à deux dimensions.

Il est possible d'établir, avec ces notations, un lien de plus entre l'Analyse et la Géométrie par le Calcul des équipollences.

Beghin. — Sur l'impossibilité d'une fonction d'une seule variable à plus de deux périodes. (31).

D'Ocagne. — Sur une détermination particulière du centre de courbure des lignes planes. Application aux courbes algébriques d'ordre quelconque. (31-34).

Soient M un point d'une courbe; N le pied de la normale; θ l'angle de cette normale avec l'axe Ox; Ω le centre de courbure; si l'on pose

$$P = x^2 + y^2,$$

on a

$$\frac{1}{2}\frac{d^2P}{dx^2} = \frac{\Omega N}{\Omega M}\frac{1}{\sin^2\theta}.$$

Cette formule fait connaître le centre de courbure lorsque la courbe est définie par son équation en P et en x.

Appliquée à une conique, elle conduit immédiatement à la construction du centre de courbure due à M. Mannheim.

Appliquée à une courbe algébrique quelconque, elle donne ce théorème :

« Si une droite quelconque coupe une courbe algébrique d'ordre m aux points $M_1, M_2, \ldots, M_m$ sous les angles $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ et ses m asymptotes sous les angles $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$; si une perpendiculaire quelconque à la première droite rencontre les normales correspondantes aux points $N_1, N_2, \ldots, N_m$; et si $\Omega_1, \Omega_2, \ldots, \Omega_m$ sont les centres de courbure correspondants, on a

$$\sum_{i=1}^{i=m}\frac{\Omega_i N_i}{\Omega_i M_i}\frac{1}{\sin^2\theta_i} = \sum_{i=1}^{i=m}\frac{1}{\sin^2\alpha_i}\text{ ».}$$

Le second membre de cette formule est nul, si la courbe est *isotropique.*

Raffy. — Détermination de toutes les surfaces moulures applicables sur des surfaces de révolution. (34-37).

Pour qu'une surface soit applicable sur une surface de révolution, il faut et il suffit que l'équation aux géodésiques de cette surface admette une intégrale linéaire et homogène.

C'est là un théorème de M. Massieu que M. Raffy applique aux moulures, dont l'élément linéaire est

$$ds^2 = du^2 + (U - V)^2 dv^2.$$

L'auteur trouve que toutes les moulures applicables sur des surfaces de révolution sont fournies par la formule

$$U - V = e^{au} - \frac{b}{v}.$$

Ce sont les moulures déjà obtenues par M. Dini, comme solution d'un problème moins général.

D'Ocagne. — Sur les substitutions linéaires d'une seule variable à coefficients périodiques. (37-39).

Si l'on répète indéfiniment la même substitution linéaire

$$x_1 = \frac{ax+b}{cx+d}, \qquad x_2 = \frac{ax_1+b}{cx_1+d}, \qquad \ldots, \qquad x_n = \frac{ax_{n-1}+b}{cx_{n-1}+d},$$

on a

$$x_n = \frac{A_n x + B_n}{C_n x + D_n}.$$

M. d'Ocagne donne une solution directe du problème qui consiste à déterminer A_n, B_n, C_n, D_n.

Si l'on pose

$$a+d=\lambda, \qquad bc-ad=\mu, \qquad u_n = \sum_{i=0}^{i=E\left[\frac{n-1}{2}\right]} C_{n-(i+1)}^{i} \lambda^{n-(2i+1)} \mu^i,$$

on a les formules

$$A_n = au_n + \mu u_{n-1}, \qquad B_n = bu_n,$$
$$C_n = cu_n, \qquad D_n = du_n + \mu u_{n-1}.$$

Si, au lieu d'être constants, les coefficients des substitutions se reproduisent périodiquement, les quantités A, B, C, D sont données par des formules récurrentes de la forme

$$u_{nk+i} = LU_{(n-1)k+i} + MU_{(n-2)k+i},$$

L et M étant des quantités dont M. d'Ocagne enseigne à former l'expression.

La loi de récurrence est la même pour les coefficients A, B, C, D, pris de k en k à partir de l'un quelconque des termes de la première période : c'est ce qui résulte des expressions de L et de M.

Bioche. — Remarques sur les lignes asymptotiques des surfaces réglées, dont les génératrices appartiennent à une congruence linéaire (39-42).

Si une surface réglée admet deux directrices rectilignes, elle se déduit par homographie d'un conoïde. La classe de ses asymptotiques et leur ordre s'expriment par le même nombre. Si p et q sont les degrés de multiplicité des deux directrices, d étant le nombre des génératrices doubles, le degré de la surface est $p+q$; le degré et la classe des asymptotiques sont égaux à $2(pq-d)$. Ce résultat met en défaut une assertion de Halphen d'après laquelle la classe des asymptotiques est égale à six fois l'excès de leur degré sur celui de la surface.

Les surfaces gauches dont les génératrices font partie d'une congruence linéaire singulière ont pour équation

$$zx - my = F\left(\frac{y}{x}\right).$$

Leurs asymptotiques sont les courbes les plus générales qui admettent un axe anharmonique, c'est-à-dire telles que les points où une droite D est rencontrée par les plans osculateurs menés en quatre points quelconques ont même rapport anharmonique que les plans passant par D et par ces points.

Bioche. — Sur les surfaces gauches dont les lignes de courbure possèdent une propriété donnée. (42-44).

L'auteur appelle *surfaces* Σ les surfaces réglées dont le paramètre de distribution est constant et dont la ligne de striction est ligne de courbure. Il montre que si un système de lignes de courbure d'une surface réglée possède une propriété exprimable par une équation différentielle du premier ordre en r (distance d'un point d'une génératrice à son point central), la surface est une surface Σ, à moins que cette équation ne se réduise à une identité. De là résulte le théorème suivant : « Les seules surfaces dont un système de lignes de courbure soit composé de trajectoires sont la surface gauche de révolution et l'hélicoïde minimum ».

Laisant. — Remarque sur l'interpolation (44-46).

Toute formule d'interpolation où figurent les valeurs u_1, u_2, ... de la fonction cherchée peut être remplacée par une autre où figure une fonction arbitraire et sa fonction inverse.

Vicaire. — Sur les sections circulaires du tore. (46-48).

Démonstration géométrique du théorème d'Yvon Villarceau : « Les plans bitangents au tore donnent des sections circulaires ».

Pellet. — Sur la réduction des fonctions entières algébriques. (48-52).

Le degré de l'équation résolvante d'une équation à coefficients entiers est un multiple des degrés des divers facteurs irréductibles en lesquels se décompose le premier membre de l'équation suivant un module premier quelconque.

Dans la décomposition d'une fonction entière en facteurs irréductibles suivant un module premier, on pourra se servir utilement de la proposition suivante, où l'on entend par *équation abélienne* une équation irréductible dont toutes les racines sont représentées par x, $\theta(x)$, $\theta^2(x)$, ..., $\theta^{m-1}(x)$, x étant l'une d'elles, θ une fonction rationnelle, m le degré de l'équation.

« Le produit Δ des carrés des différences d'une équation abélienne $f(x)=0$ de degré m est un carré parfait si m est impair et alors seulement. »

Laisant. — Quelques formules relatives aux fonctions hyperboliques. (52-54).

Raffy. — Sur les surfaces moulures dont les lignes d'égale courbure sont parallèles. (54-57).

Généralisant un résultat qu'il a précédemment obtenu (même volume, p. 34), l'auteur montre que toute surface moulure, dont les lignes d'égale courbure sont parallèles, a pour élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + \left(e^{au} - \frac{b}{c}\right)^2 dv^2.$$

Ces moulures sont celles que M. Dini a trouvées en cherchant toutes les moulures qui s'appliquent sur des surfaces de révolution, de telle manière que leurs profils viennent coïncider avec des géodésiques sur lesquelles des arcs égaux soient interceptés par des courbes dont chacune coupe ces géodésiques sous le même angle. Ainsi toute moulure à lignes d'égale courbure parallèles est applicable sur une surface de révolution.

Fouret. — Sur les congruences de droites du premier ordre et de la première classe. (58-61).

On appelle congruence du premier ordre et de la première classe un ensemble de droites en nombre doublement infini, telles qu'il y en ait une seule passant par un point arbitraire et une seule contenue dans un plan arbitraire. On sait que les droites d'une telle congruence rencontrent deux mêmes droites non situées dans un même plan. L'auteur démontre à nouveau ce théorème et en déduit celui de Schönemann : « Les normales aux surfaces trajectoires des points d'un solide invariable, pour chaque position de ce solide, s'appuient sur deux mêmes droites ».

Picard. — Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires. (61-64).

Méthode nouvelle pour établir très simplement, par voie d'approximations successives, l'existence des intégrales sous le bénéfice d'hypothèse d'une grande généralité.

Raffy. — Sur la déformation des surfaces spirales. (65-68).

Étant donné un élément linéaire, exprimé au moyen de variables quelconques, reconnaître s'il existe des spirales admettant cet élément linénire.

Tel est le problème dont M. Raffy communique une solution qui n'exige que le calcul de certains paramètres différentiels. La règle obtenue conduit à étudier les spirales applicables sur des surfaces de révolution et les spirales plus générales dont les lignes d'égale courbure sont parallèles. L'élément linéaire des premières peut s'écrire

$$ds^2 = (x+y)^n\, dx\, dy,$$

l'exposant n étant arbitraire. C'est le résultat obtenu par M. Lie comme solution de ce problème : « Trouver les éléments linéaires de toutes les surfaces dont les lignes géodésiques admettent plusieurs transformations infinitésimales conformes ».

Pour déterminer l'élément linéaire d'une spirale

$$ds^2 = e^{-i(x-y)} e^{\int T(x+y)\,d(x+y)}\, dx\, dy,$$

par la condition que les lignes d'égale courbure soient parallèles, on est ramené à une équation du second ordre

$$\frac{1}{T'}\left[\left(\frac{T''}{T'} - T\right)^2 + 1\right] = \text{const.} = 2a.$$

Cette équation peut être intégrée par différentiation et la détermination de T

est ramenée aux quadratures. L'intégrale particulière

$$T = \frac{1}{q} \operatorname{tang} \frac{(q+1)(x+y)}{2q}, \qquad \frac{q'}{q+1} = a$$

donne l'élément linéaire des spirales applicables sur les surfaces de révolution.

Appell. — Sur des potentiels conjugués. (68-70).

L'auteur appelle *potentiels conjugués* des fonctions X, Y, Z, T, de quatre variables réelles x, y, z, t, qui vérifient les équations

$$\frac{\partial T}{\partial x} - \frac{\partial Y}{\partial z} + \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} - \frac{\partial Z}{\partial x} + \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Y}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial T}{\partial z} - \frac{\partial X}{\partial y} + \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial Z}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z} + \frac{\partial T}{\partial t} = 0,$$

Chacune de ces fonctions vérifie l'équation

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = 0,$$

analogue à l'équation potentielle. On peut d'ailleurs supposer que les fonctions X, Y, Z, T ne dépendent que des trois variables x, y, z.

Genty. — Mémoire sur les surfaces gauches rationnelles. (70-93).

Lucas (*F.*). Sur les fonctions d'une variable imaginaire. (93-96).

Appell. — Remarques sur les courbes brachistochrones (97-98).

Si l'on appelle *courbes* C les courbes joignant deux points fixes A et B et rendant minima une intégrale

$$I = \int_B^A \varphi(x, y, z)\, ds,$$

on sait que quand on passe d'une courbe C à une courbe analogue C_1 infiniment voisine, d'extrémités A_1 et B_1, l'intégrale I éprouve une variation

$$-AA_1 \varphi(A) \cos BAA_1 - BB_1 \varphi(B) \cos ABB_1,$$

$\varphi(A)$ et $\varphi(B)$ désignant les valeurs de la fonction φ aux points A et B (théorème de Tait et Thomson). L'auteur indique diverses applications que l'on peut faire de ce théorème en l'interprétant à l'aide des courbes brachistochrones.

Guimaraës. — Sur une équerre cycloïdale propre à effectuer la rectification des arcs de cercle. (98-99).

Lucas (*F.*). — Sur les fonctions d'une variable imaginaire. (99-102).

Appell. — Sur le mouvement d'un point en coordonnées elliptiques. (102-103).

Nouveau cas où les équations du mouvement d'un point libre s'intègrent par quadratures : c'est celui où il existe une fonction de forces de la forme

$$U = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & U_1 \\ 1 & \lambda_2 & U_2 \\ 1 & \lambda_3 & U_3 \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 \\ 1 & \lambda_3 & \lambda_3^2 \end{vmatrix},$$

chacune des trois fonctions U_i ne dépendant que de la variable λ_i quand on désigne par λ_1, λ_2, λ_3 les coordonnées elliptiques. M. Appell signale comme un problème intéressant la recherche des fonctions U de la forme ci-dessus qui vérifient l'équation potentielle.

Ocagne (*M. d'*). — Sur la construction des cubiques cuspidales (unicursales de la troisième classe). (103-104).

Si l'on donne les points d'inflexion I et de rebroussement R, ainsi que les tangentes IT et RT en ces points, il suffit d'un point simple A pour déterminer complètement la courbe. Voici sa génération ponctuelle : Soit RQ la conjuguée harmonique de RP par rapport à RT et à RI ; on mène par le point T une droite quelconque qui coupe RP en A, RQ en B, IP en G et l'on prend le conjugué harmonique D et C par rapport à A et B. Le point de rencontre M des droites RC et ID engendre la cubique.

Laisant. — Sur deux problèmes de permutations. (105-108).

Godefroy. — Relation entre les rayons de courbure des développées des courbes réciproques. (109-113).

Presle (*de*). — Développement du quotient de deux fonctions holomorphes ; théorie des séries récurrentes. (114-118).

Lucas (*F.*). — Note sur les intersections de trois quadriques. (118-119).

Bioche. — Sur une classe de surfaces gauches. (120).

Détermination des surfaces réglées dont les génératrices font partie d'un complexe linéaire et dont les asymptotiques se transforment les unes dans les autres par homographie. Ces surfaces se déduisent par homographie des surfaces à plan directeur. Si l'on ne suppose pas les points homologues situés sur une même génératrice, les surfaces se déduisent par homographie de la surface re-

présentée par les équations

$$y\cos\omega - x\sin\omega = ae^{m\omega}, \qquad z = be^{m\omega}.$$

Si l'on suppose les points homologues situés sur une même génératrice, les génératrices de chaque surface font partie d'une congruence linéaire. Les surfaces cherchées sont les transformées homographiques des conoïdes ou des surfaces dont l'équation peut s'écrire

$$ay = xz + F(z).$$

Laisant. — Note sur l'interpolation successive. (121-123).

L'inconvénient des formules classiques d'interpolation réside dans la longueur des calculs qu'elles exigent, et dont quelques-uns sont parfois inutiles. Le but de cette Note est d'indiquer un procédé qui permet d'abréger considérablement les opérations.

Bioche. — Sur les surfaces réglées qui passent par une courbe et coupent sous un angle constant la développable des tangentes. (124-125).

L'auteur considère celles de ces surfaces qui auraient tout le long de la courbe donnée (C) une courbure totale dont la valeur ne dépendrait que des coordonnées du pied de chaque génératrice sur la courbe. Il en énonce plusieurs propriétés dont voici l'une : Pour qu'une droite invariablement liée au trièdre d'une courbe (C) engendre une surface réglée dont la courbure totale soit constante le long de cette courbe, il faut et il suffit que la courbe (C) ait sa courbure et sa torsion liées par une relation linéaire à coefficients constants.

Appell. — Exemples de fonctions de plusieurs variables admettant un groupe de substitutions linéaires entières. (125-127).

Le plus simple de ces exemples est le suivant. On forme, avec des fonctions θ, une fonction méromorphe $f_n(x)$, doublement périodique de troisième espèce, vérifiant les deux relations

$$f_n(x+2\pi i) = f_n(x), \qquad f_n(x+2a) = e^{-nx} f_n(x),$$

où a désigne une constante et n un entier positif, négatif ou nul. La somme

$$\varphi(x, y) = \sum_n A_n e^{ny} f_n(x),$$

où les A_n désignent des constantes, définit une fonction φ vérifiant les relations

$$\varphi(x+2\pi i, y) = \varphi(x, y+2\pi i) = \varphi(x+2a, y+x) = \varphi(x, y)$$

et admettant par suite un groupe de substitutions linéaires entières.

Fouret. — Sur les points singuliers des équations différentielles à deux variables, du premier ordre et du premier degré. (128-132).

L'équation différentielle du premier ordre et du premier degré peut, comme on sait, se mettre sous la forme

$$\begin{vmatrix} L & M & N \\ x & y & z \\ dx & dy & dz \end{vmatrix} = 0,$$

où L, M, N sont des fonctions homogènes de x, y, z, du même degré d'homogénéité. Si ce degré est k, le nombre des points singuliers de l'équation est $k^2 + k + 1$. M. Fouret commence par exposer une démonstration simple de ce théorème. Il donne ensuite, dans le cas particulier $k = 2$, la construction de la tangente en un point quelconque M du plan à la courbe intégrale qui y passe, au moyen de sept points singuliers supposés connus et distincts : cette tangente est la droite qui joint le point M au neuvième point commun aux cubiques qui passent par M et par les sept points singuliers. En terminant, l'auteur fait voir que, si l'équation différentielle a plus de $mk + n$ points sur une courbe algébrique d'ordre m et de classe n, elle admet cette courbe comme intégrale particulière.

Lemoine. — Sur une transformation relative à la Géométrie du triangle. (133-135).

Lemoine. — Sur la transformation continue. (136-141).

Laisant. — Quelques remarques relatives aux fonctions réciproques. (142-144).

Catalan. — Sur quelques théorèmes d'Analyse et d'Arithmétique. (145-151).

Lucas (*F.*). — Sur les équations abstraites du fonctionnement des machines. (152-154).

Antomari. — Remarques sur l'intégration des équations aux dérivées partielles. (154-158).

Pour obtenir une intégrale complète d'une équation

$$(1) \qquad F(x, y, z, p, q) = 0,$$

il faut, si l'on suit la méthode de Lagrange et Charpit, trouver une fonction $\Phi(x, y, z, p, q)$ telle que des deux relations

$$F = 0, \qquad \Phi = a$$

on tire des expressions de p et q qui rendent intégrable l'équation

$$(2) \qquad dz = p\,dx + q\,dy.$$

La résolution des deux équations ci-dessus doit donc pouvoir être effectuée.

En vue de simplifier ce procédé, l'auteur suppose qu'on puisse, n'importe comment, remplacer l'équation (1) par deux autres

$$p = \varphi(x, y, z, \lambda), \qquad q = \psi(x, y, z, \lambda),$$

donnant explicitement p et q en fonction de x, y, z et d'un paramètre λ. On écrit alors la condition d'intégrabilité de (2); elle donne une équation aux dérivées partielles pour λ considéré comme fonction de x, y, z et le problème est résolu dès qu'on peut obtenir une solution λ dépendant d'une constante arbitraire. Si l'équation (1) ne contient pas z, on peut supposer λ indépendant de z, et l'on arrive à l'équation

$$\frac{\partial\psi}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial x} - \frac{\partial\varphi}{\partial\lambda}\frac{\partial\lambda}{\partial p} + \frac{\partial\psi}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial y} = 0.$$

L'auteur applique son procédé à deux exemples et retrouve les intégrales des deux équations

$$(k-1)pqz + kpy - qx = 0,$$
$$z(p^2+q^2) + 2px + 2qy - z = 0,$$

auquelles conduisent des questions de Géométrie.

Raffy. — Sur certaines surfaces dont les rayons de courbure sont liés par une relation. (158-169).

L'objet de cette Note est d'établir que toute surface applicable sur une surface de révolution, et dont les rayons de courbure principaux sont fonctions l'un de l'autre, est un hélicoïde. Il n'y a exception que si la relation donnée entre les rayons principaux exprime que la courbure totale est constante ou bien revêt une forme particulière que l'auteur définit.

SITZUNGSBERICHTE DER KÖNIGLICH PREUSSISCHEN AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN ZU BERLIN.

1er semestre 1890.

Fuchs (*L.*). — Sur la théorie des équations différentielles linéaires (*suite*). (21-38).

Cette Communication fait suite à celle dont il a été rendu compte dans le *Bulletin*, t. XVI, p. 160; 1892. En conservant les mêmes notations, séparant les parties réelles et les parties imaginaires des quantités x, a, b, c, d, f, et posant

$$x = x_1 + x_2 i, \qquad a = a_1 + a_2 i, \qquad b = b_1 + b_2 i,$$
$$c = c_1 + c_2 i, \qquad d = d_1 + d_2 i, \qquad f = f_1 + f_2 i,$$

$$\varphi_1 = a_1 f_1 + b_1^2 + c_1 d_1,$$
$$\varphi_2 = a_2 f_2 + b_2^2 + c_2 d_2,$$

on démontre d'abord que φ_1 et φ_2 sont des fonctions *univoques* réelles de x_1 et x_2; on démontre ensuite que ces deux fonctions φ_1 et φ_2 sont identiques; on les désignera par φ.

On peut toujours déterminer autour de chacun des points singuliers $x = k_1, k_2, k_3, k_4, \infty$, des environs en chacun des points desquels la valeur de la fonction φ est négative. D'autre part, la fonction φ ne peut changer de signe en traversant un point x non singulier qu'en ayant en ce point une valeur nulle, et comme l'on montre que la valeur de φ est différente de zéro pour tout point x non singulier, à condition que les quatre points k_1, k_2, k_3, k_4 soient finis et différents les uns des autres, on voit que la fonction φ ne peut jamais changer de signe dans un domaine ne contenant que des points non singuliers. Elle a donc *partout* une valeur *négative*, lorsque les quatre points singuliers k_1, k_2, k_3, k_4 sont finis et non confondus, ce que nous supposerons une fois pour toutes dans ce qui suit.

On a toujours

$$\varphi(a_1^2 + a_2^2) = (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2 - (a_1 d_2 - a_2 d_1)(a_1 c_2 - a_2 c_1);$$

donc en un point x non singulier, ni $(a_1 c_2 - a_2 c_1)$, ni $(a_1 d_2 - a_2 d_1)$ ne peuvent être nulles, sans quoi φ aurait en ce point x une valeur positive.

Autour de chacun des points singuliers, on peut déterminer des environs en chacun des points desquels $(a_1 d_2 - a_2 d_1)$ a une valeur positive; donc $(a_1 d_2 - a_2 d_1)$ n'étant jamais nulle en un point non singulier, $(a_1 d_2 - a_2 d_1)$ a, en tout point non singulier, une valeur positive.

Mais les valeurs des deux fonctions $(a_1 c_2 - a_2 c_1)$ et $(a_1 d_2 - a_2 d_1)$ sont toujours de signes contraires; donc, en tout point non singulier, la valeur de $(a_1 c_2 - a_2 c_1)$ est négative.

On montre ensuite, en désignant pour abréger par $\mathrm{I}(u)$ le coefficient réel w de i dans l'expression de u mise sous la forme $v + wi$, qu'en l'un des points $x = k_1, k_2, k_3, k_4$ et au point $x = \infty$, ou bien φ est nulle ou bien $\mathrm{I}\left(\frac{d}{a}\right)$ est nulle. De plus, ξ, η, ζ désignant toujours les quotients

$$\xi = \frac{b}{a}, \qquad \eta = \frac{c}{a}, \qquad \zeta = \frac{d}{a},$$

les valeurs des quantités réelles

$$\mathrm{I}(\eta), \quad \mathrm{I}(-\zeta), \quad \mathrm{I}(\xi)^2 - \mathrm{I}(\eta)\mathrm{I}(-\zeta)$$

sont négatives.

Les quantités $a_{11}, a_{12} = a_{21}, a_{22}$, introduites par Riemann dans son Mémoire sur les fonctions abéliennes, sont liées aux quantités ξ, η, ζ de M. Fuchs par les relations

$$a_{11} = \pi i \zeta, \qquad a_{12} = -\pi i \xi, \qquad a_{22} = -\pi i \eta.$$

Dans les notations de Riemann le dernier théorème de M. Fuchs s'énonce donc ainsi : *La partie réelle de la forme quadratique*

$$a_{11} m^2 + 2 a_{12} mn + a_{22} n^2,$$

où m, n sont des entiers réels, *est une forme définie dont la valeur est négative.*

Ce théorème important, démontré d'abord par Riemann en suivant une voie

toute différente, est ainsi déduit par M. Fuchs des propriétés des intégrales de certaines équations différentielles linéaires. C'est la même marche que celle suivie par M. Fuchs dans sa dernière Communication pour démontrer le théorème sur les relations entre les périodes dont il a été question.

Ceci posé, il est facile de voir que, si les *variables* x, k_1, k_2 décrivent des contours, en nombre infini, tels qu'une ou plusieurs des quantités ξ, η, ζ aient des valeurs indépendantes d'une ou de plusieurs de ces variables, on a la relation

$$I(\xi)^2 - I(\eta)I(-\zeta) = 0.$$

En se basant sur les trois derniers théorèmes et en suivant une voie toute semblable à celle qui a été suivie par M. Fuchs dans le t. 83 du *Journal de Crelle* pour les fonctions elliptiques modulaires, on démontre enfin que *les quantités* x, k_1, k_2 *sont des fonctions univoques de* ξ, η, ζ. On peut les représenter par des fonctions thêta de ξ, η, ζ.

Kronecker (*L.*). — Sur la théorie des fonctions elliptiques (*suite*). (99-120).

Nous avons vu [1] ce que Kronecker entend par systèmes *équivalents* (z), (z'), (z''), ... Le but principal de toute recherche sur ces systèmes équivalents

$$(z) \backsim (z') \backsim (z'') \backsim \ldots$$

est de fixer leurs *invariants,* c'est-à-dire des fonctions univoques des éléments du système (z) dont la valeur ne change pas quand on remplace ces éléments par les éléments correspondants du système équivalent (z'), du système équivalent (z''), ... Un nombre suffisant d'invariants détermine entièrement une équivalence; c'est pourquoi il convient de représenter les invariants d'une équivalence par des fonctions *symétriques* de *tous* les systèmes équivalents, afin que les conditions d'équivalence soient bien mises en évidence sur ces invariants.

Ainsi l'invariant de l'équivalence

$$z \backsim z \pm 1 \backsim z \pm 2 \backsim \ldots$$

est $\pi \cot \pi z$ que l'on peut représenter par la série

$$\lim_{n=\infty} \sum_{k=-n}^{k=+n} \frac{1}{z+k},$$

c'est-à-dire par une fonction symétrique de *tous* les éléments équivalents $z+k$, et le caractère d'invariance de la fonction $\pi \cot \pi z$ est ainsi bien mis en évidence. De même si l'on nomme *équivalents* deux systèmes symétriques (z_{ik})

---

[1] *Bulletin*, t. XVI, p. 97; 1892. *Sitz.*, 88.

et (z'_{ik}), $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$, lorsque les deux formes quadratiques

$$\sum_{i,k} z_{ik} Z_i Z_k, \quad \sum_{i,k} z'_{ik} Z'_i Z'_k$$
$$(i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

sont les transformées l'une de l'autre par une substitution linéaire à déterminant égal à $+1$, le seul *invariant* de cette équivalence est le déterminant

$$|z_{ik}| \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n)$$

et, lorsque les formes quadratiques sont négatives, on peut représenter ce déterminant par la valeur réciproque du carré de l'intégrale multiple

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \sum_{i,k} z_{ik} Z_i Z_k} dZ_1\, dZ_2 \ldots dZ_n,$$

ce qui met bien en évidence le caractère d'invariance de ce déterminant pour *tous* les systèmes équivalents considérés.

Dans d'autres exemples, c'est la fonction symétrique des éléments de tous les systèmes équivalents, que l'on construit *a priori;* elle est particulièrement intéressante lorsque l'on peut démontrer qu'elle s'exprime à l'aide de fonctions connues. Ainsi la série, absolument convergente pour ρ positif,

$$\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{e^{2(m\sigma+n\tau)\pi i}}{(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)^{1+\rho}}$$

est manifestement un *invariant* de toute la classe de systèmes équivalents au système

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0),$$

l'équivalence étant définie comme dans les comptes rendus des *Sitzungsberichte* de 1889 (*Bulletin*, t. XIII p. 137; 1889). Mais c'est la démonstration du théorème que la limite, pour $\rho = 0$, de cette série à double entrée s'exprime à l'aide des fonctions thêta, qui permet d'utiliser ce caractère d'invariance pour simplifier certaines recherches concernant la theorie des fonctions elliptiques.

Les exemples précédents suffiront sans doute pour faire bien comprendre le point de vue auquel se place M. Kronecker dans l'étude des fonctions elliptiques : commencer par définir des *équivalences* convenant à la question que l'on veut résoudre; ces équivalences peuvent être d'ordre arithmétique comme dans les deux derniers exemples où leur définition est empruntée à la théorie des formes quadratiques; elles peuvent être d'ordre analytique lorsque l'on y fait entrer l'idée de limite. Une fois les équivalences définies, en rechercher les *invariants* et les représenter de manière à mettre en évidence leur invariance pour tous les systèmes équivalents.

La formule de transformation de la fonction El,

$$(42) \qquad (-1)^{\alpha'} \mathrm{El}\left(\frac{\sigma' + \tau' w'}{2}, \frac{w'}{2}\right) = i^{\frac{\alpha\alpha}{2} + \alpha - \alpha - 1} \mathrm{El}\left(\frac{\sigma + \tau w}{2}, \frac{w}{2}\right),$$

nous montre immédiatement que la fonction

$$\mathrm{El}^4\left(\frac{\sigma+\tau\varpi}{2}, \frac{\varpi}{2}\right)$$

est un *invariant* de la classe de systèmes *complètement* (¹) équivalents

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \backsim (\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0).$$

Cette invariance de la quatrième puissance de la fonction El est mise en pleine lumière par la formule

$$\mathrm{El}\left(\frac{\sigma+\tau\varpi}{2}, \frac{\varpi}{2}\right) = \frac{\displaystyle\sum_{\mu=-\infty}^{\mu=+\infty}\sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} i^{(2\mu+1)(\nu-1)} e^{-\pi\left[a_0\left(\mu+\frac{1}{2}\right)^2+b_0\left(\mu+\frac{1}{2}\right)\nu+c_0\nu^2\right]+(2\mu+1)\sigma+2\nu\tau)\pi i}}{\displaystyle\sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^{m(n-1)} e^{-\pi[a_0m^2+b_0mn+c_0n^2]+2(m\sigma+n\tau)\pi i}}$$

qui n'est autre que la formule (41) des comptes rendus du *Bulletin*, p. 140; 1889. (*Sitz.*, 89). On voit en effet sur cette formule que lorsque l'on remplace le système $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ par un système *complètement* équivalent $(\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0)$, les termes du numérateur se permutent entre eux de manière que le nouveau numérateur soit égal à l'ancien multiplié par une puissance de i; de même pour ceux du dénominateur.

On peut mettre le numérateur de l'expression précédente de $\mathrm{El}\left(\frac{\sigma+\tau\varpi}{2}, \frac{\varpi}{2}\right)$ sous la forme

$$\mathrm{E}_1(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) + i\mathrm{E}_2(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0),$$

où E_1 et E_2 sont les fonctions *réelles* des nombres σ, τ, a_0, b_0, c_0, que voici :

$$\mathrm{E}_1 = \sum_{\mu, n}(-1)^{\frac{\mu-1}{2}+n} e^{-\pi\left(\frac{1}{4}a_0\mu^2+b_0\mu n+4c_0n^2\right)}\sin(\mu\sigma+4n\tau)\pi$$

$$\mathrm{E}_2 = \sum_{\mu, \nu}(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} e^{-\pi\left(\frac{1}{4}a_0\mu^2+\frac{1}{2}b_0\mu\nu+c_0\nu^2\right)}\sin(\mu\sigma+2\nu\tau)\pi$$

$$(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad \mu, \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots).$$

Le dénominateur de $\mathrm{El}\left(\frac{\sigma+\tau\varpi}{2}, \frac{\varpi}{2}\right)$ est une fonction réelle des nombres réels σ, τ, a_0, b_0, c_0, que nous désignerons par $\mathrm{E}_0(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$; nous pouvons la mettre sous la forme

$$\mathrm{E}_0 = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty}\sum_{n=-\infty}^{n=+\infty}(-1)^{m(n-1)} e^{-\pi(a_0m^2+b_0mn+c_0n^2)}\cos 2(m\sigma+n\tau)\pi.$$

(¹) Pour les définitions et notations voir *Bulletin*, t. XIII, p. 144; 1889; compte rendu des *Sitz.*, p. 1; 1889.

On a ainsi séparé la partie réelle et la partie purement imaginaire de la fonction $\mathrm{El}\left(\frac{\sigma+\tau w}{2}, \frac{w}{2}\right)$; dans la formule

$$(43) \qquad \mathrm{El}\left(\frac{\sigma+\tau w}{2}, \frac{w}{2}\right) = \frac{E_1}{E_0} + i\frac{E_2}{E_0},$$

les deux fonctions $\frac{E_1}{E_0}$ et $\frac{E_2}{E_0}$ sont réelles.

En particulier pour $\sigma = \frac{1}{2}$, $\tau = 0$, on a

$$(44) \qquad \mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{w'}{2}\right) = (-1)^{\frac{\alpha'}{2}} i^{\frac{\alpha\alpha'}{2}} \mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{w}{2}\right),$$

où

$$(45) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{w}{2}\right) &= \frac{\sum\limits_{\mu, n} (-1)^n e^{-\pi\left(\frac{1}{4}a_0\mu^2 + b_0\mu n + 4c_0 n^2\right)}}{\sum\limits_{m, n} (-1)^{mn} e^{-\pi(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)}} \\ &+ i\,\frac{\sum\limits_{\mu, \nu} (-1)^{\frac{1}{2}(\mu-\nu)} e^{-\pi\left(\frac{1}{4}a_0\mu^2 + \frac{1}{2}b_0\mu\nu + c_0\nu^2\right)}}{\sum\limits_{m, n} (-1)^{mn} e^{-\pi(a_0 m^2 + b_0 mn + c_0 n^2)}}. \end{aligned} \right.$$

Ainsi la quatrième puissance de

$$\mathrm{El}\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0+i}{4c_0}\right)$$

est un invariant de la classe formée par les systèmes complètement équivalents au système (a_0, b_0, c_0).

Inversement la relation

$$\mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{w'}{2}\right) = \mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{w}{2}\right)$$

caractérise la classe considérée, car de cette relation on peut déduire l'équivalence *complète*

$$(a'_0, b'_0, c'_0) \backsim (a_0, b_0, c_0) \qquad (\alpha' \equiv 0, \bmod 2).$$

Si α' est non seulement divisible par 2, mais aussi par 4, on a

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b'_0+i}{4c'_0}\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0+i}{4c_0}\right);$$

inversement de cette dernière relation on déduit l'équivalence complète

$$(a'_0, b'_0, c'_0) \backsim (a_0, b_0, c_0) \qquad (\alpha' \equiv 0, \bmod 4).$$

Comme les systèmes (a_0, b_0, c_0), dont les éléments sont liés par la relation

$$4a_0c_0 - b_0^2 = 1,$$

ont *deux* éléments indépendants, il faut *deux* invariants pour caractériser entièrement la classe des systèmes équivalents à (a_0, b_0, c_0). On obtient ces deux invariants en séparant la partie réelle et la partie purement imaginaire de l'invariant que nous venons d'obtenir; cette séparation résulte immédiatement de la formule (45).

Plus généralement, les systèmes $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ dont les éléments sont liés par la relation

$$4a_0c_0 - b_0^2 = 1$$

ont *quatre* éléments indépendants; il faut donc *quatre* invariants pour *caractériser* entièrement la classe des systèmes complètement équivalents au système $(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$. En ne considérant d'abord que les équivalences complètes où $\alpha' \equiv 0$, (mod 4), on obtient ces quatre invariants en séparant, à l'aide des formules (43) et (45), les parties réelles et purement imaginaires des deux fonctions

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{\varpi}{2}\right),$$

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{\sigma + \tau\varpi}{2}, \frac{\varpi}{2}\right);$$

pour le démontrer, il suffit de montrer que des deux relations

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{\varpi'}{2}\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{\varpi}{2}\right),$$

$$\mathrm{El}^2\left(\frac{\sigma' + \tau'\varpi'}{2}, \frac{\varpi'}{2}\right) = \mathrm{El}^2\left(\frac{\sigma + \tau\varpi}{2}, \frac{\varpi}{2}\right),$$

on peut déduire l'équivalence complète

$$(\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0) \backsim (\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0) \qquad (\alpha' \equiv 0, \bmod 4).$$

En considérant ensuite la classe formée par tous les systèmes complètement équivalents, on obtient les quatre invariants de cette classe en séparant, à l'aide des formules (43) et (45), les parties réelles et purement imaginaires des deux fonctions

$$\mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{\varpi}{2}\right),$$

$$\frac{\mathrm{El}^2\left(\frac{\sigma + \tau\varpi}{2}, \frac{\varpi}{2}\right)}{\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{\varpi}{2}\right)};$$

pour le démontrer, il suffit de montrer que des deux relations

$$\mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{\varpi'}{2}\right) = \mathrm{El}^4\left(\frac{1}{4}, \frac{\varpi}{2}\right),$$

$$\frac{\mathrm{El}^2\left(\frac{\sigma' + \tau'\varpi'}{2}, \frac{\varpi'}{2}\right)}{\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{\varpi'}{2}\right)} = \frac{\mathrm{El}^2\left(\frac{\sigma + \tau\varpi}{2}, \frac{\varpi}{2}\right)}{\mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{\varpi}{2}\right)},$$

où $\varpi' = \frac{-b'_0 + i}{2c'_0}$, $4a'_0c'_0 - b'^2_0 = 4a_0c_0 - b_0^2 = 1$, on peut déduire l'équivalence

complète

$$(\sigma', \tau', a'_0, b'_0, c'_0) \backsim (\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0); \qquad \alpha' \equiv 0 \pmod 2.$$

En employant les notations de Jacobi, on peut énoncer le résultat précédent sous une forme très simple :

« Les quantités k, K, K′ étant définies comme fonctions de a_0, b_0, c_0 par les relations

$$k = \mathrm{El}^2\left(\frac{1}{4}, \frac{-b_0 + i}{4c_0}\right),$$

$$2\mathrm{K} = \pi\,\vartheta_3^2\left(0, \frac{-b_0 + i}{2c_0}\right),$$

$$2\mathrm{K}' = \pi\,\vartheta_3^2\left(0, \frac{b_0 + i}{2c_0}\right);$$

les parties réelles et purement imaginaires de k^2 et de $\sin^2 \mathrm{am}(2\sigma\mathrm{K} + 2\tau\mathrm{K}'i, k)$ sont les quatre invariants de la classe de systèmes complètement équivalents

$$(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0). \text{ »}$$

On voit bien sur cet exemple combien les notations de Jacobi sont naturelles, et combien il serait peu légitime de les laisser systématiquement de côté, en n'employant que celles de M. Weierstrass.

En développant la fonction

$$\sin \mathrm{am}(2\sigma\mathrm{K} + 2\tau\mathrm{K}'i, k)$$

en une série de Fourier à double entrée, on a

$$(46) \quad \left\{ \begin{aligned} & k \sin \mathrm{am}(2\sigma\mathrm{K} + 2\tau\mathrm{K}'i, k) = \sum_{\nu, n} \frac{(-1)^n \sin(\nu\sigma + 2n\tau)\pi}{\nu\mathrm{K}' + 2n\mathrm{K}i}, \\ & (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots). \end{aligned} \right.$$

Pour $\sigma = \frac{1}{2}$, $\tau = 0$, on a donc le module k exprimé en fonction de K et de K′ par la série à double entrée

$$(47) \qquad k = \sum_{\nu, n} \frac{(-1)^{\frac{2n-1+\nu}{2}}}{\nu\mathrm{K}' + 2n\mathrm{K}i}.$$

En posant d'abord $\sigma = \frac{1}{2}$, puis $\tau = \frac{1}{2}$, on a aussi la formule bien remarquable

$$1 = \lim_{\tau = \frac{1}{2}} \sum_{(\nu)} \sum_{(n)} \frac{(-1)^{\frac{2n+\nu-1}{2}} \cos 2n\tau\pi}{\nu\mathrm{K}' + 2n\mathrm{K}i},$$

que l'on peut écrire

$$(48) \quad \left\{ \begin{aligned} & 1 = \lim_{\tau = 0} \sum_{(\nu)} \sum_{(n)} \frac{(-1)^{\frac{\nu-1}{2}} \cos 2n\tau\pi}{\nu\mathrm{K}' + 2n\mathrm{K}i}, \\ & (n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots; \nu = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \ldots). \end{aligned} \right.$$

Kronecker (*L.*). — Sur la théorie des fonctions elliptiques (*suite*). (123-130).

Désignons par $\mathrm{Ser}(\xi, \eta, u, v, w)$ la série à double entrée

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m,n} \frac{e^{i(m\xi+n\eta)\pi i}}{u+mv+nw} \qquad \begin{pmatrix} m=0, \pm 1, \ldots, \pm M \\ n=0, \pm 1, \ldots, \pm N \end{pmatrix}$$

où ξ et η sont des quantités réelles, tandis que u, v, w sont des imaginaires telles que le rapport $\frac{w}{v}$ ne soit pas réel.

Comme on a manifestement

$$\mathrm{Ser}(\xi, -\eta, v, -w) = \mathrm{Ser}(\xi, \eta, u, v, w),$$

on peut toujours supposer que, dans le rapport $\frac{w}{v}$, le coefficient de i est positif; et, comme on ne change pas la valeur de la fonction Ser en augmentant ou en diminuant u d'un multiple entier de w, on peut aussi supposer que la partie réelle de $\frac{ui}{v}$ est comprise entre o et la partie réelle de $\frac{wi}{v}$. Ceci posé, pour les valeurs de ξ comprises entre -1 et o, on peut exprimer la somme double à l'aide de la fonction impaire ϑ_1 de Jacobi et mettre ainsi la fonction Ser sous la forme

$$(49) \qquad \mathrm{Ser}(\xi, \eta, u, v, w) = \frac{1}{v} e^{-\frac{2\xi u\pi i}{v}} \frac{\vartheta_1'\left(0, \frac{w}{v}\right) \vartheta_1\left(\frac{u+\eta v-\xi w}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right) \vartheta_1\left(\frac{\eta v-\xi w}{v}, \frac{w}{v}\right)}.$$

Posons, dans cette formule,

$$\xi = -\tau', \qquad \eta = \sigma', \qquad \sigma' v + \tau' w = u',$$

et déterminons deux nombres réels σ, τ, vérifiant la condition

$$u = v\sigma + w\tau:$$

nous aurons alors, pourvu que ni τ, ni τ' ne soient entiers,

$$(50) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \displaystyle\sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma'-m\tau')2\pi i}}{(\sigma+m)v+(\tau+n)w} = \frac{1}{v} e^{\frac{2\tau' u\pi i}{v}} \frac{\vartheta_1'\left(0, \frac{w}{v}\right) \vartheta_1\left(\frac{u+u'}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right) \vartheta_1\left(\frac{u'}{v}, \frac{w}{v}\right)} \\ \qquad (m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \end{array} \right.$$

Plus généralement, si l'on désigne par $\mathrm{Ser}(u', u, v, w)$ la série à double entrée

$$\lim_{N=\infty} \lim_{M=\infty} \sum_{m',n'} \frac{e^{(n'\sigma'-m'\tau')2\pi i}}{(\sigma+m')v+(\tau+n')w} \qquad \begin{pmatrix} m=0, \pm 1, \ldots, \pm M \\ n=0, \pm 1, \ldots, \pm N \end{pmatrix},$$

où $m' = \alpha m + \beta n$, $n' = \alpha' m + \beta' n$: α, β, α', β' étant des entiers tels que $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$, on a aussi, pourvu que ni $\alpha\tau - \alpha'\sigma$, ni $\alpha\tau' - \alpha'\sigma'$ ne soient

entiers,

$$(51)\qquad \operatorname{Ser}(u', u, v, w) = \frac{1}{v} e^{\frac{2\tau' u\pi i}{v}} \frac{\vartheta_1'\left(0, \frac{w}{v}\right) \vartheta_1\left(\frac{u - u'}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right) \vartheta_1\left(\frac{u'}{v}, \frac{w}{v}\right)}.$$

En posant dans cette formule (51)

$$u = \sigma + \frac{\mathrm{K}' i}{2}, \qquad v = \mathrm{K}, \qquad w = \mathrm{K}' i,$$

puis en passant à la limite pour $\sigma = 0$, on retombe sur la formule (46). La fonction Ser envisagée dans cette Communication de Kronecker est donc une généralisation de la fonction

$$k \sin \operatorname{am}(2\sigma \mathrm{K} + 2\tau \mathrm{K}' i, k).$$

On voit ainsi que, dans la formule (48), l'ordre des limites peut être interverti.

Kronecker (*L.*). — Sur les fonctions elliptiques (*suite*). (219-241).

Nous désignerons par

$$\operatorname{Atr}(u, v, w)$$

la fonction $\mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$, c'est-à-dire la fonction

$$\left(\frac{2\pi}{\vartheta_1'(0, w)}\right)^{\frac{1}{3}} e^{(\sigma+\tau w)\tau\pi i} \vartheta_1(\sigma + \tau w, w),$$

où u, v, w sont liés à σ, τ, a_0, b_0, c_0 par les relations

$$w = \frac{-b_0 + i}{2c_0}, \qquad 4a_0c_0 - b_0^2 = 1, \qquad u = \sigma v + \tau w,$$
$$(b_0 - i)v + 2c_0 w = 0.$$

Nous désignerons aussi par $\mathrm{A}'(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ la dérivée par rapport à σ de la fonction $\mathrm{A}(\sigma, \tau, a_0, b_0, c_0)$ et par $\operatorname{Atr}'(0, v, w)$ la limite

$$\operatorname{Atr}'(0, v, w) = \lim_{\sigma=0, \tau=0} \left[\frac{\operatorname{Atr}(\sigma v + \tau w, v, w)}{\sigma v + \tau w}\right] = \frac{1}{v} \mathrm{A}'(0, 0, a_0, b_0, c_0).$$

En faisant usage des formules d'addition et de transformation linéaire des fonctions thêta, on a immédiatement les relations

$$(52)\qquad \operatorname{Atr}(u + sv + tw, v, w) = (-1)^{st+s+t} e^{(s\tau+t\sigma)\pi i} \operatorname{Atr}(u, v, w),$$

$$\left.\begin{aligned} &(53)\qquad \operatorname{Atr}(u, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w) = e^{\frac{h\pi i}{6}} \operatorname{Atr}(u, v, w) \\ &(54)\qquad \operatorname{Atr}'(0, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w) = e^{\frac{h\pi i}{6}} \operatorname{Atr}'(0, v, w) \end{aligned}\right\} \text{si } \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1,$$

où s, t, h sont des nombres entiers.

Nous désignerons ensuite par $\overline{\mathrm{Atr}}$ la fonction des quatre variables u_0, u, v, w

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w) = e^{(\sigma\tau_0 - \sigma_0\tau)\pi i}\frac{\mathrm{Atr}'(0, v, w)\,\mathrm{Atr}(u_0 + u, v, w)}{\mathrm{Atr}(u_0, v, w)\,\mathrm{Atr}(u, v, w)}$$

$$= \frac{1}{v}e^{\frac{2\tau_0 u\pi i}{v}}\frac{\vartheta_1'\left(0, \frac{w}{v}\right)\vartheta_1\left(\frac{u_0 + u}{v}, \frac{w}{v}\right)}{\vartheta_1\left(\frac{u_0}{v}, \frac{w}{v}\right)\vartheta_1\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right)},$$

où $u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w$, $u = \sigma v + \tau w$. Cette fonction $\overline{\mathrm{Atr}}$ est un invariant de l'équivalence

$$(u_0, u, v, w) \backsim (u_0, u, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w), \qquad \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1,$$

c'est-à-dire que l'on a

$$(55) \qquad \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w) = \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w), \qquad \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1.$$

La formule d'addition de cette fonction est

$$(56) \qquad \overline{\mathrm{Atr}}(u_0 + s_0 v + t_0 w, u + sv + tw, v, w) = e^{(s\tau_0 - t\sigma_0)2\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w).$$

Nous désignerons enfin par $\overline{\mathrm{Atr}_1}$ la fonction

$$\overline{\mathrm{Atr}_1}(u_0, u, v, w) = e^{(\sigma_0\tau - \sigma\tau_0)2\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w).$$

Cette fonction vérifie la relation

$$(57) \qquad \overline{\mathrm{Atr}_1}(u_0'', u'', v'', w'') = e^{[(\alpha'\gamma_0 - \alpha\gamma_0')\sigma + (\beta'\gamma_0 - \beta\gamma_0')\tau]2\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}_1}(u_0, u, v, w),$$

où

$$u_0'' = u_0 + \gamma_0 v'' + \gamma_0' w''; \qquad v'' = \beta' v - \alpha' w,$$
$$u'' = u + \gamma v'' + \gamma' w''; \qquad w'' = -\beta v + \alpha w,$$

α, β, α', β' étant des entiers tels que $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$, et les γ étant des entiers quelconques.

Pour $\gamma = \gamma' = 0$, on a donc

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0'', u, v'', w'') = \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w),$$

et pour $\gamma_0 = \gamma_0' = 0$, on a

$$\overline{\mathrm{Atr}_1}(u_0, u'', v'', w'') = \overline{\mathrm{Atr}_1}(u_0, u, v, w).$$

Ainsi la fonction $\overline{\mathrm{Atr}}$ est un invariant non seulement de l'équivalence

$$(u_0, u, v, w) \backsim (u_0, u, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w),$$

mais aussi de l'équivalence plus générale

$$(u_0, u, v, w) \backsim (u_0 + \gamma_0 v + \gamma_0' w, u, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w),$$

et de même la fonction $\overline{\mathrm{Atr}_1}$ est un invariant de l'équivalence

$$(u_0, u, v, w) \backsim (u_0, u + \gamma v + \gamma' w, \alpha v + \alpha' w, \beta v + \beta' w).$$

La relation

$$(58)\qquad \overline{\mathrm{Atr}}(u''_0, u'', v'', w'') = e^{(\sigma\tau_0 - t\sigma_0)2\pi i}\,\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w),$$

qui résulte immédiatement des deux relations (55) et (56) et où

$$v = \alpha v'' + \alpha' w''; \qquad w = \beta v'' + \beta' w''; \qquad \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1,$$

tandis que σ_0, τ_0, σ, τ sont des nombres réels, compris entre o et 1, déterminés par les deux équations

$$u_0 = \sigma_0 v + \tau_0 w, \qquad u = \sigma v + \tau w,$$

permet de ramener toute fonction $\overline{\mathrm{Atr}}$ à une fonction $\overline{\mathrm{Atr}}$ dont les arguments sont plus petits que l'unité et plus grands ou au moins égaux à zéro. Mais pour une telle fonction on peut démontrer que l'on a

$$(59)\qquad \left\{\begin{array}{l} \overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w) = \lim\limits_{N=\infty}\lim\limits_{M=\infty}\sum\limits_{m,n}\dfrac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{u + mv + nw} \\ (m = 0, \pm 1, \ldots, \pm M;\ n = 0, \pm 1, \ldots, \pm N), \end{array}\right.$$

pourvu que le coefficient de i dans le rapport $\dfrac{w}{v}$ soit positif. Et il est facile de vérifier ensuite que ce développement a lieu pourvu que ni τ ni τ_0 ne soient entiers. On a aussi plus généralement

$$(60)\qquad \left\{\begin{array}{l} \overline{\mathrm{Atr}}(\sigma_0 v + \tau_0 w, \sigma v + \tau w, v, w) = \lim\limits_{N=\infty}\lim\limits_{M=\infty}\sum\limits_{m,n}\dfrac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(\sigma + m)v + (\tau + n)w} \\ (\alpha m + \beta n = 0, \pm 1, \ldots, \pm M;\ \alpha' m + \beta' n = 0, \pm 1, \ldots, \pm N), \end{array}\right.$$

pourvu que ni $\alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0$, ni $\alpha'\sigma + \beta'\tau$ ne soient entiers.

De cette formule (60) on déduit immédiatement

$$(61)\qquad \left\{\begin{array}{l} \overline{\mathrm{Atr}}_1(u_0, u, v, w) = \lim\limits_{N=\infty}\lim\limits_{M=\infty}\sum\limits_{m,n}\dfrac{e^{[(\tau+n)\sigma_0 - (\sigma+m)\tau_0]2\pi i}}{(\sigma + m)v + (\tau + n)w} \\ (\alpha m + \beta n = 0, \pm 1, \ldots, \pm M;\ \alpha' m + \beta' n = 0, \pm 1, \ldots, \pm N). \end{array}\right.$$

Ainsi la valeur de la fonction $\overline{\mathrm{Atr}}_1$ ne change pas quand on augmente ou qu'on diminue σ ou τ d'*entiers*. En d'autres termes, la valeur de la fonction

$$e^{(\sigma_0\tau - \sigma\tau_0)2\pi i}\,\mathrm{Atr}(u_0, u, v, w)$$

ne change pas lorsqu'on permute les deux couples (σ, τ) et (σ_0, τ_0). On en conclut, à l'aide de la relation (60), cette égalité remarquable

$$(62)\qquad \left\{\begin{array}{l} e^{(\sigma_0\tau - \sigma\tau_0)\pi i}\lim\limits_{N=\infty}\lim\limits_{M=\infty}\sum\limits_{m,n}\dfrac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(\sigma + m)v + (\tau + n)w} \\ \quad = e^{(\sigma\tau_0 - \sigma_0\tau)\pi i}\lim\limits_{N=\infty}\lim\limits_{M=\infty}\sum\limits_{m,n}\dfrac{e^{(n\sigma - m\tau)2\pi i}}{(\sigma_0 + m)v + (\tau_0 + n)w}, \\ (\alpha m + \beta n = 0, \pm 1, \ldots, \pm M;\ \alpha' m + \beta' n = 0, \pm 1, \ldots, \pm N), \end{array}\right.$$

α, β, α', β' étant des entiers tels que $\alpha\beta' - \alpha'\beta = 1$, et ni $\alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0$, ni $\alpha'\sigma + \beta'\tau$ ne soient entiers.

On remarquera que, dans cette Communication, M. Kronecker a suivi l'ordre inverse de celui qu'il avait adopté dans sa Communication précédente sur les fonctions elliptiques. Tandis qu'alors la formule équivalente à la formule (59) servait de point de départ et que l'on parvenait finalement à la formule (51): ici c'est le second membre de cette formule (51) qui sert de *définition* à la fonction $\overline{\mathrm{Atr}}$, et l'on parvient à la formule (59), en utilisant les formules de transformation linéaire des fonctions thêta.

On peut encore se placer à un autre point de vue, et étudier directement la série à double entrée

$$\sum_{m,n} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{u + mv + nw};$$

on retrouve ainsi directement les résultats précédents sans faire usage de la transformation linéaire des fonctions thêta; on peut ensuite en déduire très simplement, comme application, une partie des formules concernant cette transformation linéaire.

A cet effet, on démontre d'abord l'existence de la limite

$$\lim_{M=\infty} \sum_{m=-M}^{m=+M} \sum_{n=-M}^{n=+M} \frac{e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}}{(u + mv + nw)^{1+\rho}};$$

on désigne cette limite par

$$\mathrm{Ser}_\rho(\sigma_0 v + \tau_0 w, u, v, w).$$

Cette fonction jouit des propriétés suivantes

$$\mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, -w, v),$$
$$\mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, v, w + vg),$$

où g est un entier quelconque. De plus, la fonction $\mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, v, w)$ est une fonction *continue* des deux variables réelles σ_0, τ_0.

La démonstration de l'existence et de la continuité de la fonction Ser_ρ fait l'objet de toute la seconde moitié de cette Communication de Kronecker.

Kronecker (*L.*). — Sur les fonctions elliptiques (suite). (307-318).

Pour la fonction Ser_ρ définie plus haut, on établit directement la formule de transformation

$$(63) \qquad \mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, \beta' v - \alpha' w, -\beta v + \alpha w),$$

que l'on peut écrire

$$\mathrm{Ser}_\rho(\sigma_0 v + \tau_0 w, u, v, w) = \mathrm{Ser}_\rho(\sigma'_0 v' + \tau'_0 w', u, v', w'),$$

où

$$\sigma'_0 = \alpha\sigma_0 + \beta\tau_0, \qquad v' = \beta' v - \alpha' w,$$
$$\tau'_0 = \alpha'\sigma_0 + \beta'\tau_0, \qquad w' = -\beta v + \alpha w, \qquad \alpha\beta' - \alpha'\beta = 1.$$

En se rappelant la définition de la fonction Ser_ρ, on a immédiatement

$$e^{-2\tau_0\pi i}\,\mathrm{Ser}_\rho(u_0,\ u+v,\ v,\ w) = \lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}},$$

$$(m=-M+1,\ \ldots,\ M+1;\ n=-M,\ \ldots,\ +M);$$

on en déduit la relation

$$\mathrm{Ser}_\rho(u_0,\ u,\ v,\ w) = e^{2(t\sigma_0-s\tau_0)\pi i}\,\mathrm{Ser}_\rho(u_0,\ u+sv+tw,\ v,\ w),$$

à laquelle on peut ajouter les deux relations presque évidentes

$$\mathrm{Ser}_\rho(v\sigma_0+w\tau_0,\ u,\ v,\ w) = \mathrm{Ser}_\rho(v\sigma_0-w\tau_0,\ u,\ -v,\ w),$$
$$\mathrm{Ser}_\rho(v\sigma_0+w\tau_0,\ u,\ v,\ w) = \mathrm{Ser}_\rho(-v\sigma_0+w\tau_0,\ u,\ v,\ -w).$$

On montre ensuite que la fonction $\mathrm{Ser}_\rho(u_0,\ u,\ v,\ w)$ est un invariant de l'équivalence

$$(\sigma_0,\ \tau_0,\ \sigma,\ \tau,\ v,\ w)$$
$$\backsim\ (\alpha\sigma_0+\beta\tau_0+\gamma_0,\ \alpha'\sigma_0+\beta'\tau_0+\gamma'_0,\ \alpha\sigma+\beta\tau,\ \alpha'\sigma+\beta'\tau,\ \beta'v-\alpha'w,\ -\beta v+\alpha w),$$

où les entiers α, β, γ_0, α', β', γ'_0 sont soumis à l'unique condition $\alpha\beta'-\alpha'\beta=1$, et où ni σ_0, ni τ_0, ni σ, ni τ ne sont *entiers*.

Enfin cette même fonction $\mathrm{Ser}_\rho(u_0,\ u,\ v,\ w)$ peut être mise sous les deux formes

$$\mathrm{Ser}_\rho(u_0,\ u,\ v,\ w) = \lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}} \qquad \begin{pmatrix}-M-h\leqq m\leqq M+h'\\ -M-k\leqq n\leqq M+k'\end{pmatrix},$$

$$= \lim_{M=\infty}\lim_{N=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}} \qquad \begin{pmatrix}-M-h\leqq m\leqq M+h'\\ -N-k\leqq n\leqq N+k'\end{pmatrix},$$

où h, h', k, k' sont des nombres positifs comme N et M, et où $N\geqq M$. En tenant compte de (63) on en déduit les relations plus générales qui expriment une propriété fondamentale de la fonction Ser_ρ

$$\mathrm{Ser}_\rho(u_0,\ u,\ v,\ w) = \lim_{M=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}}$$

$$\begin{pmatrix}-M-h\leqq \alpha m+\beta n\leqq M+h'\\ -M-k\leqq \alpha' m+\beta' n\leqq M+k'\\ \alpha\beta'-\alpha'\beta=1\end{pmatrix},$$

$$= \lim_{M=\infty}\lim_{N=\infty}\sum_{m,n}\frac{e^{(n\sigma_0-m\tau_0)2\pi i}}{(u+mv+nw)^{1+\rho}}$$

$$\begin{pmatrix}-M-h\leqq \alpha m+\beta n\leqq M+h'\\ -N-k\leqq \alpha' m+\beta' n\leqq N+k'\\ \alpha\beta'-\alpha'\beta=1\end{pmatrix}.$$

On peut retrouver les résultats précédents par une voie toute différente en démontrant d'abord que, pour $\rho=0$ et pour tout entier positif ρ, la fonction

$\mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, v, w)$ est une fonction de u univoque et finie ainsi que ses dérivées, pour toute valeur de u autre que celles pour lesquelles on peut résoudre en nombres entiers m, n l'équation $u + mv + nw = 0$; et que la limite vers laquelle tend le produit

$$(u + mv + nw)^{1+\rho}\,\mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, v, w),$$

lorsque $u + mv + nw$ tend vers zéro, est égale à $e^{(n\sigma_0 - m\tau_0)2\pi i}$.

Si l'on démontre d'une certaine fonction de u, $\mathfrak{F}(u)$, que la différence $\mathfrak{F}(u) - \mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, v, w)$ reste, pour toutes les valeurs de u, inférieure à un nombre fini déterminé, et que $\mathfrak{F}(u)$ jouit de toutes les propriétés que nous venons d'énumérer, on peut en conclure, en appliquant le théorème de Cauchy, que

$$\mathfrak{F}(u) = \mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, v, w).$$

En appliquant cette remarque à la fonction

$$\mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, \beta' v - \alpha' w, -\beta v + \alpha w),$$

on démontre facilement la relation (63).

De même, en prenant $\rho = 0$, et en envisageant la fonction

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w),$$

définie à l'aide de la fonction $\mathfrak{S}_1$ comme nous l'avons fait plus haut, on démontre l'égalité

$$\overline{\mathrm{Atr}}(u_0, u, v, w) = \mathrm{Ser}(u_0, u, v, w).$$

Dans cette démonstration on ne fait usage que du développement en produit de la fonction $\mathfrak{S}_1$, de la formule

$$\mathfrak{S}_1\left(\frac{u + sv + tw}{v}, \frac{w}{v}\right) = e^{-(t^2 w + 2tu + sv + tv)\frac{\pi i}{v}}\,\mathfrak{S}\left(\frac{u}{v}, \frac{w}{v}\right),$$

de la convergence de la série $\mathrm{Ser}(u_0, u, v, w)$ et de la relation

$$\mathrm{Ser}_\rho(u_0, u, v, w) = e^{2(t\sigma_0 - s\tau_0)\pi i}\,\mathrm{Ser}_\rho(u_0, u + sv + tw, v, w).$$

Fuchs (*L.*). — Sur des équations différentielles linéaires intégrables algébriquement. (469-483).

Soit une équation différentielle linéaire, irréductible, à coefficients rationnels,

$$(1) \qquad \frac{d^3y}{dz^3} + p\frac{d^2y}{dz^2} + q\frac{dy}{dz} + ry = 0.$$

Soient y_1, y_2, y_3 un système fondamental d'intégrales de cette équation différentielle, et w_1, w_2, w_3 les fonctions adjointes à y_1, y_2, y_3. M. Fuchs démontre les théorèmes suivants :

« *Théorème I.* — S'il existe une relation homogène, à coefficients constants, entre y_1, y_2, y_3,

$$(2) \qquad f(y_1, y_2, y_3) = 0,$$

les fonctions adjointes w_1, w_2, w_3 vérifient également une relation homogène à coefficients constants

$$g(w_1, w_2, w_3) = 0.$$

» Si le degré de f est plus grand que 2, celui de g est également plus grand que 2. »

« *Théorème II.* — Soit

$$\frac{d^m y}{dz^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0$$

une équation différentielle linéaire, irréductible, dont les intégrales sont partout déterminées [1] et supposons que les branches d'une de ces intégrales y soient, à des facteurs constants près, en nombre fini. Cette équation différentielle admet alors un système fondamental d'intégrales $y_1, y_2, \ldots, y_m$ dont les dérivées logarithmiques $u_1, u_2, \ldots, u_m$ sont des fonctions algébriques. »

« *Théorème III.* — Si les intégrales y_1, y_2, y_3 sont liées par la relation (2) et si, en outre, on sait que les branches d'une des intégrales de l'équation différentielle irréductible (1) sont, à des facteurs constants près, en nombre fini, l'équation (1) est intégrable algébriquement. La marche suivie dans la démonstration de ce théorème III est la suivante :

» En posant pour abréger

$$f_k = \frac{\partial f}{\partial y_k} \qquad (k = 1, 2, 3),$$

on déduit de l'équation (2) la relation

$$(3) \qquad f_1 \frac{dy_1}{dz} + f_2 \frac{dy_2}{dz} + f_3 \frac{dy_3}{dz} = 0;$$

en tenant compte de ce que l'on a $\frac{dy_k}{dz} = y_k u_k$, on a donc aussi la relation

$$(4) \qquad f_1 u_1 y_1 + f_2 u_2 y_2 + f_3 u_3 y_3 = 0;$$

mais, à cause de l'homogénéité de f, on a

$$(5) \qquad f_1 y_1 + f_2 y_2 + f_3 y_3 = 0;$$

des équations (4) et (5) on déduit enfin

$$(6) \qquad f_1 y_1 (u_1 - u_3) + f_2 y_2 (u_2 - u_3) = 0.$$

» Si l'on substitue dans (6), à $\zeta = \frac{y_3}{y_1}$, sa valeur en fonction algébrique de $\eta = \frac{y_2}{y_1}$, tirée de (2), il pourrait se faire que (6) fût vérifiée identiquement pour les deux variables indépendantes z et η. Mais alors on aurait nécessai-

---

[1] *Crelle*, t. 66, p. 146, équation (12).

rement les deux relations

$$(7) \qquad f_1 y_1 + \gamma f_1 y_1 = M f,$$

$$(8) \qquad f_1 y_1 + (1-\gamma) f_1 y_1 = M_1 f,$$

où M et M_1 sont des constantes qui ne peuvent être toutes deux nulles, sans quoi f serait identiquement nulle pour *toutes* les valeurs y_1, y_1, y_2. M. Fuchs démontre d'autre part que, si l'on suppose $M = 0$, on peut déduire de l'équation (7) que l'équation (1) n'est pas irréductible, contrairement à l'hypothèse faite au début et que l'on tombe de même sur une contradiction si l'on suppose que $M_1 \gtrless 0$. Il y a donc contradiction. On en conclut que la relation (6) n'est pas vérifiée identiquement en z et η, lorsque l'on a substitué à la variable ζ la fonction algébrique de η qui la représente en vertu de l'équation (2). Il y a donc une dépendance *algébrique* entre z et η. Il résulte dès lors de l'équation (26) du Mémoire de M. Fuchs contenu dans le tome I des *Acta mathematica*, p. 329, que l'équation (1) est intégrable algébriquement, ce qu'il fallait démontrer. »

« *Théorème IV.* — Soit S une substitution du groupe qui appartient à l'équation différentielle homogène quelconque

$$(9) \qquad \frac{d^m y}{dz^m} + p_1 \frac{d^{m-1} y}{dz^{m-1}} + \ldots + p_m y = 0,$$

et soient α_{ik} ses éléments. Si $a_1, a_2, \ldots, a_m$ sont des constantes données, nous dirons que les quantités

$$a'_k = \alpha_{k1} a_1 + \alpha_{k2} a_2 + \ldots + \alpha_{km} a_m \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

sont les *transformées* de $a_1, a_2, \ldots, a_m$ par la substitution S.

» Supposons que chacune des transformées de $a_1, a_2, \ldots, a_m$, obtenues en appliquant successivement *toutes* les substitutions S du groupe qui appartient à l'équation différentielle considérée (9), coïncide avec l'un ou l'autre des systèmes

$$l_\lambda a_1^{(\lambda)}, \quad l_\lambda a_2^{(\lambda)}, \quad \ldots, \quad l_\lambda a_m^{(\lambda)},$$

$$\lambda = 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad r-1; \qquad a_k^{(0)} = a_k;$$

où les l_λ sont des constantes arbitraires, et où r est un nombre *fini déterminé* quelconque.

» Soit $w_1, w_2, \ldots, w_m$ un système fondamental d'intégrales de l'équation différentielle adjointe à l'équation proposée (9); enfin posons

$$W = a_1 w_1 + a_2 w_2 + \ldots + a_m w_m,$$

$$W_\lambda = a_1^{(\lambda)} w_1 + a_2^{(\lambda)} w_2 + \ldots + a_m^{(\lambda)} w_m,$$

$$\lambda = 0, 1, \ldots, (r-1).$$

M. Fuchs démontre que les branches de la fonction W coïncident, à des facteurs constants près, avec $W_0, W_1, \ldots, W_{r-1}$, c'est-à-dire que l'équation différentielle adjointe à l'équation (9) a une intégrale dont les branches sont, à des facteurs constants près, en nombre *fini*. »

« *Théorème V.* — Revenons à l'équation différentielle irréductible (1); sup-

posons encore que la relation (2) ait lieu et supposons en outre qu'il y ait un point, autre que le point (0, 0, 0), sur la surface de Riemann représentée par l'équation (2), qui par l'ensemble des substitutions du groupe correspondant à l'équation (1) ne soit transformé qu'en un nombre *fini* de points de cette surface de Riemann (2). En appliquant le théorème IV, nous voyons alors que l'équation différentielle adjointe à l'équation (1) admet une intégrale dont les branches sont, à des facteurs constants près, en nombre fini; d'autre part, d'après le théorème I, il y a une relation homogène entre w_1, w_2, w_3; donc, d'après le théorème III, l'équation différentielle adjointe à (1) est intégrable algébriquement; donc l'équation différentielle (1) elle-même est intégrable algébriquement.

C'est en se basant sur ce dernier théorème que M. Fuchs, reprenant ses recherches contenues dans le tome I des *Acta mathematica*, montre comment, à l'aide de l'équation (α) [1]

$$(\alpha) \qquad \frac{d\eta}{dz} = \Omega(z)\,\mathrm{K}(\eta)$$

établie dans ce Mémoire, la nature algébrique des intégrales de l'équation proposée (1) sous l'hypothèse (2) est mise en évidence. A cet effet il distingue deux cas, celui où il existe des points $z = a$ aux environs desquels l'intégrale

$$\mathrm{J} = \int \Omega\, dz$$

n'est pas réversible univoquement et celui où il n'existe pas de tels points $z = a$.

Dans le premier cas on montre immédiatement que

$$\eta = \alpha, \qquad \zeta = \beta$$

étant un point de la surface de Riemann (2) auquel on parvient lorsque z par un chemin choisi arbitrairement arrive en a, ce point (α, β) ne se transforme qu'en un nombre *fini* de points de cette surface de Riemann (2), par l'ensemble de *toutes* les substitutions du groupe correspondant à l'équation (1); on peut dès lors appliquer le théorème V.

Dans le second cas, il faudrait que z fût, soit une fonction rationnelle de J, soit une fonction simplement ou doublement périodique de J. Si z est fonction rationnelle de J, l'intégrale

$$\mathrm{H} = \int \frac{d\eta}{\mathrm{K}(\eta)}$$

est une fonction algébrique de η : donc z est une fonction algébrique de η. Si z est fonction périodique de J, il faut que des multiples entiers de modules de périodicité de H coïncident avec des modules de périodicité de J, et les points de la surface de Riemann (2) où z est indéterminé sont nécessairement compris parmi ceux pour lesquels $\mathrm{K}(\eta) = 0$; ils sont donc en nombre *fini*. Soit $\eta = \gamma$, $\zeta = \delta$ un de ces points où z est indéterminé; alors tout point (γ', δ'), auquel on parvient en appliquant une substitution quelconque du groupe correspondant à l'équation (1), est un point pour lequel z est indéterminé. Donc

---

[1] Équation (27), p. 399 du Tome Ier des *Acta mathematica*.

le nombre de points de la surface (2) dans lequel se transforme (γ, δ), en appliquant successivement *toutes* les substitutions du groupe correspondant à l'équation (1), est *fini;* on peut donc appliquer le théorème V. Enfin s'il n'y a pas de système (γ, δ) pour lequel H soit infinie, il n'y a pas non plus de point de la surface (2) pour lequel z soit indéterminé; mais alors z est fonction rationnelle de (η, ζ); donc l'équation (1) est intégrable algébriquement.

Ce mode de démonstration a l'avantage de reposer sur des principes qui semblent pouvoir être appliqués à d'autres recherches que la recherche actuelle. Il est toutefois un peu long. Mais M. Fuchs donne encore une seconde démonstration bien plus courte du même théorème, démonstration dont nous allons aussi dire quelques mots.

Nous continuons toujours à faire usage des notations du Tome I des *Acta mathematica.* De plus nous supposerons que dans l'équation proposée (1) on ait $p = 0$; ce n'est pas une restriction, car si p n'est pas nul, en posant

$$y = ve^{-\frac{1}{3}\int p\,dz},$$

on obtient une nouvelle équation différentielle (1) entre v et z où $p = 0$, et les éléments v_1, v_2, v_3 du système fondamental, qui correspondent à y_1, y_2, y_3 vérifient la même relation (2).

On a alors

$$\Omega\Theta = 1.$$

D'autre part, de l'équation $y_1 = \Theta(z)\mathcal{L}(\eta)$ [1], on déduit, en différentiant et tenant compte de la relation $\frac{d\eta}{dz} = \Omega(z)\mathrm{K}(\eta)$, les valeurs de $\frac{dy_1}{dz}$, $\frac{d^3y_1}{dz^3}$ qui, substituées dans (1), donnent la relation

$$(10)\qquad \left\{ \begin{aligned} &\mathrm{K}\frac{d}{d\eta}\left[\mathrm{K}\frac{d}{d\eta}\left(\mathrm{K}\frac{d\mathcal{L}}{d\eta}\right)\right] + (2\Theta''\Theta - \Theta'^2 + q\Theta^2)\mathrm{K}\frac{d\mathcal{L}}{d\eta} \\ &\qquad\qquad + (\Theta''' + q\Theta' + r\Theta)\mathcal{L}\,\Theta^2 = 0, \end{aligned} \right.$$

où les indices supérieurs indiquent des dérivées par rapport à z.

Il suffit d'envisager le cas où cette relation (10) est vérifiée *identiquement* en z et η considérées comme des variables indépendantes; car, dans le cas contraire, la relation (10) implique une dépendance entre z et η et comme cette dépendance est algébrique il s'ensuit que l'équation différentielle (1) est intégrable algébriquement; le théorème est donc démontré.

En supposant la relation (10) vérifiée identiquement en z et η, M. Fuchs montre que l'on a nécessairement

$$(11)\qquad y_1 = \Theta e^{-\lambda\int\frac{dz}{\Theta}},$$

où λ est ou bien une quantité indépendante de z, ou bien une racine de l'équation du troisième degré

$$\lambda^3 + (2\Theta''\Theta - \Theta'^2 + q\Theta^2)\lambda + (\Theta''' + q\Theta' + r\Theta)\Theta^2 = 0.$$

---

[1] *Acta mathematica,* t. I, p. 329, équation (26).

Dans le premier cas, on voit sans peine que l'équation (11) nous donne une intégrale y_1 de l'équation différentielle (1) dont la dérivée logarithmique est une fonction rationnelle de z, ce qui est incompatible avec l'irréductibilité de cette équation différentielle (1). Il en est de même dans le second cas, lorsque dans l'équation du troisième degré à laquelle satisfait λ, le coefficient λ et le terme indépendant de λ sont tous deux différents de zéro. Donc, sauf lorsque l'un de ces coefficients est nul, l'hypothèse que l'équation (10) s'annule identiquement en z et η est impossible.

On voit d'ailleurs immédiatement que, si le terme indépendant de λ s'annulait, l'équation irréductible (1) serait vérifiée par une racine d'une fonction rationnelle, ce qui est impossible. Mais il est moins aisé de démontrer que le coefficient de λ ne peut s'annuler. M. Fuchs le montre en s'appuyant sur les égalités sur lesquelles repose la démonstration du théorème III.

L'hypothèse que l'équation (10) s'annule identiquement en z et η est donc toujours impossible, et le théorème proposé est, par suite, démontré.

Lipschitz (*R.*). — Contribution à la théorie de la transformation simultanée de deux formes quadratiques ou bilinéaires. (485-523).

Dans un Mémoire inséré dans les *Abhandlungen* de l'Académie de Berlin pour 1873, M. Lipschitz a étudié à nouveau le problème de la transformation simultanée de deux formes quadratiques

$$\sum_{a,b} p_{ab} x_a x_b, \quad \sum_a x_a^2 \qquad (a, b = 1, 2, \ldots, n),$$

en sommes de carrés, par une substitution linéaire

$$(1) \qquad \xi_k = \alpha_1^{(k)} x_1 + \alpha_2^{(k)} x_2 + \ldots + \alpha_n^{(k)} x_n \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

En désignant par s un paramètre, il s'agit, comme l'on sait, de mettre l'expression

$$(2) \qquad s \sum_a x_a^2 + \sum_{a,b} p_{ab} x_a x_b$$

sous la forme

$$\sum_{k=1}^{k=n} (s + \Lambda_k) \xi_k^2.$$

On n'envisage ici que le cas où les $\frac{1}{2} n(n+1)$ coefficients p_{ab} de la forme proposée sont des variables indépendantes; les n quantités Λ_k qui en dépendent sont toutes inégales; si $\Gamma(s)$ est le déterminant de la forme quadratique (2), on sait que ces quantités Λ_k changées de signes sont les racines de l'équation en s

$$\Gamma(s) = 0,$$

de sorte que l'on a

$$\Gamma(s) = s^n + G_1 s^{n-1} + \ldots + G_n = (s + \Lambda_1)(s + \Lambda_2) \ldots (s + \Lambda_n).$$

Si nous rappelons ici ces choses élémentaires, c'est pour fixer les notations dont on va faire usage.

M. Lipschitz a montré, dans le Mémoire cité à l'instant, que, pour $n = 2, 3, 4$, l'équation caractéristique du problème de transformation est résoluble *algébriquement*. Les racines de cette équation caractéristique, ou des combinaisons linéaires de ces racines, vérifient certains systèmes d'équations aux dérivées partielles. M. Lipschitz a, dans son Mémoire de 1873, établi ces systèmes d'équations aux dérivées partielles, dans le cas de $n = 2$ et dans le cas de $n = 3$.

Dans la première Partie du Mémoire actuel, il établit à nouveau les systèmes d'équations aux dérivées partielles dans le cas de $n = 2$ et de $n = 3$; ces équations sont équivalentes à celles du Mémoire de 1873, mais pour $n = 3$ elles se présentent sous une forme plus simple. Il établit ensuite les équations aux dérivées partielles dans le cas de $n = 4$.

Soit d'abord $n = 2$. En posant

$$-D = G_1^2 - 4G_2,$$

on a

$$A_k = \frac{G_1 + (-1)^{k-1}\sqrt{-D}}{2} \qquad (k = 1, 2)$$

et les équations aux dérivées partielles dont il vient d'être question sont

$$\frac{\partial\sqrt{-D}}{\partial p_{11}} + \frac{\partial\sqrt{-D}}{\partial p_{22}} = 0,$$

$$\frac{\partial\sqrt{-D}}{\partial p_{11}}\,\frac{\partial\sqrt{-D}}{\partial p_{22}} - \frac{1}{4}\left(\frac{\partial\sqrt{-D}}{\partial p_{12}}\right)^2 = -1.$$

Ces équations sont identiques à celles du Mémoire de 1873.

Soit ensuite $n = 3$. En posant

$$G_1^2 - 3G_2 = F,$$
$$2G_1^3 - 9G_1G_2 + 27G_3 = E,$$
$$E^2 - 4F^3 = D,$$

puis

$$\sqrt[3]{\frac{E}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{27D}} = H, \qquad \sqrt[3]{\frac{E}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{27D}} = K,$$

on a, en désignant par ρ une racine cubique primitive de l'unité,

$$A_k = \frac{1}{3}(G_1 + \rho^{k-1}H + \rho^{2k-2}K) \qquad (k = 1, 2, 3).$$

La quantité H vérifie le système d'équations aux dérivées partielles

$$(3) \qquad \left\{\begin{array}{c} H_{11} + H_{22} + H_{33} = 0, \\ H_{22}H_{33} - H_{23}^2 + H_{33}H_{11} - H_{31}^2 + H_{11}H_{22} - H_{12}^2 = 0, \\ \Sigma \pm H_{11}H_{22}H_{33} = 1, \end{array}\right.$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$H_{aa} = \frac{\partial H}{\partial p_{aa}}, \qquad H_{ab} = \frac{1}{2}\frac{\partial H}{\partial p_{ab}} \qquad \left(\begin{array}{c} a, b = 1, 2, 3 \\ a > b \end{array}\right).$$

La quantité K vérifie le système d'équations aux dérivées partielles que l'on obtient en remplaçant, dans le système d'équations aux dérivées partielles précédent, la lettre H par la lettre K.

D'ailleurs les dérivées partielles K_{ab} de K s'expriment *rationnellement* en fonction des dérivées partielles H_{ab} de H. On a en effet

$$(4)\quad \begin{cases} K_{11} = H_{22}H_{33} - H_{23}^2; & K_{22} = H_{33}H_{11} - H_{31}^2; & K_{33} = H_{11}H_{22} - H_{12}^2; \\ K_{23} = H_{31}H_{12} - H_{11}H_{23}; & K_{31} = H_{12}H_{23} - H_{22}H_{31}; & K_{12} = H_{23}H_{31} - H_{33}H_{12}. \end{cases}$$

En général les n^2 coefficients de substitution α dépendent de $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments indépendants. Ils doivent donc dépendre, pour $n = 3$, de *trois* éléments indépendants. M. Lipschitz les exprime effectivement à l'aide des *six* grandeurs H_{ab} qui sont reliées par les *trois* équations (3).

Les équations aux dérivées partielles (3) sont équivalentes aux équations (17), (18) et (19) de l'art. 2 du Mémoire de 1873.

Envisageons maintenant le cas $n = 4$ qui est ici traité pour la première fois. Si l'on définit trois quantités $\mathcal{L}$, $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ par les trois équations

$$\mathcal{L}^2 + \mathfrak{M}^2 + \mathfrak{N}^2 = 3G_1^2 - 2^3 G_2,$$
$$\mathcal{L}^2\mathfrak{M}^2 + \mathcal{L}^2\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{M}^2\mathfrak{N}^2 = 3G_1^4 - 2^4 G_1^2 G_2 + 2^4 G_1 G_3 + 2^4 G_2^2 - 2^6 G_4,$$
$$\mathcal{L}\mathfrak{M}\mathfrak{N} = G_1^3 - 2^2 G_1 G_2 + 2^3 G_3,$$

on a, pour $k = 1, 2, 3, 4$,

$$A_k = \frac{1}{4}\left[G_1 + (-1)^{\frac{(k-1)(k-2)}{2}}\mathcal{L} + (-1)^{k-1}\mathfrak{M} + (-1)^{\frac{k(k-1)}{2}}\mathfrak{N}\right].$$

La quantité $\mathcal{L}$ vérifie le système d'équations aux dérivées partielles

$$(5)\quad \begin{cases} \mathcal{L}_{11} + \mathcal{L}_{22} + \mathcal{L}_{33} + \mathcal{L}_{44} = 0, \\ \mathcal{L}_{11}\mathcal{L}_{22} - \mathcal{L}_{12}^2 + \ldots + \mathcal{L}_{33}\mathcal{L}_{44} - \mathcal{L}_{34}^2 = -2, \\ \Sigma \pm \mathcal{L}_{22}\mathcal{L}_{33}\mathcal{L}_{44} + \ldots + \Sigma \pm \mathcal{L}_{11}\mathcal{L}_{22}\mathcal{L}_{33} = 0, \\ \Sigma \pm \mathcal{L}_{11}\mathcal{L}_{22}\mathcal{L}_{33}\mathcal{L}_{44} = 1, \end{cases}$$

où l'on a posé, pour abréger,

$$\mathcal{L}_{aa} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{aa}}, \qquad \mathcal{L}_{ab} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_{ab}} \qquad \left(\begin{matrix} a, b = 1, 2, 3, 4 \\ a \gtrless b \end{matrix}\right);$$

$\mathfrak{M}$ et $\mathfrak{N}$ vérifient des systèmes d'équations aux dérivées partielles tout semblables.

Les seize quantités $\mathcal{L}_{ab}$ forment un système *orthogonal* et *symétrique*, à déterminant égal à $+1$. Il en est de même des seize quantités $\mathfrak{M}_{ab}$ et des seize quantités $\mathfrak{N}_{ab}$.

Deux des trois systèmes $\mathcal{L}_{ab}$, $\mathfrak{M}_{ab}$, $\mathfrak{N}_{ab}$ suffisent pour déterminer rationnellement les éléments du troisième. Ainsi, par exemple,

$$(6)\qquad \mathfrak{N}_{ab} = \sum_{c=1}^{c=4} \mathcal{L}_{ac}\mathfrak{M}_{cb} \qquad (a, b = 1, 2, 3, 4).$$

Comme en général les n^2 coefficients de substitution α dépendent de $\frac{n(n-1)}{2}$ éléments indépendants, ici les seize coefficients de substitution α doivent dépendre de six éléments indépendants. M. Lipschitz démontre que les éléments de chacun des systèmes $\mathcal{L}_{ab}$, $\mathfrak{M}_{ab}$, $\mathfrak{N}_{ab}$ dépendent de quatre éléments indépendants; il en résulte que les seize coefficients de substitution α qui doivent dépendre de six éléments indépendants ne peuvent pas dépendre des éléments d'*un seul* des trois systèmes $\mathcal{L}_{ab}$, $\mathfrak{M}_{ab}$, $\mathfrak{N}_{ab}$; ils ne peuvent donc dépendre que des éléments de *deux* de ces trois systèmes, des $\mathcal{L}_{ab}$ et des $\mathfrak{M}_{ab}$ par exemple, et les quatre éléments indépendants dont dépendent les $\mathcal{L}_{ab}$ sont nécessairement liés aux quatre éléments indépendants dont dépendent les $\mathfrak{M}_{ab}$ par *deux* relations.

Pour démontrer le théorème fondamental dont nous venons de faire usage, que les éléments du système $\mathcal{L}_{ab}$, par exemple, dépendent de quatre éléments indépendants, M. Lipschitz se place à un point de vue plus général et cherche à déterminer le nombre des éléments indépendants à l'aide desquels s'expriment les coefficients d'une substitution orthogonale d'ordre quelconque n, symétrique, et à déterminant égal à 1. En s'appuyant sur les théorèmes fondamentaux de son Mémoire : *Recherches sur les sommes de carrés,* Bonn, 1886, il montre que ce nombre est égal à

$$2\rho(n-2\rho),$$

où ρ est le nombre entier défini par ce fait que le déterminant caractéristique

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_{11}+s & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22}+s & \dots & \alpha_{2n} \\ \dots\dots & \dots\dots & \dots & \dots\dots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nn}+s \end{vmatrix}$$

de la substitution considérée

$$x_a = \alpha_{a1}y_1 + \alpha_{a2}y_2 + \dots + \alpha_{an}y_n \qquad (a = 1, 2, \dots, n)$$

est égal à

$$(s-1)^{2\rho}(s+1)^{n-2\rho}.$$

Dans le cas particulier qui nous occupe, où il s'agit du système des seize quantités $\mathcal{L}_{ab}$, système qui est bien orthogonal d'ordre 4, symétrique et à déterminant égal à 1, on voit sans peine que le déterminant caractéristique

$$D = \begin{vmatrix} \mathcal{L}_{11}+s & \mathcal{L}_{12} & \mathcal{L}_{13} & \mathcal{L}_{14} \\ \dots\dots & \dots & \dots & \dots\dots \\ \mathcal{L}_{41} & \mathcal{L}_{42} & \mathcal{L}_{43} & \mathcal{L}_{44}+s \end{vmatrix}$$

est égal à

$$(s^2-1)^2 = (s-1)^2(s+1)^2;$$

on a donc $n = 4$, $\rho = 1$, et le nombre d'éléments indépendants à l'aide desquels s'expriment les quantités $\mathcal{L}_{ab}$ est par conséquent égal à 4, comme nous l'avions annoncé.

Dans la seconde Partie du Mémoire actuel, M. Lipschitz envisage la transformation simultanée de deux formes *bilinéaires*

$$\sum_a y_a z_a, \quad \sum_{a,b} q_{ab} y_a z_b \qquad (a, b = 1, 2, \dots, n),$$

dont la seconde est alternée et où les coefficients $q_{ab} = -q_{ba}$ sont réels, en deux formes semblables, à l'aide de substitutions linéaires. Ce problème est identique à celui de la transformation du *faisceau* de formes bilinéaires

$$t\sum_a y_a z_a + \sum_{a,b} q_{ab} y_a z_b,$$

où t désigne un paramètre. Dans cette transformation, le déterminant

$$E(t) = \begin{vmatrix} t & q_{21} & \cdots & q_{n1} \\ q_{12} & t & \cdots & q_{n2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ q_{1n} & q_{2n} & \cdots & t \end{vmatrix}$$

joue un rôle essentiel.

Si 2ν est le plus grand entier pair qui ne dépasse pas n, on a

$$E(t) = t^n + E_1 t^{n-2} + E_2 t^{n-4} + \ldots + E_\nu t^{n-2\nu};$$

on sait, d'autre part [1], que les racines de l'équation $E(t) = 0$ sont ou purement imaginaires ou nulles.

M. Lipschitz étudie de plus près ces racines, en se bornant au cas où elles sont inégales. Convenons alors de les désigner par

$$B^{(l)},$$

en donnant à l'indice l, lorsque n est impair les valeurs

$$-\frac{n-1}{2}, \quad -\frac{n-3}{2}, \quad \ldots, \quad -1, \quad 0, \quad 1, \quad \ldots, \quad \frac{n-3}{2}, \quad \frac{n-1}{2},$$

et lorsque n est pair les valeurs

$$-\frac{n}{2}, \quad -\frac{n-2}{2}, \quad \ldots, \quad -1, \quad +1, \quad \ldots, \quad \frac{n-2}{2}, \quad \frac{n}{2},$$

en faisant $B^{(0)} = 0$ et pour tout l différent de zéro

$$B^{(l)} + B^{-(l)} = 0.$$

Elles vérifient le système d'équations aux dérivées partielles suivant :

Pour tout l différent de zéro

$$\Sigma' \left(\frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{ab}}\right)^2 = -1;$$

pour tout couple l, m tel que ni $l+m$ ni $l-m$ ne soit égal à zéro

$$\Sigma' \left(\frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{ab}}\right)\left(\frac{\partial B^{(m)}}{\partial q_{ab}}\right) = 0;$$

---

[1] *Comparez* HOVESTADT, *Ueber eine mit dem Problem der kleinen Schwingungen verwandte Aufgabe.* Inauguraldissertation, Bonn, 1873.

pour quatre indices inégaux quelconques a, b, c, d,

$$\frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{ab}}\frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{cd}}+\frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{ac}}\frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{db}}+\frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{ad}}\frac{\partial B^{(l)}}{\partial q_{bc}}=0.$$

Dans ces équations le symbole Σ' veut dire que la somme est étendue aux $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons de $a=1, 2, \ldots, n$ et de $b=1, 2, \ldots, n$ pour lesquelles $a>b$.

Pour $n=2, 3, \ldots, 9$, ces mêmes racines peuvent être représentées en fonction des coefficients donnés q_{ab} à l'aide de radicaux seulement. Ainsi, pour $n=4$ par exemple, on a pour les quatre racines $\pm B^{(1)}$, $\pm B^{(2)}$,

$$B^{(1)}=\frac{i}{2}\Big[\sqrt{(q_{12}-q_{34})^2+(q_{13}-q_{42})^2+(q_{14}-q_{23})^2}$$
$$+\sqrt{(q_{12}+q_{34})^2+(q_{13}+q_{42})^2+(q_{14}+q_{23})^2}\Big],$$
$$B^{(2)}=\frac{i}{2}\Big[\sqrt{(q_{12}-q_{34})^2+(q_{13}-q_{42})^2+(q_{14}-q_{23})^2}$$
$$-\sqrt{(q_{12}+q_{34})^2+(q_{13}+q_{42})^2+(q_{14}+q_{23})^2}\Big].$$

Si l'on détermine en général, en fonction des racines $B^{(l)}$ de l'équation $E(t)=0$, un système de coefficients $\beta_a^{(l)}$ par les équations

$$\begin{aligned}
&B^{(l)}\beta_1^{(l)}+q_{21}\beta_2^{(l)}+\ldots+q_{n1}\beta_n^{(l)}=0,\\
&q_{12}\beta_1^{(l)}+B^{(l)}\beta_2^{(l)}+\ldots+q_{n2}\beta_n^{(l)}=0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&q_{1n}\beta_1^{(l)}+q_{2n}\beta_2^{(l)}+\ldots+B^{(l)}\beta_n^{(l)}=0,
\end{aligned}$$

et un système de coefficients $\beta_a^{(-l)}$ par les équations toutes semblables obtenues en changeant en $-l$ les indices supérieurs l dans $B^{(l)}$ et dans les $\beta_a^{(l)}$, $a=1, 2, \ldots, n$, on voit, en se rappelant que les n racines $B^{(l)}$ sont supposées inégales, que $\beta_a^{(l)}$ et $\beta_a^{(-l)}$, $a=1, 2, \ldots, n$, sont déterminés à des facteurs constants près que l'on choisira de manière à vérifier, pour chaque indice l considéré, la relation

$$\beta_1^{(l)}\beta_1^{(-l)}+\beta_2^{(l)}\beta_2^{(-l)}+\ldots+\beta_n^{(l)}\beta_n^{(-l)}=1.$$

Ceci posé, soient η_l, ζ_m deux systèmes de n variables chacun, où les indices l et m sont fixés comme il a été dit plus haut pour l; envisageons la substitution linéaire

$$y_a=\sum_l \beta_a^{(l)}\eta_l,$$

$$z_b=\sum_m \beta_b^{(m)}\zeta_m;$$

M. Lipschitz démontre que par cette substitution le faisceau de formes bilinéaires,

$$t\sum_a y_a z_a+\sum_{a,b} q_{ab} y_a z_b$$

se transforme en cet autre faisceau de formes bilinéaires

$$t\sum_{l}\eta_l\zeta_{-l}-\sum_{l}B^{(l)}\eta_l\zeta_{-l},$$

que l'on peut nommer *faisceau normal*. Ce résultat est analogue à celui qui a été obtenu dans la première partie du Mémoire actuel pour la transformation d'un faisceau de formes quadratiques.

L. Kronecker. — Sur les systèmes orthogonaux. (525-541).

Les éléments a_{ik} $(i, k = 1, 2, \ldots, n)$ de tout système *symétrique* (a_{ik}) peuvent, lorsqu'ils sont *réels*, être mis sous la forme

$$a_{ik}=\sum_{h=1}^{h=n}p_h c_{hi}c_{hk},$$

où les nombres p et c sont réels et où les nombres réels c sont les éléments d'un système orthogonal, ce qui est mis en évidence par les relations

$$(1)\qquad \sum_{i=1}^{i=n}c_{gi}c_{hi}=\delta_{gh}\qquad (g, h = 1, 2, \ldots, n),$$

où

$$\delta_{gg}=1\qquad\text{et}\qquad \delta_{gh}=0\qquad (g \gtrless h).$$

Pour que le système symétrique (a_{ik}) soit, en outre, *orthogonal*, il faut que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{i=n}a_{ir}a_{is}=\delta_{rs}\qquad (r, s = 1, 2, \ldots, n).$$

En tenant compte des relations (1), on voit que les nombres p_h^2 sont tous égaux à l'unité. Il en résulte que les éléments a_{ik} d'un système symétrique orthogonal quelconque à éléments *réels* (le système unité excepté) sont de la forme

$$(2)\qquad a_{ik}=\sum_{g=1}^{g=m}c_{gi}c_{gk}-\sum_{h=m+1}^{h=n}c_{hi}c_{hk}\qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

où m est un des entiers $1, 2, \ldots, n-1$ et où les n^2 nombres c sont les éléments d'un système orthogonal. En tenant compte des relations

$$\sum_{g=1}^{g=m}c_{gi}c_{gk}+\sum_{h=m+1}^{h=n}c_{hi}c_{hk}=\delta_{ik}\qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

on voit que l'on peut aussi mettre les éléments a_{ik} d'un système orthogonal quelconque, à éléments *réels*, sous la forme

$$(3)\qquad a_{ik}=-\delta_{ik}+2\sum_{g=1}^{g=m}c_{gi}c_{gk}\qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

On déduit aussi des relations (2) que les éléments a_{ik} d'un système symétrique orthogonal quelconque, à éléments réels, sont les coefficients d'une forme quadratique obtenue par transformation orthogonale de la forme quadratique

$$(4) \qquad y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_m^2 - y_{m+1}^2 - y_{m+2}^2 - \ldots - y_n^2,$$

ce qui met bien en évidence que ces systèmes (a_{ik}) forment une variété d'ordre $m(n-m)$, comme M. Lipschitz l'a déjà démontré.

Une transformation orthogonale de la forme (4), pour laquelle la somme des m carrés positifs et la somme des $(n-m)$ carrés négatifs sont transformées en elles-mêmes, ne peut manifestement pas donner de nouveaux systèmes (a_{ik}). M. Kronecker déduit ce fait *directement* des relations (2) et plus simplement encore des relations (3).

On montre aussi sans peine que pour obtenir *tous* les systèmes symétriques orthogonaux à éléments réels, il suffit d'envisager dans les équations (3) les systèmes (c_{gi}) formés par les $\frac{m(m+1)}{2}$ éléments

$$c_{gk} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots, m \\ k = g, g+1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

et par les $m(n-m)$ éléments

$$c_{gr} \qquad \begin{pmatrix} g = 1, 2, \ldots, m \\ r = m+1, m+2, \ldots, n \end{pmatrix}.$$

On peut se représenter les $m(n-m)$ derniers éléments comme des variables indéterminées et les $\frac{m(m+1)}{2}$ premiers éléments comme des fonctions de ces variables indéterminées. Et l'on voit ainsi de nouveau que les systèmes (a_{ik}) forment une variété d'ordre $m(n-m)$.

Envisageons maintenant le *système de modules* $\mathfrak{M}$ formé par les $\frac{m(m+1)}{2}$ éléments

$$-\delta_{gh} + \sum_{p=1}^{p=n} w_{gp} w_{hp} \qquad \begin{pmatrix} g, h = 1, 2, \ldots, m \\ g \gtrless h \end{pmatrix},$$

où les w désignent des indéterminées. Si nous posons

$$(5) \qquad u_{pq} = -\delta_{pq} + 2 \sum_{g=1}^{g=m} w_{gp} w_{gq} \qquad (p, q = 1, 2, \ldots, n),$$

il est manifeste que l'on a, pour $q = 1, 2, \ldots, n$ et pour $r = 1, 2, \ldots, n$, les congruences

$$(6) \qquad \sum_{p=1}^{p=n} u_{pq} u_{pr} \equiv \delta_{qr} \qquad (\text{mod}\, \mathfrak{M}),$$

qui montrent que les nombres u_{pq} forment, suivant le système de modules $\mathfrak{M}$, un système *symétrique orthogonal*.

Si l'on remplace les w par des nombres *complexes* c vérifiant les équations

$$(7) \qquad \sum_{p=1}^{p=n} c_{gp} c_{hp} = \delta_{gh} \qquad (g, h = 1, 2, \ldots, m),$$

tous les éléments du système de modules $\mathfrak{M}$ se réduisent à zéro et la congruence (6) devient

$$(8) \qquad \sum_{p=1}^{p=n} a_{pq} a_{pr} = \delta_{qr},$$

où

$$(9) \qquad a_{pq} = -\delta_{pq} + 2 \sum_{g=1}^{g=m} c_{gp} c_{gq}.$$

Le système dont les éléments sont a_{pq} $(p, q = 1, 2, \ldots, n)$ est donc un système symétrique orthogonal (a_{pq}) à éléments complexes. M. Kronecker démontre qu'en prenant successivement pour les systèmes de nombres complexes c ceux qui vérifient les équations (7) et en définissant chaque fois les a_{pq} par les équations (9) on obtient *tous* les systèmes symétriques orthogonaux (a_{pq}) à éléments complexes. A cet effet, il suffit de montrer que les éléments *complexes* a_{ik} d'un système symétrique *orthogonal* (a_{ik}) peuvent eux aussi être mis sous la forme

$$a_{ih} = \sum_{h=1}^{h=n} p_h c_{hi} c_{hk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

tout comme les éléments *réels* a_{ik} de tout système symétrique (a_{ik}), orthogonal ou non; car, une fois ce fait établi, on en déduit, comme dans le cas des éléments a_{ik} réels, que les éléments a_{ik} d'un système symétrique orthogonal à éléments complexes peuvent être représentés par les équations

$$a_{ik} = \sum_{g=1}^{g=m} c_{gi} c_{gk} - \sum_{h=m+1}^{h=n} c_{hi} c_{hk} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n),$$

où les nombres c sont les éléments d'un système orthogonal.

On observera toutefois que ces nombres c ne s'expriment pas *rationnellement* par les nombres a_{ik}. Si l'on demande de former tous les systèmes symétriques orthogonaux (a_{ik}) dont les éléments a_{ik} fassent partie d'un domaine de rationalité donné, il suffit de choisir arbitrairement parmi les grandeurs du domaine de rationalité imposé mn grandeurs b_{gi} telles que l'on ait

$$(10) \qquad \sum_{i=1}^{i=n} b_{gi} b_{hi} = 0 \qquad \left(\begin{matrix} g, h = 1, 2, \ldots, m \\ g < h \end{matrix}\right),$$

et de déterminer ensuite les n^2 éléments a_{ik} en fonction de ces grandeurs b, à l'aide des n^2 équations

$$(11) \qquad a_{ik} = -\delta_{ik} + 2 \sum_{g=1}^{g=m} \frac{b_{gi} b_{gk}}{b_{g1}^2 + b_{g2}^2 + \ldots + b_{gn}^2} \qquad (i, k = 1, 2, \ldots, n).$$

Le nombre des équations de condition (10) est égal à $\frac{m(m-1)}{2}$; on peut choisir *arbitrairement* les b_{gi} où $g \geq i$, qui sont au nombre de $mn - \frac{m(m-1)}{2}$; les autres b_{gi} qui sont au nombre de $\frac{m(m-1)}{2}$ sont alors déterminés par les équations (10) qui deviennent *linéaires* en ces $\frac{m(m-1)}{2}$ inconnues; toutefois le choix arbitraire des premiers b_{gi} doit être fait tel que l'un au moins des déterminants d'ordre m formé à l'aide des mn nombres b_{gi} soit différent de zéro.

Si l'on donne des valeurs particulières à $\frac{m(m+1)}{2}$ des $mn - \frac{m(m-1)}{2}$ grandeurs arbitraires b_{gi}, on ne restreint aucunement la généralité du problème. On peut par exemple prendre les $\frac{m(m-1)}{2}$ grandeurs b_{gi}, pour lesquelles $g < i \leq m$, égales à zéro et les m grandeurs $b_{11}, b_{22}, \ldots, b_{mm}$ égales à l'unité, en laissant indéterminées les $m(n-m)$ autres b_{gi} pour lesquels on a $g > m$. Les quantités b sont alors déterminées univoquement en fonction des quantités a et l'on obtient par suite chaque système symétrique orthogonal (a_{ik}) une et une seule fois par les équations (11).

H. Bruns. — Sur le problème des perturbations séculaires. (543-545).

Imaginons le système de points matériels formé par les centres de masses du Soleil, des planètes et de leurs satellites. Considérons le mouvement du centre de masses α de chaque satellite relativement à sa planète, et le mouvement du centre de masses α de chaque système partiel *planète-satellites* relativement au Soleil. Ces mouvements relatifs peuvent être envisagés comme des mouvements elliptiques à éléments variables. Soient a_α le demi-axe, φ_α l'excentricité, I_α l'inclinaison, Ω_α la longitude du nœud ascendant par rapport au plan choisi comme fondamental, ω_α la distance du péricentre au nœud et M_α l'anomalie moyenne d'un point considéré α. En prenant pour W_α et w_α successivement

$$W_\alpha = \begin{cases} M_\alpha, \\ \omega_\alpha, \\ \Omega_\alpha, \end{cases}$$

$$w_\alpha = \begin{cases} k_\alpha \sqrt{a_\alpha}, \\ k_\alpha \sqrt{a_\alpha} \cos \varphi_\alpha, \\ k_\alpha \sqrt{a_\alpha} \cos \varphi_\alpha \cos I_\alpha, \end{cases}$$

où k_α est une constante qui dépend de la masse du système dont α est le centre de masses, on peut écrire les équations différentielles du mouvement des points α sous la forme canonique

$$\frac{dW_\alpha}{dt} = \frac{\partial(T-U)}{\partial w_\alpha}, \qquad \frac{dw_\alpha}{dt} = -\frac{\partial(T-U)}{\partial W_\alpha},$$

où T est la force vive et U la fonction des forces du système considéré.

Ceci posé, changeons dans le plan fondamental la direction de la droite à

partir de laquelle nous comptons les longitudes; les éléments a_α, φ_α, I_α, ω_α, M_α ne changeront pas; tous les éléments Ω_α augmenteront d'une même quantité positive ou négative; d'ailleurs $T - U$ ne change manifestement pas; on a donc

$$(1) \qquad \sum_\alpha \frac{\partial(T - U)}{\partial \Omega_\alpha} = 0;$$

donc aussi, à cause des équations canoniques,

$$\frac{d}{dt} \sum_\alpha (k_\alpha \sqrt{a_\alpha} \cos\varphi_\alpha \cos I_\alpha) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(2) \qquad \sum_\alpha (k_\alpha \sqrt{a_\alpha} \cos\varphi_\alpha \cos I_\alpha) = \text{const.}$$

Dans le problème des perturbations séculaires, on développe $T - U$ en série trigonométrique et l'on néglige dans ce développement l'ensemble des termes qui dépendent des M_α. Mais alors les a_α sont des constantes et d'autre part le premier membre de l'équation (2) (qui a toujours lieu) est un *maximum* pour $\varphi_\alpha = 0$, $I_\alpha = 0$. En appliquant le raisonnement bien connu de Lejeune-Dirichlet, on en conclut que si les φ et les I ont, à un certain instant, des valeurs suffisamment petites, ces quantités restent *toujours* petites.

C'est peut-être par un raisonnement analogue au précédent, mais applicable au système planétaire lui-même dans toute sa généralité que Lejeune-Dirichlet avait démontré la stabilité de ce système.

J. M.

ANNALES DE LA FACULTÉ DES SCIENCES DE TOULOUSE.

T. III, année 1889 (1).

Legoux (*A.*). — Attraction d'un ellipsoïde homogène, ou composé de couches homogènes, sur un point extérieur.

I. Pour calculer l'attraction exercée par une couche comprise entre deux surfaces ellipsoïdales homothétiques et concentriques dont nous désignerons l'une par (E), P étant le point attiré, O un point intérieur à la couche attirante, l'auteur cherche d'abord quelle doit être la position du point O pour qu'il jouisse de la propriété suivante : tout cône élémentaire de sommet O détachera dans la couche attirante deux masses telles que les forces attirantes qui leur correspondent aient leur résultante dirigée suivant PO. Le point O cherché est à l'intersection du plan polaire du point P par rapport à l'ellipsoïde (E), et de la normale en P à l'ellipsoïde homofocal de (E) qui passe par le point P.

(1) Voir *Bulletin*, XIII_2, p. 156-166.

L'auteur retrouve par un calcul élégant les composantes de la force attractive élémentaire déjà trouvées par Chasles par une méthode purement géométrique; II. Étant donné un ellipsoïde d'axes A, B, C, composé de couches homogènes limitées par des ellipsoïdes homothétiques et concentriques au premier; f, g, h étant les coordonnées de P par rapport aux axes de l'ellipsoïde, la composante suivant l'axe OX de l'attraction de l'ellipsoïde sur le point P est donnée par la formule

$$X = \tfrac{4}{3}\pi BCf \int_0^{\frac{A}{A_1}} \frac{\rho u^2\, du}{\sqrt{[A^2 + u^2(B^2 - A^2)][A^2 + u^2(C^2 - A^2)]}},$$

A_1 étant racine de l'équation

$$\frac{f^2}{A_1^2} + \frac{g^2}{A_1^2 + B^2 - A^2} + \frac{h^2}{A_1^2 + C^2 - A^2} = 1,$$

ρ étant une fonction de u qui désigne la densité des différentes couches attirantes. Si le point attiré est sur la surface externe de l'ellipsoïde, $\frac{A}{A_1} = 1$; si l'ellipsoïde est homogène et de révolution, l'intégration s'effectue immédiatement.

Stouff (*X.*). — Sur certains groupes fuchsiens et sur une extension de la théorie des formes quadratiques. (B, 1-28).

I. Soit un système de modules composé de nombres premiers entre eux deux à deux. Soit L leur produit; soit P_i un produit de modules où chacun d'eux n'entre pas plus d'une fois comme facteur, et P'_i le produit des autres modules. Les substitutions représentées par la formule

$$\left(z, \frac{\alpha P_i z + L\beta}{\gamma z + \delta P_i}\right),$$

où $P_i\alpha\delta - P'_i\beta\gamma = 1$ forment un groupe, α, β, γ, δ étant des entiers. Si H et G sont deux groupes ainsi définis, pour que H contienne G, il faut et il suffit que chacun des modules de G soit un produit des modules de H, chacun de ces derniers n'entrant qu'une fois comme facteur, et que le produit des modules de G soit égal au produit des modules de H. Alors G est *sous-groupe distingué* de H.

II. Quand les modules sont des nombres premiers absolus, le groupe admet un nombre *fini* de substitutions fondamentales. Les substitutions

$$(z, z + L) \qquad \text{et} \qquad \left(z, P_i R_{ik} - \frac{P_i}{z + P_i R'_{ik}}\right),$$

où R_{ik} prend toutes les valeurs inférieures à P'_i et premières avec ce nombre, et où R'_{ik} est un nombre choisi de telle sorte que l'on ait

$$P_i R_{ik} R'_{ik} \equiv 1 \qquad (\text{mod } P'_i),$$

forment un système fondamental. Ces substitutions, suffisantes pour engendrer tout le groupe, ne sont pas en général toutes nécessaires. Elles se ramènent

deux à deux l'une à l'autre. On peut même pousser plus loin la réduction comme le montre M. Stouff sur un exemple numérique.

III. Étant donné un groupe défini par ses modules, M. Stouff considère une expression de la forme

$$ax^2 + bP_ixy + cLy^2,$$

où a, b, c sont des entiers tels que a, c, bP_i n'aient pas de facteurs communs, et où x, y sont respectivement de la forme

$$x_0\sqrt{Q_j}, \quad \text{et} \quad \frac{y_0}{\sqrt{Q_j}},$$

x_0 et y_0 étant entiers. P_i désigne le plus grand produit de modules qui divise le coefficient de xy, ϖ le plus grand commun diviseur de b et de P'_i. Une telle forme s'appellera *forme quadratique attachée au groupe donné*. La substitution à deux variables

$$\left(x, \frac{\alpha Q_j x + \beta L y}{\sqrt{Q_j}}\right), \quad \left(y, \frac{\gamma x + \delta Q_j y}{\sqrt{Q_j}}\right),$$

$$\left(z, \frac{\alpha Q_j z + \beta L}{\gamma z + \delta Q_j}\right),$$

étant une substitution du groupe donné, transformera la forme

$$ax^2 + bP_ixy + cLy^2$$

en une autre qui sera dite *équivalente,* dans laquelle le plus grand commun diviseur entre le multiplicateur de P_ixy et P'_i est encore ϖ, et qui aura même discriminant DP_i.

On nommera *classe* l'ensemble des formes équivalentes à une forme donnée, D, ϖ et P_i sont les mêmes pour toutes les formes d'une classe.

M. Stouff s'occupe ensuite de représenter un nombre entier donné m par une forme donnée

$$m = aQ_jx_0^2 + bP_ix_0y_0 + cQ'_jy_0^2.$$

IV. Le nombre des classes de formes pour lesquelles D, ϖ et P_i sont donnés est limité; pour le démontrer, M. Stouff part des considérations suivantes : étant donnée une substitution $\begin{pmatrix} \lambda, & \mu \\ \nu, & \rho \end{pmatrix}$ telle que $\lambda\rho - \mu\nu = 1$, appelons (B) le groupe de ces substitutions. Considérons le sous-groupe (A), $\begin{pmatrix} \alpha, & \beta L \\ \gamma, & \delta \end{pmatrix}$ tel que $\alpha\delta - \beta\gamma L = 1$. A une substitution du groupe (B) on peut faire correspondre une substitution du groupe (A) telle que le produit de la première par la deuxième appartienne à un certain système fini dit *système de représentants* du groupe (B) dans le groupe (A), système déterminé comme il suit : 1° si μ et L sont premiers entre eux, le produit des deux substitutions sera de la forme $\begin{pmatrix} 0, & -1 \\ 1, & r \end{pmatrix}$, r étant un nombre compris entre 0 et L; 2° si μ et L ont un plus

commun diviseur d, le produit des deux substitutions sera de la forme $\begin{pmatrix} u, & -d \\ t, & r \end{pmatrix}$ r étant compris entre 0 et L, congru à 1 (mod d), $\frac{t}{u}$ étant l'avant-dernière réduite de la fraction $\frac{\nu\beta L + \rho\delta}{d}$ développée en fraction continue. Cela posé, on obtient des représentants de toutes les classes de formes pour lesquelles D, P_i et ϖ sont donnés, en formant dans le sens ordinaire toutes les réduites de déterminant DP_i, dont le nombre est fini, en transformant ces réduites par tous les représentants du groupe (B) dans le groupe (A), et en prenant parmi les formes obtenues celles dont le second coefficient est divisible par ϖP_i, et le troisième par L. Il est possible que l'on obtienne ainsi à la fois plusieurs représentants pour une même classe. M. Stouff donne le moyen de reconnaître si deux représentants sont équivalents ou non.

V. M. Stouff indique un procédé pour connaître le nombre des classes sans être obligé de former des représentants de chaque classe.

VI. M. Stouff se propose ensuite la recherche des points singuliers offerts par l'équation fuchsienne qu'engendre un groupe donné par ses modules. Une substitution de période n peut être caractérisée par l'équation de ses points doubles. Toutes les substitutions qui correspondent à des formes d'une même classe ont des points doubles homologues les uns des autres dans le groupe donné, et, par suite, correspondent à un même point singulier de l'équation fuchsienne.

Réciproquement, étant donnée une forme

$$ax^2 + bP_kP_ixy + cLy^2,$$

avec

$$P_k\left(b^2P_kP_i - 4ac\frac{P'_i}{P_k}\right) = -4\sin^2\frac{\pi}{n},$$

dans laquelle P_i et P_k sont des produits de modules différents, b étant premier avec $\frac{P'_i}{P_k}$, on peut l'identifier avec le premier membre de l'équation des points doubles d'une substitution telle que

$$\left(z, \frac{\alpha P_i z + \beta L}{\gamma z + \delta P_i}\right);$$

les nombres α, β, γ, δ que l'on trouve ainsi n'auront de valeurs entières que pour $n = \infty, 2, 3, 4, 6$. M. Stouff examine en détail chacun de ces cinq cas.

VII. M. Stouff indique plusieurs généralisations de la théorie précédente : 1° Imaginons un système de r substitutions linéaires à coefficients entiers et à déterminant 1

$$\begin{pmatrix} m^{(i)}, & n^{(i)} \\ p^{(i)}, & q^{(i)} \end{pmatrix} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$

puis r systèmes de n nombres entiers tels que

$$a_1^{(i)}, \quad a_2^{(i)}, \quad \ldots, \quad a_n^{(i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, r),$$
$$a_1^{(i)}a_2^{(i)}\ldots a_n^{(i)} = L^{i},$$

qu'on nomme *systèmes de modules*.

Les modules d'un même système sont premiers entre eux deux à deux. $P_j^{(1)}$, $P_j^{(2)}$, ..., $P_j^{(r)}$ désignent des produits de modules correspondants, chaque module ne pouvant figurer plus d'une fois dans le produit correspondant. Soient A, B, Γ, Δ des entiers satisfaisant aux conditions suivantes

$$A\Delta - B\Gamma = P_j^{(1)}, P_j^{(2)}, \ldots, P_j^{(r)}.$$

$$\frac{A+\Delta}{P_j^{(i)}} \quad \text{et} \quad \frac{2\Gamma m^{(i)} n^{(i)} + (\Delta - A)[n^{(i)} p^{(i)} + m^{(i)} q^{(i)}] - 2B p^{(i)} q^{(i)}}{P_j^{(i)}}$$

sont entiers et de même parité;

$$\Gamma n^{(i)2} + (\Delta - A) n^{(i)} q^{(i)} - B q^{(i)2}$$

est divisible par $L^{(i)}$ $(i = 1, 2, \ldots, r)$. $\dfrac{Az + B}{\Gamma(z) + \Delta}$ sera l'expression générale des substitutions d'un groupe.

2° On peut remplacer les nombres entiers par des nombres complexes de la forme $a + bi$, a et b étant entiers.

Lerch. — Sur certains développements en série trigonométrique. (Extrait d'une lettre de M. Lerch à M. Appell). (C, 1-11).

Il s'agit de la série

$$\mathcal{F}(x, s, u) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{[(x-m)^2 + u]^{\frac{s}{2}}};$$

x, u, s sont des quantités réelles; la quantité $\mathcal{R}^2(x) + u$ est positive, $\mathcal{R}(x)$ désignant la plus petite, en valeur absolue, des quantités

$$(x - m) \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Enfin la puissance $[(x-m)^2 + u]^{\frac{s}{2}}$ est prise dans le sens arithmétique.

Lorsque $s - 1$ est positif, ainsi que u, on a la formule qui suit

$$\pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} s\right) \mathcal{F}(x, s, u) = \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) u^{-\frac{s-1}{2}} + 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{A}_n \cos 2n\pi x,$$

en posant

$$\mathcal{A}_n = \int_0^\infty e^{-uz - \frac{\pi^2 n^2}{z}} z^{\frac{s-3}{2}} dz.$$

L'intégrale $\mathcal{A}_n$ est une fonction transcendante entière de la variable complexe s, en sorte que la différence

$$\pi^{-\frac{1}{2}} \Gamma\left(\frac{1}{2} s\right) \mathcal{F}(x, s, u) - \Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right) u^{-\frac{s-1}{2}}$$

est une fonction transcendante entière de la variable s, résultat remarquable, puisque la fonction $\mathcal{F}$ n'était définie que pour les valeurs de s dont la partie réelle est supérieure à l'unité.

L'auteur s'occupe ensuite du cas particulier où $u = 0$. Il montre qu'on a

$$\lim_{u=0} \mathcal{A}_n = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)(\pi n)^{s-1};$$

et dans le cas où s est négatif

$$\lim_{u=0} \sum_{n=1}^{n=\infty} \mathcal{A}_n = \Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{s-1} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n^{1-s}}.$$

Il en conclut, en posant

$$\mathfrak{L}(x, \sigma) = \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos 2n\pi x}{n^\sigma},$$

la formule

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right) \lim_{u=0} \mathcal{F}(x, s, u) = 2\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}}\mathfrak{L}(x, 1-s),$$

en supposant la partie réelle de s négative.

D'autre part, pour les valeurs de s supérieures à l'unité et pour les valeurs réelles de x qui ne sont pas des nombres entiers, on a

$$\lim_{u=0} \mathcal{F}(x, s, u) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} \frac{1}{(x+m)^s}.$$

Soit $\Phi(x, s)$ la fonction analytique de la variable complexe s définie par cette série. Si l'on pouvait démontrer l'identité de cette fonction $\Phi(x, s)$ avec celle qui est donnée par l'expression $\lim_{u=0} \mathcal{F}(x, s, u)$, $(s < 0)$, on en déduirait

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}s\right)\Phi(x, s) = 2\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\pi^{s-\frac{1}{2}}\mathfrak{L}(x, 1-s),$$

formule exacte qu'on peut vérifier en appliquant la méthode dont s'est servi Riemann dans son Mémoire sur la totalité des nombres premiers moindres qu'une limite donnée (*Œuvres*, p. 136).

L'auteur termine par la démonstration de la formule suivante : Soit $E(x)$ un entier tel qu'on ait

$$0 < x - E(x) < 1.$$

Posons $\mathcal{R}(x, s) = \sum_{m=-E(x)}^{m=\infty} \frac{1}{(x+m)^s}$.

On a

$$\mathcal{R}(x, 1-s) = \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\cos\left(2n\pi x - \frac{\pi s}{2}\right)}{n^s}.$$

Si l'on pose $x = \frac{\alpha}{\beta}$, $\alpha < \beta$ étant deux nombres entiers positifs, cette formule nous donne les relations remarquables dues à M. Hurwitz (*Zeitschrift de M. Schlömich*, t. XXVII, p. 86), c'est-à-dire les relations contenues dans la

formule

$$\beta^{1-s} f(1-s \mid \alpha, \beta) = \frac{2\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \sum_{r=1}^{r=\beta} \cos\left(\frac{2r\alpha\pi}{\beta} - \frac{\pi s}{2}\right) f(s \mid r, \beta),$$

en posant

$$f(s \mid r, \beta) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \frac{1}{(r+m\beta)^s}.$$

Andoyer. — Sur un problème de Géométrie. (D, 1-6).

Si l'on considère les systèmes de coniques qui touchent en quatre points une quartique à un seul point double, d'après Clebsch (*voir* § 11 du VIIe Livre des *Leçons sur la Géométrie*) le nombre de ces systèmes, qui est 32, se réduit à 31, si l'on considère seulement les coniques proprement dites : le 32e système est composé de toutes les droites du plan comptées chacune 2 fois. Parmi ces 31 systèmes, il y en a 30 qui contiennent chacun 4 couples de tangentes doubles, chacune des 16 tangentes appartenant à 15 de ces systèmes. Quant au 31e système, Clebsch dit qu'*il contient les* 6 *tangentes à la courbe issues du point double, comptées chacune* 2 *fois.*

Dans un Mémoire inséré au tome LXXXVII des *Sitzungsberichte* de l'Académie des Sciences de Vienne, M. Ameseder affirme qu'il est impossible que le 31e système soit composé de coniques proprement dites, *mais qu'il doit être identique au* 32e *système.*

M. Andoyer se propose de montrer que ce 31e système se compose *des droites passant par le point double, comptées chacune* 2 *fois.* Le nombre 31 des systèmes de coniques de contact doit donc être réduit à 30. On met ainsi d'accord les formules de Clebsch avec celles de M. Cayley. De même le nombre des systèmes de coniques de contact pour une quartique à 2 points doubles est 13, et non pas 15; les deux autres systèmes indiqués par Clebsch sont les faisceaux de droites issues des points doubles et comptées 2 fois. Pour une quartique à 3 points doubles, le nombre des systèmes de coniques de contact sera 4 et non 7; les 3 systèmes à supprimer sont les faisceaux de droites comptées 2 fois, ayant pour sommets les points doubles.

Cosserat (*E.*). — Sur le cercle considéré comme élément générateur de l'espace. (E, 1-81).

I. L'ensemble de deux points s'appellera un *double point.* On appellera *couple* le système formé par l'ensemble d'un double point et d'une sphère passant par ce double point, et *couple simple* le système formé par l'ensemble d'un point simple et d'une sphère passant par ce point.

Imaginons une circonférence C et un point P du plan de cette circonférence, puis tous les couples tels que les sphères passent par C, et que les doubles points soient situés sur C, la droite qui joint les deux points de chaque double point passant par P; quatre de ces couples sont dits en *relation harmonique* si le rapport anharmonique des quatre sphères est égal au rapport anharmonique des droites des quatre doubles points. Il faut deux paramètres pour définir l'un de ces couples. Donnons-nous une relation entre ces deux paramètres; les couples correspondants forment une *corrélation.* Si m doubles points

correspondent à une sphère, et μ sphères à un double point, on dit que la corrélation Γ_μ^m est du $m^{\text{ième}}$ ordre et de la $\mu^{\text{ième}}$ classe. Quatre couples d'une corrélation Γ_1^1 sont en relation anharmonique, et réciproquement les couples qui sont en relation anharmonique avec trois couples fixes engendrent une corrélation Γ_1^1, qu'on appelle aussi *corrélation anharmonique*. Deux corrélations Γ_μ^m, $\Gamma_{\mu'}^{m'}$ ont en commun $(m\mu' + m'\mu)$ couples.

Supposons que la circonférence C fasse partie d'une surface cerclée. Toute sphère passant par C touche la surface en deux points de C. Les droites des doubles points de contact concourent en un point P, et les couples formés par chaque sphère tangente et le double point de contact correspondant engendrent une corrélation anharmonique. Une autre surface cerclée passant par C donnera lieu à une autre corrélation anharmonique relative, en général, à un point P_1 différente de P; on en conclut que deux surfaces cerclées passant par un même cercle C sont en général tangentes en quatre points de ce cercle.

Si les points P et P_1 coïncident, il existe deux sphères passant par C et ayant même double point de contact par rapport aux deux surfaces.

Si les deux corrélations coïncident, les deux surfaces cerclées sont tangentes tout le long du cercle (C), et réciproquement.

Si l'on imagine une surface cerclée passant par C, toutes les surfaces cerclées passant par C et tangentes à la première en tous les points de C peuvent être envisagées comme contenant un même cercle infiniment voisin de C, cercle qui suffit à déterminer la corrélation anharmonique des sphères passant par C et des doubles points de contact. Un cercle (u) dépend de six paramètres u_1, u_2, ..., u_6. Soit $(u + du)$ le cercle infiniment voisin ; si t_1, t_2, ..., t_6 sont des quantités *finies* proportionnelles à du_1, du_2, ..., du_6, on pourra dire que les quantités t sont les coordonnées homogènes d'une corrélation anharmonique sur le cercle (u). Ces corrélations anharmoniques forment une quintuple infinité. Si leurs coordonnées satisfont à des équations linéaires, on aura des systèmes linéaires de corrélations que l'on représentera par les symboles M_4, M_3, M_2, M_1, M_0, l'indice indiquant l'indétermination du système.

Considérons les corrélations engendrées sur un cercle (u) par les cercles infiniment voisins. *Le point* P *correspondant à l'une de ces corrélations est le point qui a même puissance par rapport au cercle* (u) *et au cercle infiniment voisin*. Le cas général est celui où le point P est quelconque.

Si le point P est sur le cercle (u), la corrélation est *singulière*. Le double point dont la droite est tangente en P au cercle (u) et la sphère correspondante constituent le *couple singulier*. S'il y a une infinité de points P en ligne droite, et si cette droite coupe le cercle (u) en deux points distincts, la corrélation est *doublement singulière, triplement singulière* si cette droite est tangente au cercle (u).

II. La condition qui exprime que les deux cercles (u) et $(u + du)$ se rencontrent est l'évanouissement d'une forme biquadratique $N(du)$ des six quantités du_i. Multiplions-la par une expression arbitraire K indépendante des quantités du_i, et soit $M(du) = KN(du)$.

La forme $M(du)$ s'appelle *forme fondamentale* relative au cercle. Son évanouissement exprime que la corrélation relative aux cercles (u), $(u + du)$ est singulière. Il y a trois formes adjointes au sens indiqué par M. Kœnigs [*Sur une classe de formes de différentielles* (*Acta Mathematica*, t. X)]. On les obtient en exprimant que les cercles (u), $(u + du)$ ont deux points communs,

puis, que les deux points communs sont confondus. Ce sont des formes quadratique et biquadratique des différentielles.

Plus généralement, adoptons comme élément générateur de l'espace une courbe dépendant de $(n+1)$ paramètres $u_1, u_2, \ldots, u_n$; la rencontre de deux éléments infiniment voisins s'exprime par l'évanouissement d'une forme $M(u \mid du)$, définie à un facteur près indépendant des différentielles du_i. Remplaçons les quantités du_i par des quantités proportionnelles *finies* t_i, et considérons ces dernières comme les coordonnées d'un point dans l'espace à n dimensions. Si nous exprimons le contact de l'espace linéaire à $(n-1)$ dimensions

$$T_1^1 t_1 + T_2^1 t_2 + \ldots + T_{n+1}^1 t_{n+1} = 0,$$

avec la surface $M(u \mid t) = 0$, nous aurons le système adjoint, composé de $(n-2)$ formes, de M. Kœnigs,

$$\mathfrak{M}_1(u \mid T^1), \quad \mathfrak{M}_2(u \mid T^1), \quad \ldots, \quad \mathfrak{M}_{n-2}(u \mid T^1).$$

De même, en exprimant le contact d'un espace linéaire à $(n-k)$ dimensions avec la surface $M(u \mid t) = 0$, nous obtiendrons un système adjoint de $k^{\text{ième}}$ espèce, composé de $(n-k-1)$ formes

$$\mathfrak{M}_j(u \mid T^1, T^2, \ldots, T^k) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-k-1).$$

III. Adoptons toujours comme élément une courbe dépendant de $(n+1)$ paramètres et soient

$$x = f(z \mid u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = f(z \mid u),$$
$$y = \varphi(z \mid u)$$

ses équations. Nous désignerons par S_j un système de courbes que l'on peut former avec l'élément considéré, l'indice indiquant l'indétermination du système. Soit

$$\theta_i(u_1, u_2, \ldots, u_{n+1}) = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

les relations définissant un système S_{n-k+1}; les courbes du système S_{n-k+1} qui satisfont aux relations

$$\mathfrak{M}_j\left(u \mid \frac{\partial\theta_1}{\partial u}, \frac{\partial\theta_2}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial\theta_k}{\partial u}\right) = 0 \qquad (j = 1, 2, \ldots, n-k+1)$$

sont les *courbes singulières* du système. Elles forment une congruence, et sont tangentes à une certaine surface dite *surface de singularités*, qui est une des nappes de la surface focale de la congruence.

Si $k = n-1$, toutes les courbes d'une congruence peuvent être considérées comme singulières; la surface de singularités coïncide avec la surface focale de la congruence. La surface de singularités d'un système S_{n-k} contenu dans le système S_{n-k+1} est circonscrite à la surface de singularités de S_{n-k+1}. C'est une enveloppe des surfaces de singularités des systèmes S_{n-k+1} qui contiennent ce système S_{n-k}. La surface de singularités d'un système S_{n-k}, contenu dans le système S_{n-k+2} est tangente en un nombre limité de points à la surface de singularités de S_{n-k+2}; c'est une enveloppe des surfaces de singularités des systèmes S_{n-k+2} qui contiennent S_{n-k}.

Une courbe $(u+du)$, infiniment voisine d'une courbe (u) d'un système

S_{n-k+1} et appartenant à ce système vérifie les k équations

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \theta_i}{\partial u_2} du_2 + \ldots + \frac{\partial \theta_i}{\partial u_{n-1}} du_{n-1} = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, k).$$

La courbe (u) sera une *courbe double* du système S_{n-k+1} si ce système d'équations est indéterminé. Cela posé, les courbes d'un système S_{n-k+1} passant par un point P de l'espace forment un système S_{n-k-1} : le lieu du point P tel que l'une des courbes passant par ce point soit une courbe double du système S_{n-k-1} est la surface de singularités de S_{n-k+1}. La courbe double est une courbe singulière de S_{n-k+1}.

IV. Supposant connue la classification des surfaces cerclées due à M. Enneper, j'arrive aux congruences de cercles : les corrélations sur un cercle d'une congruence qui appartiennent à la congruence forment un système M_1. Parmi elles, il y en a quatre singulières, autrement dit, il existe quatre cercles de la congruence infiniment voisins du premier et le rencontrant. Les quatre points de rencontre sont les points focaux. Le lieu des points focaux est la surface focale, à laquelle les cercles de la congruence sont tangents en chacun de leurs points focaux. Les sphères focales sont précisément les sphères des couples singuliers des corrélations singulières. Elles sont tangentes à la surface focale. On peut regarder les équations d'un cercle d'une congruence comme des fonctions des coordonnées d'un point d'une surface, et à chaque point P de la surface faire correspondre l'un des points focaux du cercle qui répond au point P. La transformation ainsi obtenue jouit des propriétés des transformations de contact.

Les corrélations anharmoniques sur un cercle d'un complexe, qui appartiennent à ce complexe, forment un système linéaire M_2. Étant donné un cercle du complexe, il existe trois cercles du complexe infiniment voisins du premier, et le rencontrant chacun en deux points.

Tout cercle du complexe appartient à trois surfaces de la troisième classe du complexe. Les cercles singuliers du complexe forment une congruence, et l'une des nappes de la surface focale de cette congruence est la surface de singularités.

Dans un système de cercles quadruplement indéterminés, toutes les corrélations anharmoniques sur un cercle du système qui appartiennent à ce système forment un système linéaire M_3. Les cercles du système qui passent par un point donné forment une congruence qui peut se transformer par inversion en une congruence de droites.

Enfin dans un système de cercles quintuplement indéterminés, toutes les corrélations anharmoniques sur un cercle du système qui appartiennent à ce système forment un système linéaire M_4.

Les cercles du système qui passent par un point donné forment un complexe auquel on peut faire correspondre par inversion un complexe de droites. Aux droites singulières et à la surface de singularités de ce complexe de droites correspondront les cercles singuliers et la surface de singularités du complexe de cercles.

Seconde Partie. — I. Imaginons cinq sphères S_1, S_2, S_3, S_4, S_5 deux à deux orthogonales, puis deux cercles tracés sur S_5, ayant pour équations, en coor-

données pentasphériques

$$\sum_1^4 a_i x_i = 0, \qquad \sum_1^4 b_i x_i = 0.$$

Si l'on pose $p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i$, les six quantités p_{ik}, liées par la relation

$$\Omega = p_{12} p_{34} + p_{13} p_{42} + p_{14} p_{23} = 0,$$

peuvent être envisagées comme les coordonnées du double point intersection des deux cercles, ou bien comme les coordonnées pluckériennes de la droite de ce double point, le tétraèdre de référence ayant pour sommets les centres des sphères S_1, S_2, S_3, S_4. Un cercle et un double point sont *orthogonaux* lorsque le cercle sera orthogonal à tous les cercles de S_5 passant par le double point. Deux cercles sont dits *en involution* quand par l'un d'eux on peut mener une sphère orthogonale à l'autre. Deux doubles points sont dits *en involution* quand par l'un d'eux on peut mener sur S_5 un cercle orthogonal à l'autre. La condition d'involution sera $\Xi(p, p') = 0$, en désignant par $\Xi(p, p')$ la forme polaire de $\Xi(p) = \Sigma p_{ij}^2$.

Considérons un système linéaire K_3 de doubles points situés sur S_5, défini par l'équation

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0.$$

Toutes les droites des doubles points de K_3 situées sur un cercle C passent par un même point O, foyer du plan du cercle C par rapport au complexe linéaire formé par les droites des doubles points. Soit C′ l'intersection de la sphère et du plan polaire du point O par rapport à la sphère : les points doubles de K_3 situés sur C sont orthogonaux à un cercle C′ qui lui-même est orthogonal à C. La réduction à la forme canonique $\mathcal{A}_{12}\mathcal{P}_{12} + \mathcal{A}_{34}\mathcal{P}_{34}$ de la forme bilinéaire

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4), \qquad p_{ik} = x_i y_k - y_i x_k,$$

au moyen d'une même substitution orthogonale sur les x et sur les y, revient à la recherche de deux droites conjuguées à la fois par rapport à la sphère et au complexe linéaire, et dont l'existence repose sur la proposition suivante : Une quadrique et un complexe linéaire ont quatre droites communes formant un quadrilatère gauche. On peut arriver à la même réduction en cherchant les cercles C qui coïncident avec le cercle C′ qui leur correspond. Il y en a quatre, ils sont de rayon nul; leur détermination dépend d'une équation

$$s^4 + \mathrm{I} s^2 + \mathrm{J} = 0,$$

où $\mathrm{I} = \xi(a)$, $\mathrm{J} = [\omega(a)]^2$, $\xi(a)$ et $\omega(a)$ étant les formes adjointes de $\Xi(p)$ et de $\Omega(p)$.

Si $\mathrm{J} = 0$, le complexe linéaire de droites est spécial; si l'axe du complexe n'est pas une génératrice de la sphère, l'un des points du double point est sur une droite isotrope déterminée; si l'axe du complexe est une génératrice de la sphère, appelons foyers d'un double point situé sur une sphère les deux points cercles de cette sphère qui passent par le double point : tous les doubles points du système K_3 peuvent être réunis par un cercle à un double point fixe (a_1, a_2) et en involution avec un autre point double fixe (b_1, b_2). Les deux points de l'un des doubles points sont les foyers de l'autre.

Dans un système K_2, les doubles points sont en involution avec deux doubles points fixes, ou bien, ils peuvent être réunis par des cercles à deux doubles points fixes. Les foyers des doubles points du système forment aussi un système K_2.

Dans un système K_1 les doubles points sont distribués sur une cyclique. Les doubles points d'un système K_0, au nombre de deux, sont à l'intersection de deux cycliques.

II. Soient

$$\sum_1^5 a_i x_i = 0 \qquad \sum_1^5 b_i x_i = 0$$

les équations d'un cercle en coordonnées pentasphériques. Posons

$$p_{ik} = a_i b_k - a_k b_i, \qquad \text{d'où} \qquad p_{ii} = 0, \quad p_{ik} = -p_{ki}.$$

On aura les dix coordonnées du cercle. Soient α, β, γ, δ, ε les cinq premiers nombres entiers écrits dans l'ordre de permutation naturelle à partir de l'un d'eux, α. Posons

$$\Omega_\alpha(p) = \Omega_\alpha = p_{\beta\gamma} p_{\delta\varepsilon} + p_{\beta\delta} p_{\varepsilon\gamma} + p_{\beta\varepsilon} p_{\gamma\delta}.$$

On aura

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega_3 = \Omega_4 = \Omega_5 = 0.$$

Réciproquement, si des quantités p_{ik} (i, $k = 1, 2, 3, 4, 5$), vérifient les relations précédentes, ce sont les coordonnées d'un cercle.

Si $p_{4\varrho}$ n'est pas nul, les conditions $\Omega_4 = 0$, $\Omega_5 = 0$ sont les conséquences des conditions $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = 0$.

Supposons les dix coordonnées d'un cercle liées par des équations linéaires et homogènes, on aura des systèmes linéaires que l'on désigne par les symboles Λ_5, Λ_4, Λ_3, Λ_2, Λ_1, Λ_0, l'indice indiquant l'indétermination du système.

Le système Λ_0 se compose de cinq cercles. C'est le pentacycle de M. Stéphanos.

III. Étant donné le système Λ_5 le plus général, il existe une sphère K et un complexe linéaire de droites L qui jouissent de la propriété suivante : La droite du double point d'intersection d'un quelconque des cercles du système avec la sphère K engendre un complexe, et ce complexe est L. Réciproquement, les cercles qui coupent une sphère fixe K en un double point dont la droite engendre un complexe linéaire constituent un système Λ_5 de cercles.

Soit

$$\Sigma a_{ik} p_{ik} = 0$$

l'équation qui définit le système Λ_5 de cercles. Supposons d'abord que l'une des quantités $\Omega_i(a)$ n'est pas nulle. Si $\Omega_4 - i\Omega_5 \neq 0$, il existe une sphère K, et un complexe linéaire de droites qui déterminent le système Λ_5. Le complexe n'est jamais spécial. Si $\Omega_4 - i\Omega_5 = 0$, la sphère centrale K est un plan. Si c'est un plan quelconque, les points d'intersection des cercles avec ce plan forment un système linéaire K_3 de doubles points dans ce plan; si c'est le plan de l'infini, les axes des cercles forment un complexe linéaire de droites. Si toutes les quantités $\Omega_i(a)$ sont nulles, deux cas sont à distinguer. Dans le premier, tous les cercles Λ_5 peuvent être réunis par des sphères à deux points fixes, ou bien

ils rencontreront une droite isotrope déterminée. Dans le second cas les plans des cercles passent par un point fixe.

Revenons au cas général : les cercles Λ_5 qui sont des droites forment un complexe linéaire de droites; les cercles Λ_5 qui passent par deux points sont sur une même sphère. Les plans de tous les cercles Λ_5 qui coupent en deux points un cercle X de la sphère centrale, passent par un même point O du plan de ce cercle X, savoir le foyer de ce plan par rapport au complexe linéaire de droites.

Soit $\xi(a)$ la forme adjointe de

$$\Xi(p) = \Sigma p_{ij}^2,$$

et $\omega_i(a)$ la forme adjointe de

$$\Omega_i(p) \qquad (i = 1, 2, 3, 4, 5).$$

La condition

$$\sum_i [\omega_i(a)]^2 = 0$$

exprime que la sphère centrale est de rayon nul; l'équation $\xi(a) = 0$ indique que le complexe linéaire L et son polaire réciproque par rapport à la sphère centrale K sont en involution.

La surface de singularités d'un système Λ_5 est la sphère centrale. Les cercles singuliers sont les cercles de la sphère centrale dont les plans ont pour pôle, par rapport au complexe linéaire L, un point de la sphère centrale. Les sphères passant par les cercles singuliers forment un complexe.

Les cercles d'un système linéaire Λ_4 situés sur une sphère passent tous par deux points A et B de cette sphère. Ceux de ces cercles qui sont des droites forment une congruence linéaire. Tous les cercles de Λ_4 qui passent par un point P de l'espace rencontrent chacun en un second point deux cercles passant par le point P. Il n'y a qu'un cercle Λ_4 passant par deux points quelconques.

Tous les cercles de Λ_4 qui rencontrent C en deux points rencontrent également en deux points une cyclique qui passe par deux points a_1 et a_2 de C. L'enveloppe de leurs plans est la quadrique déterminée par la cyclique et la droite a_1a_2. Si l'on suppose que le cercle C varie en passant par deux points fixes, le lieu des cycliques que l'on associe à chaque cercle est la surface de singularités du complexe de cercles défini par la condition que ses cercles soient des cercles Λ_4 qu'on puisse réunir par des sphères à deux points fixes. Ce qui précède ne s'applique pas lorsque C est un cercle de Λ_4.

Si l'on imagine tous les systèmes Λ_5 qui contiennent les cercles du système Λ_4 considéré, leurs sphères centrales admettent pour enveloppe la surface de singularités de Λ_4, qui est une cyclide à deux points doubles. Tout système Λ_4 peut être défini comme l'ensemble des cercles qui rencontrent deux plans suivant des doubles points engendrant respectivement dans chacun des plans des systèmes linéaires K_3 de doubles points.

Il n'y a qu'un cercle d'un système Λ_3 sur une sphère quelconque de l'espace. Ceux des cercles Λ_3 qui sont des droites forment un système de génératrices d'une quadrique; les cercles Λ_3 qui passent par un point P sont situés sur une cyclide ayant pour point double le point P. L'enveloppe de cette cyclide, quand P varie, est la surface de singularités de Λ_3 : cette dernière est une surface du sixième degré admettant le cercle imaginaire de l'infini comme ligne triple.

Il y a dans l'espace cinq couples de points pouvant être réunis par des sphères à chacun des cercles C d'une congruence linéaire : ce sont les foyers de cinq cercles formant un pentacycle.

Réciproquement, les cercles en involution avec quatre cercles forment une congruence linéaire et sont en involution avec un cinquième cercle qui forme avec les premiers un pentacycle.

Les sphères qui passent par les cercles de la congruence forment un complexe U. Il n'y a que deux sphères de ce complexe U passant par un cercle arbitraire C de l'espace.

Les plans des cercles d'une congruence enveloppent une quadrique. Le lieu des foyers des cercles de la congruence est la surface S_6 de M. Stéphanos.

La surface S_6, qui est du sixième degré, et admet le cercle imaginaire de l'infini comme ligne triple, peut être définie comme le lieu des couples de points qu'on peut lier par des sphères à 4 cercles, savoir, 4 quelconques des 5 cercles du pentacycle associé à la congruence. Il existe un système de 15 cercles ij ($i, j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$), $i \neq j$, le cercle ij n'étant pas distinct du cercle ji, situés sur S_6, et jouissant des propriétés suivantes : deux de ces cercles sont situés sur une même sphère quand leurs symboles n'ont pas d'indice commun : ils sont situés trois à trois sur 15 sphères. Ils peuvent se grouper en 6 pentacycles : les cercles appartenant à un même pentacycle ont un indice commun. On peut former avec ces cercles 20 triples ijk renfermant 3 cercles jk, ki, ij, lesquels se rangent en 10 couples (ijk, lmn). Les cercles de 2 triples associés sont orthogonaux à une même sphère T. Les plans des 15 cercles se coupent par groupes de 6 suivant les centres des 10 sphères T.

Une sphère de l'espace ne contient en général que 2 couples de foyers des cercles de la congruence. Les sphères v telles que les 2 couples de foyers situés sur ces sphères coïncident forment un complexe V. La surface Σ_6 lieu des centres des sphères de rayon nul contenues dans le complexe V est du huitième ordre, elle est touchée par chacune des 10 sphères T le long d'une biquadratique; elle admet le cercle imaginaire de l'infini comme ligne quadruple, et pour points doubles les foyers des 15 cercles ij. Cette surface Σ_6 est la surface focale de la congruence linéaire de cercles.

Les cercles d'un système Λ_1 sont en général répartis sur une surface du dixième degré admettant comme ligne quintuple le cercle imaginaire de l'infini. Ces cercles peuvent être reliés par des sphères à 5 doubles points, d'une infinité de façons : le lieu des doubles points pouvant ainsi servir à la génération de la surface est une ligne double de la surface, c'est une courbe du dixième degré. Le lieu des foyers des cercles Λ_1 est une courbe du dixième degré, intersection de 2 surfaces S_6 de M. Stéphanos : c'est une focale de la surface cerclée engendrée par les cercles Λ_1. Comme cas particulier, les cercles d'une même série d'une cyclide font partie d'un système Λ_1. Les cercles Λ_1 coupent une sphère quelconque en des doubles points dont les droites appartiennent à un complexe linéaire. Enfin les génératrices de la surface réglée formée par les axes des cercles Λ_1 appartiennent à un complexe linéaire de droites.

Legoux (*A.*). — Sur l'intégration de l'équation

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2.$$

(F, 1-2).

M. Legoux indique une méthode d'intégration fondée sur des considérations

de Mécanique rationnelle (position d'équilibre d'un fil placé sur la surface ayant le ds^2 considéré); il applique des considérations analogues à l'intégration de l'équation $ds^2 = f^2\,du^2 + g^2\,dv^2 + k^2\,dw^2$ (position d'équilibre d'un fil dans l'espace).

Stieltjes (*T.-J.*). — Sur la réduction en fraction continue d'une série procédant suivant les puissances descendantes d'une variable. (H, 1-17).

Soit la série

$$S = \frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} - \ldots + (-1)^n \frac{a_n}{x^{n+1}} + \ldots,$$

on pourra, en général, la développer en une fraction continue

$$F = \cfrac{c_0}{x + \cfrac{c_1}{1 + \cfrac{c_2}{x + \cfrac{c_3}{1 + \ddots}}}}$$

Le développement de la $n^{\text{ième}}$ réduite $\frac{P_n}{Q_n}$ suivant les puissances descendantes de x donnera une série dont les n premiers termes coïncident avec deux de S.

F peut se transformer en

$$F' = \cfrac{c_0}{x + c_1 - \cfrac{cc_2}{x + c_2 + c_3 - \cfrac{c_3 c_4}{x + c_4 + c_5 - \ddots}}}$$

Soit $\frac{P'_n}{Q'_n}$ la $n^{\text{ième}}$ réduite de cette nouvelle fraction F', on a

$$\frac{P'_n}{Q'_n} = \frac{P_{2n}}{Q_{2n}}.$$

Si l'on pose

$$A_0 = 1, \qquad A_n = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-1} \\ a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n-1} & a_n & \ldots & a_{2n-2} \end{vmatrix},$$

$$B_0 = 1, \qquad B_n = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \\ a_2 & a_3 & \ldots & a_{n+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_n & a_{n+1} & \ldots & a_{2n-1} \end{vmatrix},$$

on aura

$$c_0 = a_0, \qquad c_{2n-1} = \frac{A_{n-1} B_n}{A_n B_{n-1}}, \qquad c_{2n} = \frac{A_{n+1} B_{n-1}}{A_n B_n}.$$

Considérons une série de quantités α_{ik}, β_{ik} déterminées comme il suit

$$\alpha_{00} = 1,$$

$$\left.\begin{aligned} \alpha_{i,k} &= 0 \\ \beta_{i,k} &= 0 \end{aligned}\right\} \quad \text{si} \quad i > k, \qquad \begin{aligned} \beta_{i,k} &= \alpha_{i,k} + c_{2i+2}\,\alpha_{i+1,k}, \\ \alpha_{i,k+1} &= c_{2i+1}\,\beta_{i,k} + \beta_{i-1,k}. \end{aligned}$$

On a le théorème suivant : « La forme quadratique à une infinité de variables $\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k$ est égale à

$$c_0[\alpha_{0,0} X_0 + \alpha_{0,1} X_1 + \alpha_{0,2} X_2 + \alpha_{0,3} X_3 + \ldots]^2$$
$$+ c_0 c_1 c_2 [\alpha_{1,2} X_1 + \alpha_{1,3} X_2 + \alpha_{1,4} X_3 + \ldots]^2 + c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 [\alpha_{2,2} X_2 + \alpha_{2,3} X_3 + \ldots]^2 + \ldots.$$

De même, la forme quadratique $\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k+1} X_i X_k$ est égale à

$$c_0 c_1 [\beta_{0,0} X_0 + \beta_{0,1} X_1 + \beta_{0,2} X_2 + \ldots]^2$$
$$+ c_0 c_1 c_2 c_3 [\beta_{1,1} X_1 + \beta_{1,2} X_2 + \ldots]^2 + c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 c_5 [\beta_{2,2} X_2 + \ldots] + \ldots,$$

d'où l'on conclut

$$A_n = c_0 \times c_0 c_1 c_2 \times c_0 c_1 c_2 c_3 c_4 \times \ldots \times c_0 c_1 c_2 \ldots c_{2n-2},$$
$$B_n = c_0 c_1 \times c_0 c_1 c_2 c_3 \times \ldots \times c_0 c_1 c_2 \ldots c_{2n-1}.$$

En second lieu, si l'on a identiquement

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty a_{i+k} X_i X_k = \varepsilon_0 [X_0 + \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \ldots]^2$$
$$+ \varepsilon_1 [X_1 + \beta_2 X_2 + \ldots]^2 + \varepsilon_2 [X_2 + \gamma_3 X_3 + \ldots]^2 + \ldots,$$

on a en même temps

$$\frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^3} + \frac{a_2}{x^5} - \frac{a_3}{x^7} + \ldots = \cfrac{\varepsilon_0}{x + \alpha_1 - \cfrac{\varepsilon_1 : \varepsilon_0}{x + \beta_2 - \alpha_1 - \cfrac{\varepsilon_2 : \varepsilon_1}{x + \gamma_3 - \beta_2 - \ldots}}}$$

Comme première application soit

$$(\text{séc}\, x)^k = a_0 + \frac{a_1}{1.2} x^2 + \frac{a_2}{1.2.3.4} x^4 + \ldots;$$

alors l'intégrale

$$\int_0^\infty \left(\frac{2}{e^z + e^{-z}}\right)^k e^{-xz}\, dz$$

donne le développement (divergent)

$$\frac{a_0}{x} - \frac{a_1}{x^3} + \frac{a_2}{x^5} - \frac{a_3}{x^7} + \ldots.$$

D'où l'on conclut

$$\int_0^\infty \left(\frac{2}{e^z + e^{-z}}\right)^k e^{-xz}\, dz = \cfrac{1}{x + \cfrac{1.k}{x + \cfrac{2(k+1)}{x + \cfrac{3(k+2)}{x + \ldots}}}}$$

Cette fraction continue est convergente et représente effectivement e' intégrales si l'on suppose $k > 0$, $x > 0$.

Une autre application donne

$$\int_0^\infty e^{-zx} \sin \operatorname{am} z \, dz = \cfrac{1}{x^2 + l - \cfrac{1.2^2.3k^2}{x^2 + 3^2 l - \cfrac{3.4^2.5k^2}{x^2 + 5^2 l - \cfrac{5.6^2.7k^2}{x^2 + 7^2 l + \ldots}}}},$$

où $l = 1 + k^2$ (k étant le module de $\sin \operatorname{am} z$)

$$\int_0^\infty e^{-xz} \cos \operatorname{am} z \, dz = \cfrac{1}{x + \cfrac{1^2}{x + \cfrac{2^2 k^2}{x + \ldots + \cfrac{(2n-1)^2}{x + \cfrac{(2n)^2 k^2}{x + \ldots}}}}},$$

$$\int_0^\infty e^{-xz} \Delta \operatorname{am} z \, dz = \cfrac{1}{x + \cfrac{k^2}{x + \cfrac{2^2}{x + \ldots + \cfrac{(2n-1)^2 k^2}{x + \cfrac{(2n)^2}{x + \ldots}}}}}.$$

Rouquet (*V.*). — Étude d'un complexe du sixième ordre. (I, 1-20).

Il s'agit du complexe que forment les directrices d'une section plane d'une quadrique donnée. Pour qu'une droite (D), située à distance finie, non tangente à une quadrique, et non isotrope, soit directrice d'une section plane de cette quadrique, (S), il faut et il suffit que le cercle représentatif (A) (suivant Laguerre) du segment aa' que la droite (D) intercepte dans la surface rencontre la droite (Δ) conjuguée de (D) par rapport à (S) : ce point de rencontre F est le foyer correspondant à (D) dans la section de la quadrique par le plan (F, D). Les seules directrices doubles sont les droites parallèles soit aux directions principales de la surface, soit aux quatre directions isotropes de son cône directeur. Il y a sept points dans le plan de l'infini pour lesquels le cône du complexe est indéterminé : ce sont les traces des axes de S, et les points de rencontre de S avec l'ombilicale (cercle de l'infini). Le cône du complexe est du sixième ordre, et de seizième classe. Quand le sommet s'éloigne à l'infini, le cône du complexe se décompose en un cylindre du second degré, et le plan de l'infini compté quatre fois; il est du quatrième degré si S est de révolution.

La courbe du complexe située dans un plan P est homofocale à la section de la quadrique proposée par ce plan, pourvu que le plan considéré ne soit parallèle à aucune des directions isotrope du cône asymptote de (S). Si le plan P est parallèle à l'un des plans principaux de S, la courbe du complexe est une conique homofocale à la conique de section. Les seules directrices situées dans un plan cyclique de la quadrique (S) sont les directrices singulières qui lui sont parallèles. La courbe du complexe est dans le cas général une courbe du dixième degré, admettant la droite de l'infini pour tangente quadruple, et quatre tangentes doubles.

Si le plan P est perpendiculaire à un plan principal de S, la courbe du complexe devient du sixième degré, et admet trois tangentes doubles dont deux seulement à distance finie.

Appell (*P.*). — Sur les équations différentielles homogènes du second ordre à coefficients constants. (K, 1-12).

Soit $\psi(y'', y', y) = 0$ une équation différentielle dont le premier membre est un polynôme homogène irréductible par rapport à une fonction y de la variable x et à ses dérivées, y', y'' : les coefficients de ce polynôme sont supposés *constants*. En posant $y = e^{\int u\,dx}$, l'équation devient $\psi(u^2 + u', u, 1) = 0$ et donne x en fonction de u par une intégrale abélienne. On peut trouver des solutions de l'équation différentielle proposée ayant la forme $y = Ce^{rx}$, C étant une constante arbitraire, r une racine de l'équation $\psi(r^2, r, 1) = 0$. Il s'agit de savoir si ces intégrales sont *singulières* ou *particulières*.

Mettons l'équation $\psi(u^2 + u', u, 1) = 0$ sous la forme

$$u'^n \varphi_0(u) + u'^{n-1} \varphi_1(u) + \ldots + u' \varphi_{n-1}(u) + \varphi_n(u) = 0.$$

Soit r une racine de l'équation $\varphi_n(r) = 0$, si pour $u = r$ l'équation en u' n'a qu'une racine nulle, alors $u = r$ est une intégrale *particulière* par rapport à la branche de la fonction intégrale qui s'annule pour $u = r$. S'il y a plusieurs valeurs de u' qui tendent vers zéro pour $u = r$, elles se partagent en systèmes circulaires. Pour chacun d'eux, on aura un développement de la forme

$$u' = a(u - r)^{\frac{p}{q}}[1 + a_1(u - r)^{\frac{1}{q}} + a_2(u - r)^{\frac{2}{q}} + \ldots],$$

p et q étant des entiers positifs; si l'on a $\frac{p}{q} \geqq 1$, l'intégrale $u = r$ sera *particulière;* mais si $\frac{p}{q} < 1$, l'intégrale $u = r$ sera *singulière*.

Ainsi si l'équation $\psi(u^2 + u', u, 1) = 0$ est telle que l'intégrale abélienne $x = \int \frac{du}{u'}$ soit de première espèce, toutes les solutions de la forme $u = r$ sont singulières.

M. Appell applique ces remarques au cas d'une équation homogène du second ordre et du second degré et s'occupe en particulier du cas où il y a *deux* intégrales particulières, et *deux* singulières.

Cosserat (*E.*). — Sur les formes bilinéaires. (M, 1-12).

Le problème de la réduction de la forme bilinéaire

$$P = \sum a_{\alpha\beta} x_\alpha y_\beta,$$

à la forme canonique

$$\lambda_1 \xi_1 \eta_1 + \ldots + \lambda_n \xi_n \eta_n,$$

par des substitutions orthogonales opérées les unes sur les variables x_1, x_2, ..., x_n, les autres sur les variables y_1, y_1, ..., y_n, est identique au suivant : Déterminer deux substitutions orthogonales qui, appliquées respectivement aux

deux formes

$$\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2 \quad \text{et} \quad \sum\left(\frac{\partial P}{\partial x_i}\right)^2,$$

les réduisent à des sommes de carrés.

Après avoir démontré cette proposition, M. Cosserat s'occupe du cas où le polynôme bilinéaire est de la forme $P = \frac{1}{2}\sum a_{ik}p_{ik}$, en posant $p_{ik} = x_i y_k - x_k y_i$. Le premier membre de l'équation en s relative à cette forme bilinéaire P considéré comme forme quadratique des $2n$ variables $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ est un carré parfait. Cette équation ne contient que des puissances paires de la variable, et l'équation transformée en $(-s^2)$ est l'équation en s relative à la forme quadratique $\sum\left(\frac{\partial P}{\partial y_i}\right)^2$. Il est de plus possible, en opérant la *même* substitution sur les x et sur les y, d'amener le polynôme P à la même forme $\frac{1}{2}\sum A_{ik}P_{ik}$.

M. Cosserat se borne au cas où $n = 5$: la réduction de P dépend de la solution du problème suivant : « Trouver les maxima et les minima de P, lorsque les variables x et y restent assujetties aux relations

$$x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_5^2 = 1, \qquad y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_5^2 = 1.$$

Le minimum λ est donné par l'équation

$$D = \lambda^2(\lambda^4 - I\lambda^2 + J)^2 = 0,$$

où $I = \sum_{ij} a_{ij}^2$, $J = \sum_{\alpha} \Omega_\alpha(a)$, [$\alpha, \beta, \ldots, \varepsilon$ sont les cinq premiers nombres entiers écrits dans l'ordre de permutation naturelle à partir de l'un d'eux, α, et l'on a

$$\Omega_\alpha(a) = a_{\beta\gamma}a_{\delta\varepsilon} + a_{\beta\delta}a_{\varepsilon\gamma} + a_{\beta\varepsilon}a_{\gamma\delta}].$$

Soient λ_1, λ_2 les racines *distinctes* de $\lambda^4 - I\lambda^2 + J = 0$, P prendra la forme canonique $P = \lambda_1(\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1) + \lambda_2(\xi_3\eta_4 - \eta_3\xi_4)$. On peut, dans le cas où l'on a $\lambda_1 \neq \lambda_2$, calculer *a priori* les coefficients d'une des substitutions que l'on doit employer pour opérer la réduction à la forme canonique. Dans le cas où J est nul, le problème est impossible.

Bioche (*Ch.*). — Sur les systèmes de courbes qui divisent homographiquement les génératrices d'une surface réglée (N, 1, 41).

Première Partie. — M. Bioche résume les théorèmes généraux et établit les formules utiles à l'étude qu'il veut faire. Il rappelle la proposition suivante due à M. O. Bonnet : « Si la ligne de striction coupe les génératrices d'une surface réglée sous un angle constant, elle est ligne géodésique et réciproquement ». De l'équation des lignes asymptotiques, il déduit que les génératrices d'une surface réglée sont divisées homographiquement par ces lignes si la surface n'est pas à plan directeur; la division se fait en segments proportionnels pour les surfaces à plan directeur, et en segments égaux pour celles de ces surfaces dont le paramètre de distribution est constant.

Soient K le paramètre de distribution, θ l'angle de la génératrice avec la ligne de striction, s l'arc de la ligne de striction; la condition nécessaire et suffisante

pour que deux surfaces gauches soient applicables l'une sur l'autre est que le système des fonctions K et θ de l'arc s soit le même pour les deux surfaces. Parmi toutes les surfaces gauches applicables les unes sur les autres, il y en a une à plan directeur (Bour). On peut toujours déformer une surface de façon que la ligne de striction devienne ligne de courbure, si cette ligne n'est pas trajectoire orthogonale des génératrices.

Deuxième Partie. — M. Bioche démontre d'abord que les trajectoires orthogonales sont les seules lignes qui, coupant, *toutes sous un même angle*, les génératrices d'une surface gauche, déterminent sur ces génératrices des divisions homographiques. Pour les surfaces développables, les trajectoires sous un angle constant divisent toujours les génératrices en segments proportionnels. Ceci s'applique aux trajectoires des tangentes à une courbe plane. M. Bioche s'occupe ensuite du cas où l'angle, constant pour chaque courbe, varie d'une courbe à l'autre.

Les surfaces cherchées satisfont aux deux conditions

$$\theta = \text{const.}, \qquad \frac{1}{K} = \mu(\sin\theta)\, s + \mu',$$

μ et μ' étant des constantes.

Si $\mu \neq 0$, $\theta = 90°$, on obtient des conoïdes $\xi = Ce^{\mu \operatorname{arc\,tang} \frac{y}{x}}$. Si $\theta \neq 90°$, on a des hélicoïdes tels que la projection sur le plan directeur de la ligne de striction soit une spirale logarithmique. M. Bioche appelle ces surfaces des *conoïdes* et des *hélicoïdes logarithmiques*, et il appelle *surfaces logarithmiques* les surfaces applicables sur celles-ci; elles satisfont aussi au problème.

Pour $\mu = 0$, $\theta \neq 90°$ on obtient des surfaces applicables sur des hyperboloïdes de révolution.

Les trajectoires homographiques sur ces surfaces sont telles qu'en chaque point le plan tangent fait un angle constant avec le plan central correspondant. On en déduit que les trajectoires qui divisent les génératrices en segments proportionnels sont elles-mêmes divisées en arcs proportionnels par les génératrices. Pour les surfaces logarithmiques, il y a toujours une des trajectoires du système homographique qui est orthogonale aux génératrices. Sur les hélicoïdes et conoïdes logarithmiques les trajectoires homographiques sont des *hélices cylindroconiques* (courbes que M. Tissot a étudiées). Sur les surfaces logarithmiques quelconques, les trajectoires homographiques ont leur rayon de courbure géodésique proportionnel à l'arc. L'hélicoïde minimum est la seule surface sur laquelle les lignes asymptotiques constituent un système de trajectoires homographiques : sur les hélicoïdes logarithmiques, la trajectoire orthogonale qui appartient au système logarithmique est une asymptotique : les génératrices d'un hélicoïde logarithmique sont les normales principales d'une hélice logarithmique. Il y a deux catégories de surfaces développables telles que les trajectoires coupant les génératrices sous un angle constant, angle qui varie d'une trajectoire à l'autre, forment un système homographique : dans la première catégorie la première courbure ω de l'arête de rebroussement est constante; le développement de la surface sur un plan donne pour l'arête de rebroussement et les trajectoires des cercles. Dans la deuxième catégorie, c'est le produit ωs qui est constant (s étant l'arc de l'arête de rebroussement), le développement de ces surfaces sur un plan donne pour l'arête de rebroussement et les trajectoire des spirales logarithmiques.

Troisième Partie. — M. Bioche établit que, si un système de courbes divise homographiquement les génératrices d'une surface gauche, le système conjugué les divise aussi homographiquement; il en conclut que les génératrices d'une surface gauche sont divisées homographiquement par les courbes de contact des cônes dont les sommets sont en ligne droite, et que réciproquement si un système de lignes d'ombre divise homographiquement les génératrices d'une surface réglée, les rayons émanent de points en ligne droite. Le système conjugué des trajectoires orthogonales des génératrices donne pour les surfaces à plan directeur des courbes telles que, en tous leurs points, le plan tangent à la surface fait un angle constant avec le plan central correspondant. Sur les hélicoïdes et conoïdes logarithmiques, le système homographique de trajectoires a pour conjugué le système des trajectoires orthogonales.

Si un système de courbes divise en segments égaux les génératrices d'une surface gauche, le système orthogonal les divise homographiquement; réciproquement, si deux systèmes orthogonaux divisent simultanément les génératrices d'une surface gauche en segments homographiques, l'*une* des divisions se réduit à une division en segments égaux. Sur une surface développable les deux systèmes orthogonaux pourront donner *tous deux* des divisions en segments proportionnels : les tangentes aux différentes courbes d'un même système aux points où elles sont rencontrées par une même génératrice sont parallèles. Ces propositions s'appliquent aux systèmes de tangentes à une courbe plane.

Si un système de lignes de courbure divise homographiquement les génératrices d'une surface gauche, l'autre système les divise aussi homographiquement, et pour l'un des systèmes la division se fait en segments égaux : les seules surfaces réglées dont les génératrices soient divisées homographiquement par les lignes de courbure sont les surfaces à paramètre de distribution constant dont la ligne de striction est ligne de courbure : une surface gauche dont le paramètre de distribution est constant peut être appliquée sur une autre dont les génératrices sont divisées homographiquement par les lignes de courbure, pourvu que la ligne de striction ne soit pas trajectoire orthogonale des génératrices, comme dans le cas où la surface donnée est une surface de binormales de courbe à torsion constante, ou un hélicoïde minimum. Si la ligne de striction est trajectoire orthogonale des génératrices, la surface à lignes de courbures homographiques est la surface gauche de révolution.

Quatrième Partie. — L'auteur se propose de chercher dans quels cas on peut trouver, sur une surface gauche, un système de lignes géodésiques qui divise homographiquement les génératrices : il arrive à la conclusion suivante :

« S'il existe sur une surface gauche un système de lignes géodésiques divisant homographiquement les génératrices, cette surface peut s'obtenir par la déformation d'une surface du second degré. Il n'existe en général qu'un de ces systèmes, composé des transformées de celles des génératrices qu'on n'a pas laissées rectilignes. Sur les surfaces applicables sur un hyperboloïde de révolution, il existe un second système constitué par les transformées des méridiens. Sur les surfaces développables, les géodésiques partant d'un même point de la surface constituent un système homographique, de même que celles dont les tangentes aux points situés sur une même génératrice sont parallèles; ces dernières divisent les génératrices en segments proportionnels : à un système de géodésiques divisant les génératrices en segments proportionnels correspond un

système orthogonal, également formé de géodésiques, et divisant les génératrices de la même façon.

Carvallo (*E.*). — Extension de la méthode de Gräffe. — Méthode pratique pour la résolution numérique complète des équations algébriques ou transcendantes. (O, 1, 40).

Soient z une quantité imaginaire, z' une valeur approchée de z. *L'erreur absolue* de z' est $z'-z$. La *grandeur* de cette erreur est $\operatorname{mod}(z'-z)$; l'*erreur relative* est $\frac{\operatorname{mod}(z'-z)}{\operatorname{mod} z}$. L'imaginaire $z'-z$ est *négligeable* devant z quand $\frac{\operatorname{mod}(z'-z)}{\operatorname{mod} z}$ est inférieur à l'erreur relative qu'on tolère sur z.

On rangera les racines d'une équation suivant l'ordre de grandeur décroissante des modules, sauf à laisser arbitraire l'ordre des racines de même module. Deux racines sont *séparées* quand la deuxième sera négligeable devant la première. Si deux racines ne sont pas séparées, si l'on élève ces racines à une même puissance μ, on pourra concevoir μ assez grand pour que les nouveaux nombres obtenus se séparent. On aura donc à former l'équation aux carrés des racines de la proposée, puis l'équation aux carrés des racines de la transformée, etc. M. Carvallo préfère former l'*équation aux carrés changés de signe* des racines. Pour trouver le coefficient d'un terme quelconque de la transformée, on remarque qu'il égale le carré du coefficient correspondant de l'équation donnée, moins le double produit des deux coefficients qui le comprennent, plus le double produit des deux coefficients qui comprennent ceux-ci, et ainsi de suite jusqu'à ce qu'on arrive à l'un des termes extrêmes de l'équation supposée ordonnée. Considérons les coefficients d'une même puissance de l'inconnue dans les transformées successives. S'il arrive qu'à partir d'un certain rang le coefficient en question soit toujours le carré du précédent, les doubles produits qui s'y ajoutent étant négligeables devant ce carré, on dit que le coefficient est *régulier* à partir de la transformée correspondante. M. Carvallo s'occupe du nombre des transformées à faire pour séparer deux racines consécutives. Puis, il démontre le théorème suivant : « Pour que les racines α_p et α_{p+1} du polynôme $f(x)=x^m+A_1x^{m-1}+\ldots+A_px^{m-p}+\ldots+A_m$ soient séparées, il faut et il suffit que $\left(\frac{A_{p+k}}{A_p}\right)^{\frac{1}{k}}$ soit négligeable devant $\left(\frac{A_p}{A_{p-l}}\right)^{\frac{1}{l}}$ pour toutes les valeurs de k et de l. Le polynôme $f(x)$ se sépare alors en deux fragments : le premier, obtenu en négligeant les termes qui suivent A_p, donne les p premières racines; le second, obtenu en négligeant les termes qui précèdent A_p, donne les $m-p$ dernières racines. On peut donc séparer l'équation en fragments tels que chacun d'eux donne les racines d'égal module. Prenons l'une des équations partielles obtenues : si elle a des coefficients réels, on divise les racines par le module commun, on se débarrasse, s'il y a lieu, des seules racines réelles possibles, ± 1, et l'équation finale sera réciproque. L'équation résolvante aura toutes ses racines réelles et pourra être résolue par la méthode de Gräffe.

Si l'équation partielle a des coefficients imaginaires, on posera

$$x=e^{i\theta}=\frac{1+iz}{1-iz}, \qquad \text{d'où} \qquad \left(z=\operatorname{tang}\frac{\theta}{2}\right).$$

L'équation en z a toutes ses racines réelles et peut être résolue par la méthode de Gräffe.

Pratiquement, et sauf des cas exceptionnels, on est averti que l'équation se fragmente sur le terme A_p quand le coefficient A_p est devenu régulier.

Si α est la valeur approchée, réelle ou imaginaire pour une des racines distinctes ou non de l'équation $f(x) = 0$, posons $x = \alpha + z$, et soit

$$f(\alpha + z) = B_0 z^m + B_1 z^{m-1} + \ldots + B_m.$$

Pour calculer pratiquement les coefficients $B_0, B_1, \ldots, B_m$, on remarque que

$$f(x) = B_0(x-\alpha)^m + B_1(x-\alpha)^{m-1} + \ldots + B_{m-1}(x-\alpha) + B_m;$$

B_m est le reste de la division de $f(x)$ par $(x-\alpha)$. Soit

$$f(x) = (x-\alpha) f_1(x) + B_m;$$

B_{m-1} est le reste de la division de $f_1(x)$ par $(x-\alpha)$ et ainsi de suite.

Soit $f(x)$ une fonction holomorphe à l'intérieur d'un cercle, et supposons que l'on cherche les racines de l'équation $f(x) = 0$ situées à l'intérieur de ce cercle. Transportons l'origine au centre du cercle; soit

$$f(x) = f(0) + x f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^n}{n!} f^{(n)}_{(0)} + R.$$

Supposons $f(0) \neq 0$. On peut trouver un nombre n tel que R soit négligeable devant $f(0)$ pour tous les points du cercle. Alors, dans le calcul des racines, on peut négliger R.

L'auteur donne de nombreux exemples.

Kœnigs (*G.*). — Étude bibliographique. — La Géométrie réglée et ses applications.

Chapitre I. — L'espace réglé se transforme en un espace réglé soit par homographie, soit par dualité : il suit de là qu'il y a avantage à définir une courbe gauche ou une surface par ses tangentes.

Considérons un espace ponctuel rapporté à des coordonnées homogènes ponctuelles. Soient x_1, x_2, x_3, x_4 les coordonnées d'un point x et

$$\xi_1 x_1 + \xi_2 x_2 + \xi_3 x_3 + \xi_4 x_4 = 0$$

l'équation d'un plan; $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4$ seront les coordonnées homogènes d'un plan ξ. Une droite déterminée par deux points x, y ou à l'intersection de deux plans ξ, η aura six coordonnées homogènes

$$\begin{aligned}
r_{12} &= \rho(\xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2) = \sigma(x_3 y_4 - y_3 x_4),\\
r_{13} &= \rho(\xi_1\eta_3 - \eta_1\xi_3) = \sigma(x_4 y_2 - y_4 x_2),\\
r_{14} &= \rho(\xi_1\eta_4 - \eta_1\xi_4) = \sigma(x_2 y_3 - y_2 x_3),\\
r_{34} &= \rho(\xi_3\eta_4 - \eta_3\xi_4) = \sigma(x_1 y_2 - y_1 x_2),\\
r_{42} &= \rho(\xi_4\eta_2 - \eta_4\xi_2) = \sigma(x_1 y_3 - y_1 x_3),\\
r_{23} &= \rho(\xi_2\eta_3 - \eta_2\xi_3) = \sigma(x_1 y_4 - y_1 x_4).
\end{aligned}$$

Ces coordonnées vérifient la relation quadratique

$$\omega(r) = 2(r_{12}r_{34} + r_{13}r_{42} + r_{14}r_{23}) = 0.$$

Si nous posons

$$\omega(r, r') = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\omega}{\partial r_{12}} r'_{12} + \ldots + \frac{\partial\omega}{\partial r_{23}} r'_{23}\right);$$

la condition de rencontre des deux droites r et r' s'exprimera par l'équation

$$\omega(r, r') = 0.$$

Exprimons les paramètres r_{ik} en fonction linéaire de six nouveaux paramètres $x_1, x_2, \ldots, x_6$, le déterminant de la substitution linéaire n'étant pas nul; soit $\xi(x) = \omega(r)$, on aura $\xi(x, x') = \omega(r, r')$. A tout système de six variables $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$, liées par une relation quadratique $\xi(x) = 0$ de discriminant différent de zéro, on peut faire correspondre une droite déterminée de l'espace, l'équation $\xi(x, x') = 0$ exprimant que les deux droites x, x' se rencontrent.

On appelle *faisceau* l'ensemble des droites issues d'un point dans un plan. Un faisceau est déterminé par deux droites, a, b : toutes les autres ont des coordonnées de la forme

$$x_i = \lambda a_i + \mu b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6).$$

Si l'on prend quatre droites α, β, γ, δ du faisceau, que l'on désigne par ρ, σ, τ, υ les valeurs correspondantes de $\frac{\lambda}{\mu}$, on aura

$$(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = (\rho, \sigma, \tau, \upsilon).$$

Trois droites qui se coupent forment un triangle ou un trièdre. Dans les deux cas, indifféremment, on appellera *hyperfaisceau* l'ensemble des droites qui rencontrent les trois droites données. Soient a, b, c trois droites d'un hyperfaisceau. Les coordonnées d'une droite quelconque de l'hyperfaisceau seront de la forme $x_i = \lambda a_i + \mu b_i + \nu c_i$.

On appellera *espace réglé* l'ensemble de toutes les droites de l'espace, *complexes* les systèmes de droites à triple indétermination, *congruences*, *séries réglées*, *ensembles de droites* les systèmes d'indétermination *double*, *simple* ou *nulle*.

Chapitre II. — *Les complexes linéaires de droites.* — Un complexe est dit *linéaire* lorsque parmi les droites d'un faisceau arbitraire, il n'y en a qu'une qui fasse partie du complexe. Les droites d'un complexe linéaire issues d'un point P engendrent un plan qu'on appellera le *plan polaire* du point. Les droites d'un complexe linéaire tracées dans un plan passent par un point fixe du plan, le *foyer* ou le *pôle* de ce plan. On appelle *faisceau du complexe* les faisceaux dont *toutes* les droites font partie du complexe.

Soient O et Π un point et un plan *unis* (le plan contient le point), leurs correspondants polaires sont un plan π' et un point o', *unis*. On appelle *droites conjuguées* d et d' deux droites telles que l'une contient les pôles des plans passant par l'autre : toute droite x qui coupe deux droites conjuguées fait partie du complexe, et toute droite du complexe qui coupe une droite d coupe aussi sa conjuguée d'. Deux couples de droites conjuguées forment quatre droites portées sur une même quadrique. Une droite du complexe est sa propre conjuguée.

Si l'on considère quatre plans passant par une droite et leurs quatre pôles, leurs rapports anharmoniques sont égaux : ceci a lieu même si la droite fait partie du complexe. Si l'on imagine une quadrique du complexe (c'est-à-dire dont les génératrices d'un système sont des droites du complexe), les génératrices du second système sont associées deux à deux en génératrices conjuguées. Le pôle d'un plan mené par une génératrice d de la quadrique appartenant au complexe est justement le point de d où ce plan est tangent à la quadrique. Tout complexe linéaire définit sur chacune de ses droites une correspondance homographique entre les points et les plans de cette droite, qu'on appellera *corrélation normale du complexe.*

Un complexe linéaire permet de réaliser une *transformation dualistique de l'espace.*

Soit $\omega(x)$ la forme quadratique fondamentale

$$f(x) = A_1 x_1 + \ldots + A_6 x_6 = 0$$

l'équation du complexe linéaire. Les droites qui rencontrent une droite donnée forment un *complexe linéaire spécial* dont la droite donnée s'appelle la *directrice.* Pour un tel complexe on a $\Omega(A) = 0$, $\Omega(A)$ étant la forme adjointe de $\omega(x)$. M. Klein appelle l'expression $\Omega(A)$ l'*invariant* du complexe.

Soit z une droite quelconque d'un complexe linéaire non spécial, u sa conjuguée, on a

$$\frac{\partial \Omega}{\partial A_i} = \lambda z_i + \mu u_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

et λ est déterminé par l'équation

$$\Omega(A) - \lambda \sum_1^6 (A_i z_i) = 0.$$

LE VAVASSEUR.

MATHEMATISCHE ANNALEN, publiées par F. Klein, W. Dyck et A. Mayer.

Tome XXXII; 1888 (1).

Kiepert (*L.*). — Sur la transformation des fonctions elliptiques pour un degré de transformation composé. (1-135).

Dans les recherches sur la transformation des fonctions elliptiques, on s'est jusqu'ici surtout occupé, en ce qui concerne le développement effectif des calculs, du cas où le degré de transformation n est premier. On laissait de côté le cas des nombres composés parce qu'au point de vue théorique il suffit de savoir en somme que, en général, une transformation de degré ab s'obtient en effectuant d'abord une transformation de degré a, puis une transformation de degré b.

---

(1) Voir *Bulletin*, t. XV$_2$, p. 123, 1891.

D'autre part, dans les méthodes employées jusqu'ici, les difficultés que présentent les calculs numériques augmentent d'autant plus lorsque n est un nombre composé que le degré des équations modulaires croît beaucoup plus rapidement que le degré de transformation. Ainsi, avec les notations de Jacobi, lorsque n est égal à 30, le degré de l'équation modulaire en u et v est relativement à chacune des variables égal à 72.

Il y avait cependant avantage à ne point se limiter au cas où le nombre n est premier. L'étude du cas d'un nombre composé montre que les calculs nécessaires pour la transformation de degré ab se présentent alors sous une forme beaucoup plus simple qu'avec l'emploi des procédés antérieurs.

Soient J l'invariant absolu de la fonction elliptique donnée, $\bar{J}$ l'invariant absolu de la fonction elliptique transformée; il existe entre ces deux quantités une équation dont on peut facilement déterminer le genre ρ qui relativement au degré de l'équation est un nombre petit. On peut dès lors trouver des quantités auxiliaires ξ telles qu'entre ξ, J et $\bar{J}$ existent des équations

$$F(\xi, J) = 0, \qquad F_1(\xi, \bar{J}) = 0,$$

qui relativement à J et $\bar{J}$ sont de degré inférieur à l'équation entre J et $\bar{J}$. Si $\rho = 0$, auquel cas n est un des nombres

$$2, \quad 3, \quad 5, \quad 7, \quad 13;$$
$$4, \quad 6, \quad 8, \quad 9, \quad 10, \quad 12, \quad 16, \quad 18, \quad 25,$$

Klein et Gierster ont établi par une voie purement algébrique que l'on peut exprimer J et $\bar{J}$ comme fonctions rationnelles d'une quantité auxiliaire ξ. Si $\rho = 1$, il est nécessaire d'avoir recours à la théorie des fonctions elliptiques pour généraliser le résultat précédent et pour établir que J et $\bar{J}$ peuvent s'exprimer rationnellement en fonction d'une quantité ξ et d'un radical portant sur une fonction du troisième ou du quatrième degré en ξ. Et ainsi de suite si ρ est égal ou supérieur à 2.

Mais il y a avantage à ne pas introduire, dans le cas d'un degré de transformation composé, un paramètre unique ξ, mais bien plusieurs paramètres. C'est ce qu'établit l'auteur dans les premiers paragraphes de son Mémoire et il en donne des applications nombreuses à différents degrés de transformation. Il ne sera pas inutile d'indiquer rapidement les nombreuses applications que l'auteur a faites de sa théorie :

Section.	
1, 2	Consacrées à la théorie générale
3	$n = 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^\alpha$
4	$n = 3, 9, 27, 81, 243, \ldots, 3^\alpha$
5	$n = 5, 25, 125; 7, 49; \ldots, a^\alpha$ (a premier)
6	$n = 2a$; 6, 10, 14, 22, 26; 11
7	$n = 4a$; 12, 20, 28
8	$n = 8a, 16a, \ldots, 2^\alpha a$; 24, 48, 96; 40, 80.
9	$n = 3a$; 15, 21
10	$n = 9a$; 18, 45
11	$n = 6a$; 30.

Gross (*W.*). — Sur les combinants des systèmes de formes binaires qui correspondent à des courbes planes rationnelles. (136-150).

§ 1. Généralités sur les courbes rationnelles. Définition des concomitants. Fonctions génératrices. Combinants élémentaires. Faisceaux de courbes reliés à une courbe donnée.

§ 2. Applications des résultats précédents aux courbes rationnelles du troisième ordre.

§ 3. Contributions à la théorie des courbes rationnelles du quatrième ordre.

Baur (*L.*). — Sur la théorie des idéaux de Dedekind (151-156).

Ventura Reyes y Prosper. — Sur les propriétés graphiques des figures centriques. (157-158).

Sur la démonstration sans l'emploi de la section par un plan et par suite sans avoir recours aux points et droites impropres des propriétés graphiques des figures centriques dont le centre est un point propre.

Pasch (*M.*). — Sur les droites et les plans impropres. (159-160).

Remarques sur la Note précédente. L'auteur montre comment la démonstration de Ventura Reyes y Prosper permet de simplifier l'introduction des droites et des points impropres en Géométrie.

Voss (*A.*). — A la mémoire de Axel Harnack (161-174).

Carl Gustav Axel Harnack, né à Dorpat le 7 mai 1851, mort à Dresde le 3 avril 1888, a été successivement privat-docent à l'Université de Leipzig, en 1875; professeur de Mathématiques à l'École technique supérieure de Darmstadt, en 1876; professeur de Mathématiques au Polytechnikum de Dresde, depuis 1877.

Nous donnons d'après Voss la liste de ses travaux :

I. — Dans les *Mathematische Annalen :*

1. *Sur l'emploi des fonctions elliptiques dans la géométrie des courbes du troisième degré.* Dissertation inaugurale. Leipzig, t. IX, p. 1; 1875.

2. *Sur la théorie des formes cubiques ternaires,* t. IX, p. 218.

3. *Sur l'emploi des coordonnées homogènes dans l'étude des différentielles algébriques,* t. IX, p. 371.

4. *Sur le nombre des branches des courbes planes algébriques,* t. X, p. 189.

5. *Sur la représentation des courbes gauches du quatrième ordre de première espèce et de leur système de sécantes par des fonctions doublement périodiques,* t. XII, p. 47.

6. *Remarque sur la Géométrie : sur les surfaces réglées du quatrième ordre,* t. XIII, p. 49.

7. *Sur une propriété des coefficients de la série de Taylor,* t. XIII, p. 555.

8. *Notice sur la représentation au moyen de paramètre algébrique de l'intersection de deux surfaces du second ordre,* t. XV, p. 560.

9. *Sur la série trigonométrique et la représentation des fonctions arbitraires*, t. XVIII, p. 213.

10. *Simplification des démonstrations dans la théorie de la série de Fourier*, t. XIX, p. 235.

11. *Correction à ce Mémoire*, t. XIX, p. 521.

12. *Application de la série de Fourier à la théorie des fonctions d'une variable complexe*, t. XXI, p. 305.

13. *Les théorèmes généraux sur la relation entre les fonctions d'une variable réelle et leurs dérivées.* Première Partie, t. XXIII, p. 344. Seconde Partie, t. XXIV, p. 217.

14. *Note sur l'application d'une multiplicité linéaire continue sur une multiplicité discontinue*, t. XXIII, p. 285.

15. *Sur le contenu des* Punktmenge, t. XXV, p. 421.

16. *Remarques sur la théorie de l'intégrale double*, t. XXVI, p. 566.

17. *Sur les vibrations des cordes*, t. XXIX, p. 486.

18. *Sur la seconde démonstration de Cauchy pour la convergence de la série de Fourier et sur une ancienne méthode de Poisson*, t. XXXII.

II. — Dans les *Sitzungsberichte* de la Société de Physique et de Médecine d'Erlangen :

1. *Sur l'emploi des fonctions elliptiques dans la géométrie des courbes du troisième ordre*, 13 juillet 1874.

2. *Sur la théorie des formes cubiques ternaires*, 8 février 1875.

3. *Sur une démonstration du théorème d'Abel*, 12 juillet 1875.

III. — Dans les *Berichte* de la classe de Mathématiques et de Physique de la Société saxonne des Sciences de Leipzig :

1. *Contribution à la théorie de l'intégrale de Cauchy*, 12 novembre 1885.

2. *Démonstration d'existence dans la théorie du potentiel dans le plan et dans l'espace*, 2 mai 1886.

3. *Sur la représentation d'une fonction arbitraire par les fonctions de Fourier-Bessel*, 12 décembre 1887.

IV. — Dans le *Zeitschrift für Mathematik und Physik* de Schlömilch :

1. *Sur les constructions linéaires des courbes planes du troisième ordre*, t. XXII, p. 38.

2. *Sur la théorie de la conduction de la chaleur dans les corps solides*, t. XXXII, p. 91.

V. — Dans d'autres journaux :

1. *Sur les différentielles algébriques* (*Ann. di Matem.*, t. IX_2, p. 302).

2. *Théorie de la série de Fourier* (*Bull. Darb.*, t. CVI_2; 1883).

3. *Sur les méthodes les plus simples pour le calcul approché des surfaces planes* (*Civil Ingenieur*, t. XXVIII).

VI. — Discours et *Festchriften* :

1. *Sur la notion générale d'espace et son application dans l'étude de la nature* (*Sitzb. nat. Gesell. Isis*, 1878).

2. *Sur la théorie de la conduction de la chaleur dans les corps solides* (*Festchrift* de la Société *Isis* de Dresde, 14 mai 1885).

3. *Étude de la nature et philosophie naturelle.* Conférence à la Société *Isis* de Dresde. Leipzig; 1885.

4. *Sur l'emploi de l'infini en Mathématiques,* p. 17-29 du *Festschrift* publié pour le soixante-dixième anniversaire de Th. Harnack par ses fils.

5. *Importance de Leibniz dans l'histoire des Mathématiques,* Dresde; 1887.

VII. — Analyses et comptes rendus :

1. Compte rendu du Traité de Mathématiques publié par Schlömilch, Heger et Reidt, à Breslau, 1879, dans le tome XXIX du *Civil Ingenieur.*

2. Analyses nombreuses de travaux allemands dans le présent *Bulletin des Sciences mathématiques et astronomiques,* de 1876 à 1886.

3. Une série d'articles de Mathématiques dans l'*Encyclopédie* de Ersch et Gruber; en particulier les articles : Fraction continue, Courbure, Cercle, etc.

VIII. — Ouvrages publiés à part :

1. *Éléments du Calcul différentiel et intégral,* 1 vol. Leipzig; 1881.

2. *Traité de Calcul différentiel et intégral de J.-A. Serret.* Traduction en trois volumes, Leipzig; 1884-1885.

3. *Les fondements de la théorie du potentiel logarithmique et des fonctions potentielles dans le plan,* 1 vol. Leipzig; 1887.

4. Publication de Hankel : *Les éléments de la Géométrie projective exposés synthétiquement.* Leipzig; 1875.

Harnack (*A.*). — Sur la seconde démonstration de Cauchy pour la convergence des séries de Fourier et sur une méthode plus ancienne de Poisson. (175-202).

Le Mémoire célèbre de Dirichlet *Sur la convergence des séries de Fourier* (*J. de Crelle*, t. 4) commence par une critique de la démonstration donnée par Cauchy dans les *Mémoires de l'Académie des Sciences,* t. VI, 1827, et Dirichlet remarque que ce travail de Cauchy était le seul qu'il connût sur cet objet. Cependant le Tome XII (fascicule 19) du *Journal de l'École Polytechnique* (1823) contenait déjà les recherches de Poisson sur la convergence des séries trigonométriques et des séries cylindriques et d'autre part le Tome II des *Exercices de Mathématiques* de Cauchy, paru en 1827, contient une nouvelle démonstration de la convergence des séries de Fourier donnée par Cauchy à la fin de sa *Théorie des résidus* dans un Chapitre sur les résidus des fonctions exprimées par des intégrales définies (p. 341-376). Les deux auteurs ne considèrent pas seulement la série ordinaire ordonnée suivant les multiples entiers de l'argument et que Dirichlet a seule considérée, mais ils prennent aussi le cas plus général où les paramètres dépendent d'une équation transcendante quelconque donnée.

Harnack se propose dans le Mémoire présent :

1° D'exposer les parties essentielles du travail de Cauchy qui paraît être tombé dans un oubli immérité (Riemann n'en fait non plus aucune mention dans son Mémoire de 1854) et de montrer dans quelles conditions les résultats qui y sont obtenus sont valables;

2° De modifier l'exposé de Cauchy et de montrer comment, dans le cas général où les paramètres suivent une loi quelconque, la convergence des séries dépend

toujours de la convergence de l'intégrale connue de Dirichlet, tout aussi bien que dans le cas plus simple examiné par Dirichlet;

3° De présenter la méthode de Poisson [*Mémoire sur la distribution de la chaleur dans les corps solides* (*J. de l'Éc. Poyt.*, t. XII)], en montrant qu'elle repose en fait sur le calcul des résidus.

Riecke (*E.*). — Sur l'action éprouvée par des anneaux au repos dans un liquide incompressible. (203-212).

Reproduction d'un Mémoire paru dans les *Nachrichten d. K. Gesell. d. W. zu Göttingen* en novembre 1887 où l'auteur donne une démonstration plus générale de la proposition connue de Kirchhoff. L'auteur cite en terminant les résultats énoncés en 1870 par W. Thomson, mais sans démonstration, *On the Forces experienced by solids immersed in a moving Liquid* (*Proc. Edinb. R. S.*).

Lie (*S.*). — Classification et intégration des équations différentielles ordinaires entre x et y qui admettent un groupe de transformation. (203-281).

Ce Mémoire est la reproduction d'un travail paru en 1883 dans *Lie Norweg. Archiv* et qui contient de nombreux et importants résultats.

Section I. — Classification de toutes les équations différentielles ordinaires entre x et y qui admettent un groupe de transformation entre ces variables.

§ 1. Groupes qui ne laissent invariable aucune équation différentielle du premier ordre.

§ 2. Groupes qui laissent invariables deux et seulement deux équations différentielles du premier ordre.

§ 3. Groupes qui ne laissent invariable qu'une seule équation différentielle du premier ordre.

§ 4. Groupes qui laissent invariables une infinité d'équations différentielles du premier ordre.

§ 5. Réduction d'un groupe quelconque à sa forme canonique.

Section II. — Intégration des équations différentielles.

§ 1. Théorie de l'intégration des équations différentielles à transformations infinitésimales connues de la forme $X(x)p + Y(y)q$.

§ 2. Intégration des équations différentielles à transformations infinitésimales connues de la forme $X(x)p + Y(xy)q$.

§ 3. Intégration des équations différentielles à transformations infinitésimales connues de la forme $X(xy)p + Y(xy)q$.

Küpper (*C.*). — L'énumération comme source d'erreur dans la Géométrie moderne (282-289).

Discussion critique des résultats communiqués par M. de Jonquières dans les *Comptes rendus* de novembre 1887.

Hurwitz (*A.*). — Sur les formes algébriques qui peuvent être transformées univoquement en elles-mêmes. (290-308).

L'auteur se propose de déterminer toutes les formes algébriques

$$f(s, z) = 0,$$

qui peuvent se transformer en elles-mêmes par une transformation univoque réciproque

$$s' = \varphi(s, z), \qquad z' = \psi(s, z),$$

ou, ce qui revient au même, de déterminer toutes les surfaces de Riemann sur lesquelles existe une correspondance algébrique (1, 1) voque, et cela dans le cas où le genre p de la surface est supérieur à l'unité. Il arrive aux résultats suivants :

Toute transformation univoque d'une forme algébrique en elle-même est périodique, c'est-à-dire que si, en partant d'une position P quelconque, on forme la suite P, P′, P″, ... des positions qui se déduisent successivement les unes des autres par l'emploi de la transformation, cette suite est fermée; en d'autres termes, il existe un nombre entier n tel que $P^{(n)}$ est identique au point P de départ.

La période n d'une transformation univoque d'une forme algébrique en elle-même ne peut pas dépasser une certaine limite qui dépend du genre p.

La plus grande valeur que puisse prendre n est égale à $10(p-1)$.

Toute forme algébrique qui possède une transformation univoque en elle-même de période n peut être mise sous la forme

$$F(s^n, z),$$

la transformation univoque correspondante étant de la forme

$$s' = e^{\frac{2i\pi}{n}} s, \qquad z' = z.$$

Kneser (*A.*). — Démonstration élémentaire de la représentation des fonctions elliptiques comme quotients de séries uniformément convergentes. (309-330).

1. Introduction des fonctions $\Theta(u)$, $H(u)$.
2. Lemmes généraux d'Analyse.
3. Développement de la fonction $\operatorname{sn} u$ suivant les puissances de u.
4. La fonction $\operatorname{sn} u$ comme quotient de deux séries uniformément convergentes.
5. Définition et théorème d'addition de la fonction $\wp(u)$.
6. Développement en série de la fonction $\wp(u)$.
7. Convergence uniforme de la série $\sigma(u)$.

Krause et *Mohrmann*. — Sur le développement des fonctions doublement périodiques de deuxième et de troisième espèce en séries trigonométriques. (331-341).

Dans deux Mémoires sur ce sujet publiés dans le tome XXX des *Mathema-*

tische Annalen. M. Krause a démontré que le développement des fonctions doublement périodiques de deuxième et de troisième espèce, dans le cas où le nombre des zéros surpasse le nombre des infinis, se ramène au développement des quantités

$$\frac{\vartheta_g(nv + na, n\tau)}{\vartheta_3(v, \tau)}$$

et il fut alors conduit à deux méthodes *indirectes* de solution du problème en question. MM. Krause et Mohrmann présentent ici trois méthodes *directes* pour arriver au résultat.

Hilbert (*D.*). — Sur la représentation des formes définies comme somme des carrés. (342-350).

Une forme algébrique d'ordre pair n à coefficients réels contenant m variables homogènes s'appelle *définie* si elle prend pour tout système de valeurs réelles des m variables une valeur positive et si en outre son discriminant est différent de zéro.

On sait que toute forme quadratique définie de m variables peut être mise sous forme d'une somme de m carrés de formes linéaires réelles. De même toute forme binaire définie peut se mettre sous forme d'une somme de deux carrés de deux formes réelles. L'auteur s'est demandé si ce mode de représentation en somme de carrés pouvait toujours s'appliquer. Dans le cas où $n = 4$ et $m = 3$ on a la proposition suivante :

« Toute forme ternaire biquadratique définie peut se mettre sous forme d'une somme de trois carrés de formes réelles quadratiques. »

Mais la proposition ne peut pas être étendue au delà des cas précédemment cités. L'auteur montre que parmi les formes définies d'ordre n pair à m variables, il y en a toujours qui ne peuvent pas se mettre sous forme d'une somme finie de carrés de formes réelles.

Il n'y a exception à cette proposition générale que dans les cas particuliers où

$$\begin{array}{ll} n = 2, & m \text{ quelconque}, \\ n \text{ quelconque}, & m = 2, \\ n = 4, & m = 3. \end{array}$$

Klein (*F.*). — Sur les fonctions sigma hyperelliptiques. (Deuxième Mémoire) (351-380).

Ce Mémoire est une suite du Mémoire publié dans le Tome XXVII des *Mathematische Annalen* auquel se rattachent en particulier les travaux de Wiltheiss (*Math. Ann.*, Bd. XXIX, p. 272) et de Brioschi (*Ann. di Matem.*, t. XIV_2, p. 241). L'auteur expose ici rapidement les résultats auxquels il est parvenu depuis et qu'il a exposés dans ses leçons en été 1887 et en hiver 1887-88.

§ 1. Rappel de quelques définitions et de quelques propriétés.
§ 2. Intégrales de seconde espèce.
§ 3. De la périodicité des fonctions σ.
§ 4. Représentation des fonctions ϑ à l'aide des fonctions σ.

§ 5. Les fonctions σ elliptiques pour un argument à plusieurs termes.

§ 6. Généralisation correspondante de σ dans le cas où $p = 2$.

§ 7. Passage à une valeur quelconque de p. Détermination des intégrales correspondantes.

§ 8. Périodicité des intégrales.

§ 9. Définition des fonctions σ générales.

§ 10. Quelques propriétés des fonctions σ.

§ 11. Sur les développements en séries des fonctions σ suivant les puissances croissantes de w.

§ 12. Préparations au calcul du premier terme des développements en séries.

§ 13. Calcul effectif du premier terme.

§ 14. Périodicité des fonctions σ. Passage aux fonctions ϑ.

§ 15. Remarques finales.

Burkhardt (*H.*). — Contributions à la théorie des fonctions σ hyperelliptiques. (381-442).

L'auteur se propose de développer quelques-unes des idées de M. Klein sur la façon de considérer les fonctions σ hyperelliptiques, en ayant recours aux méthodes et aux procédés de Weierstrass et de Riemann.

Section I. — Intégrales.

§ 1. Formes des intégrales prises comme formes fondamentales.

§ 2. Intégrales de seconde espèce possédant des points de discontinuité différents.

§ 3. Façon dont se comportent dans le voisinage d'un point les intégrales de première et de deuxième espèce.

§ 4. Façon dont se comportent dans le voisinage d'un point quelconque les intégrales de troisième espèce.

§ 5. Détermination de chemins déterminés (chemins des périodes) sur la surface de Riemann.

§ 6. Étude de la fonction Q pour une variation quelconque d'un argument.

§ 7. Sur le logarithme du rapport anharmonique de quatre points.

§ 8. Q considéré comme fonction analytique de quatre variables indépendantes.

§ 9. Relations bilinéaires entre les périodes de première et de deuxième espèce, d'après Weierstrass.

§ 10. Relations bilinéaires d'après Riemann.

Section II. — Formes de passage.

§ 11. La fonction $\overline{Q}(x, y) = Q_{\overline{x}\,\overline{y}}^{\overline{x}\,\overline{y}}$.

§ 12. La fonction $e^{\frac{1}{2}\overline{Q}(x, y)}$.

§ 13. Sur l'emploi des variables homogènes dans l'étude des fonctions plurivoques.

§ 14. L'expression primaire $\Omega(x, y)$, en particulier pour p impair.

§ 15. L'expression primaire $\Omega(x, y)$ dans le cas où p est pair.

§ 16. Remarques.

Section III. — Fonctions sigma.

§ 17. Définition.

§ 18. Infinis et zéros.

§ 19. Connexion entre les fonctions σ à 2ν et à $2\nu - 2$ arguments.

§ 20. Périodicité des fonctions sigma.

§ 21. Les fonctions sigma ne dépendent que des sommes d'intégrales w_α.

§ 22. Cas particulier où les sommes d'intégrales ont de petites valeurs.

§ 23. Les fonctions sigma sont des fonctions univoques entières de sommes d'intégrales.

§ 24. Les fonctions sigma sont des fonctions univoques entières des coefficients de φ et ψ.

§ 25. Valeur de $\sigma_{\varphi_{p+1}, \psi_{p+1}}$ lorsque les arguments ont la valeur zéro.

§ 26. Les premiers termes des séries sigma en fonction de y, dy.

§ 27. Les premiers termes des séries sigma en fonction des quantités w.

Pick (*G.*). — Sur la réduction des différentielles hyperelliptiques à la forme rationnelle. (443-449).

Réduction des différentielles hyperelliptiques à une somme des fractions normales dans le cas où le polynôme qui apparaît au dénominateur de la différentielle n'est pas décomposé en facteurs. (*Voir* sur le même sujet HERMITE, *Bulletin*; 1883.)

Peano (*G.*). — Intégration par séries des équations différentielles linéaires. (450-456).

Emploi de la considération des nombres complexes pour établir la proposition suivante :

Soient données les équations différentielles linéaires homogènes

$$\frac{dx_1}{dt} = r_{11}x_1 + \ldots + r_{1n}x_n,$$

$$\frac{dx_n}{dt} = r_{n1}x_1 + \ldots + r_{nn}x_n,$$

où les r_{ij} sont des fonctions réelles de la variable t, continues dans l'intervalle (p, q) auquel appartiennent toutes les valeurs de t, que nous allons considérer. Si l'on substitue dans les seconds membres des équations proposées, à la place de $x_1, \ldots, x_n$, n constantes arbitraires $a_1, \ldots, a_n$ et si l'on intègre entre t_0 et t, on obtiendra n fonctions $a'_1, \ldots, a'_n$ de t. Si l'on substitue de même dans les seconds membres des équations proposées à la place des $x_1, \ldots, x_n$ les fonctions $a'_1, \ldots, a'_n$ et si l'on intègre de t_0 à t, on obtiendra n nouvelles fonctions $a''_1, \ldots, a''_n$. On déduira de même de ces nouvelles fonctions $a''_1, \ldots, a''_n$ d'autres fonctions $a'''_1, \ldots, a'_n$ et ainsi de suite. Les n séries

$$x_i = a_i + a'_i + a''_i + \ldots$$

seront convergentes pour toutes les valeurs de t dans l'intervalle (p, q); leurs sommes sont des fonctions de t qui satisfont aux équations données, et qui, pour $t = t_0$, prennent les valeurs $a_1, \ldots, a_n$.

Dyck (*W.*). — Contributions à l'*Analysis situs*. Premier Mémoire. Variétés à une et à deux discussions. (457-512).

L'auteur, après avoir passé en revue dans une introduction intéressante les divers travaux principaux publiés jusqu'ici sur l'*Analysis situs*, se propose de développer dans le présent Mémoire et dans un Mémoire où les variétés ou espaces à plus de deux dimensions seront étudiées, les résultats qu'il avait déjà communiqués à la Société des Sciences de Leipzig en 1885 et 1886.

L'auteur arrive par de simples considérations géométriques à déterminer les caractéristiques topologiques des différentes variétés et retrouve ainsi les caractéristiques de Kronecker (*Monatsb. d. Berlin. Ak.*, p. 159 et 688; 1869). En fait, il s'agit surtout ici, comme dans le second Mémoire de l'auteur de la détermination au point de vue topologique, des caractères d'éléments *donnés algébriquement*.

Le domaine de l'*Analysis situs* est encore beaucoup plus vaste et la détermination des caractères d'éléments donnés d'une façon quelconque, et non plus algébriquement car cela peut fort bien être impossible, est loin d'être actuellement une chose facile. Les travaux de M. Dyck seront lus et étudiés certainement avec le plus grand profit par ceux qu'intéressent les considérations de cette nature.

Braunmühl (*A. von*). — Sur le groupe de Göpel des caractéristiques thêta à p termes qui sont formées avec des tiers de nombres entiers. Relations fondamentales auxquelles satisfont les fonctions thêta correspondantes. (543-544).

Extension des résultats déjà obtenus par l'auteur dans un Mémoire paru dans les *Abhandlungen der k. bayr. Academie der Wiss.*, II, CLXVI. Bd., II. Abtheil. On appelle *caractéristiques* à p termes les symboles

$$(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_p \\ \alpha'_1 & \alpha'_2 & \dots & \alpha'_p \end{pmatrix}.$$

Lilienthal (*R. v.*). — Sur la courbure des faisceaux de courbes. (545-565).

On peut considérer une surface comme une variété simple continue des courbes; le problème le plus général de la courbure se rapportera alors à une variété continue à deux dimensions de courbes. C'est une variété des courbes de cette nature que l'auteur considère. La théorie des systèmes de rayons de Kummer, la théorie des coordonnées curvilignes de Lamé se présentent comme cas particuliers du problème général. Les travaux de Voss (*Math. Ann.*, Bd. 16 et 23) se rapportent à la même question.

Ratner (*E.*). — Sur une propriété de certaines équations différentielles linéaires irréductibles. (566-582).

L'auteur s'est proposé d'étendre aux équations différentielles de degré quelconque les résultats obtenus par M. Hurwitz (*Math. Ann.*, t. XVII) relative-

ment aux intégrales de l'équation différentielle

$$az y'' = by' + y.$$

L'équation précédente est la seule équation du second ordre à laquelle s'applique la méthode. L'auteur montre comment on peut former des équations du troisième ordre et d'ordre supérieur dont les solutions donnent naissance à des quantités transcendantes.

Hurwitz (*A.*). — Sur des propriétés arithmétiques de certaines fonctions transcendantes. (583-588).

Le Mémoire précédent fournit à M. Hurwitz l'occasion de revenir sur les propositions qu'il avait données auparavant et de présenter une généralisation de ses résultats.

Citons les théorèmes suivants :

La valeur de

$$\varphi(\xi, \eta) = \frac{1 + \frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi(\xi+\eta)}\frac{1}{2!} + \frac{1}{\xi(\xi+\eta)(\xi+2\eta)}\frac{1}{3!} + \ldots}{1 + \frac{1}{\xi+\eta} + \frac{1}{(\xi+\eta)(\xi+2\eta)}\frac{1}{2!} + \frac{1}{(\xi+\eta)(\xi+2\eta)(\xi+3\eta)}\frac{1}{3!} + \ldots}$$

est toujours irrationnelle, quelles que soient les valeurs rationnelles de ξ, η, pourvu que $\frac{\xi}{\eta}$ ne soit ni nul, ni infini, ni entier négatif.

Soient $f(x)$ et $g(x)$ deux fonctions entières à coefficients entiers de x, assujetties à la seule condition que f soit de degré inférieur à g et que les équation $f(x) = 0$ et $g(x) = 0$ n'admettent aucune racine entière négative. La série

$$y = 1 + \frac{f(0)}{g(0)} z + \frac{f(0)\,f(1)}{g(0)\,g(1)} \frac{z^2}{2!} + \frac{f(0)\,f(1)\,f(2)}{g(0)\,g(1)\,g(2)} \frac{z^3}{3!} + \ldots$$

est telle que parmi les rapports $y : y' : y'' : \ldots : y^{(r)}$ (où r est le degré de g) l'un au moins est irrationnel, quand on attribue à z une valeur rationnelle quelconque différente de zéro.

Kœnigsberger (*L.*). — Sur les courbes rectifiables. (589-595).

Recherches sur les théorèmes obtenus par M. G. Humbert dans son Mémoire *Sur les courbes planes rectifiables* (*Journal de Mathématiques*, t. IV; 1888). Raison d'être de ces théorèmes. Définition générale des courbes rectifiables.

Gutzmer (*A.*). — Un théorème sur les séries entières. (596-600).

La moyenne arithmétique des carrés des modules de toutes les valeurs que prend la série entière

$$\Phi(x) = \sum_0^\infty e_k x^k,$$

sur le cercle $|x| = r$ (où r est inférieur au rayon du cercle de convergence) est égale à la somme des carrés des modules de tous les termes.

Tome XXXIII, 1889.

Killing (*G.*). — La composition des groupes de transformation finis continus. Deuxième Partie. (1-48).

Suite du Mémoire paru dans le Tome XXVI, p. 252, des *Math. Ann.* L'auteur s'occupe ici tout particulièrement de la fonction des groupes simples, c'est-à-dire des groupes qui ne possèdent pas de sous-groupes invariables.

Le Mémoire constitue un tout par lui-même et l'auteur y donne des démonstrations nouvelles des théorèmes qu'il avait déjà obtenus précédemment. L'auteur trouve toute une série de groupes simples présentant des propriétés inconnues jusqu'ici. Les contributions apportées ainsi à la théorie des groupes de transformation nous paraissent des plus importantes. Nous ne pouvons songer à en donner ici une idée. Disons simplement que M. Killing est arrivé à toute une série de propositions en faisant l'étude complète de l'équation caractéristique dont Lie avait déjà montré l'importance qui conduit à la solution de la question : « Trouver tous les sous-groupes à deux termes du groupe $X_1 f, \ldots, X_r f$ qui contiennent le sous-groupe à un terme $\eta_1 X_1 f + \ldots + \eta_r X_r f$.

Schur (*F.*). — Sur la théorie des nombres complexes formés avec n unités fondamentales. (49-60).

Si l'on considère les nombres complexes appelés *finis*, c'est-à-dire tels que les opérations effectuées sur ces nombres ne conduisent pas dans un domaine d'un nombre de dimensions supérieur à n, on peut considérer un nombre complexe comme un point d'un tel espace déterminé par ses n coordonnées. Alors un calcul quelconque dans lequel apparaissent plusieurs nombres complexes et en particulier un nombre complexe variable dans tout l'espace à n dimensions, en d'autres termes une fonction d'une variable complexe fait correspondre, à tout point du domaine un autre point du même domaine. Nous pouvons donc dire qu'une fonction d'une variable complexe définit une transformation dans ce domaine à n dimensions.

En particulier l'addition et la multiplication de deux nombres complexes dont l'un est variable définissent deux faisceaux de ∞^n transformations de la variété à n dimensions. L'auteur se propose de déterminer quelles formes particulières doivent posséder ces faisceaux de transformations pour que les lois de l'associativité et de la commutativité subsistent et pour que les deux transformations soient reliées entre elles par la loi de distributivité. Rappelons que déjà en 1884 Poincaré avait indiqué dans les *Comptes rendus* la relation qui existe entre la théorie des transformations et la théorie des nombres complexes. Et même on peut dire que les matrices de Cayley (1854) que Cayley appelait lui-même *matrice de substitution* et qui comprennent toute la théorie des quantités complexes, comme l'ont montré les Peirce, ont en réalité pris naissance dans la considération des transformations. Dans le Mémoire présent, le point de vue est cependant un peu différent, il se rattache plus directement aux travaux de Lie.

Stroh (*E.*). — Sur une propriété fondamentale du procédé de transvection et son emploi dans la théorie des formes binaires. (61-107).

Si l'on considère la transvection non pas comme un procédé, mais comme une opération qui permet de former à l'aide de deux formes binaires données f, φ ou bien de trois formes ternaires f, φ, ψ une nouvelle forme $(f\varphi)^t$, $(f\varphi\psi)^t$, on est conduit à se demander à quelles lois simples est assujettie cette espèce d'opération. La détermination des lois auxquelles satisfait la transvection considérée comme opération permet, lorsqu'elle a été nettement établie, de conduire uniformément et simplement les calculs les plus compliqués.

§ 1. Loi distributive et loi commutative pour la transvection.

§ 2. Relation entre les transvections de trois formes binaires.

§ 3. Loi associative pour la transvection.

§ 4. Conséquences de la loi associative pour les transvections de trois formes.

§ 5. Théorèmes généraux sur les transvections d'un nombre quelconque de formes.

§ 6. Théorèmes sur la formation des transvections linéairement indépendantes.

§ 7. Démonstration que les formes d'un groupe sont linéairement indépendantes.

§ 8. Établissement de toutes les relations linéaires qui existent entre les transvections simples d'un nombre quelconque de formes.

§ 9. Application aux groupes de quatre formes du quatrième ordre.

§ 10. Nombre de formes qui existent dans un groupe de transvections simples.

§ 11. Spécialisation pour les formes de même ordre.

§ 12. Groupes de transvections multiples.

§ 13. Transvections multiples de formes du quatrième ordre.

§ 14. Connexion entre les groupes de transvections multiples.

§ 15. Sur une espèce particulière de groupes.

§ 16. Développement des covariants asyzygétiques de degré quelconque dans un système de formes simultanées.

§ 17. Les syzygants entre des transvections simples.

§ 18. Les syzygants entre transvections simples de trois et de quatre formes binaires.

§ 19. Les syzygants de poids 1, 2, 3 et 4.

§ 20. Réduction des syzygants entre transvections multiples à des syzygants entre transvections simples.

§ 21. Les syzygants dans le système complet de formes relatif à une forme binaire.

§ 22. Représentation typique de syzygants.

Krause (*M.*). — Sur le développement des fonctions doublement périodiques de deuxième et de troisième espèce en séries trigonométriques. (108-118). (Troisième Mémoire).

Suite des recherches sur le développement en séries trigonométriques des fonctions

$$\frac{\vartheta_\alpha(nv + na, n\tau)}{\vartheta_\beta(v, \tau)}.$$

Voir les Tomes XXX et XXXI des *Mathematische Annalen*.

Pringsheim (*A.*). — Sur la convergence des produits infinis. (119-154).

Les théorèmes fondamentaux sur la convergence des produits infinis ont été démontrés tout d'abord par Cauchy dans son *Cours d'Analyse algébrique* (1821) à l'aide de la théorie des logarithmes et des séries logarithmiques. Ce procédé peut être le plus simple, puisque de la sorte toute la théorie des séries infinies se trouve d'un seul coup réduite à la théorie des séries infinies, mais ce procédé n'est peut-être pas le plus logique, et il ne paraît pas inutile de déduire directement les conditions de convergence des séries infinies de la définition même de ces produits. L'auteur se propose, dans ce Mémoire, d'établir d'une façon purement élémentaire, et sans introduire la connaissance des transcendantes logarithmiques, le criterium de convergence de ces produits.

§ 1. Définition de la convergence d'un produit infini et établissement des conditions nécessaires et suffisantes.

§ 2. Produits de la forme $\Pi(1+a_\nu)$, où $a_\nu \leq 0$.

§ 3. Convergence absolue d'un produit réel ou complexe comme condition suffisante pour que la convergence soit sans restriction.

§ 4. Produits particuliers, qui ne convergent que d'une façon absolue et sans restriction.

§ 5. La convergence absolue d'un produit infini est la condition nécessaire de la convergence sans restriction.

§ 6. Lemmes sur certains produits infinis.

§ 7. Convergence restreinte des produits réels.

Nous devons renvoyer à l'auteur pour la définition précise des mots *convergence absolue* et *convergence sans restriction* et pour la démonstration de l'importance de la distinction entre les deux notions.

Illigens (*M.*). — Sur la théorie de Weierstrass-Cantor des nombres irrationnels. (154-160).

Discussion sur la définition des nombres irrationnels, sur la façon de les introduire, sur le sens attribué ou à attribuer aux symboles que l'on emploie.

Heun (*K.*). — Sur la théorie des fonctions de Riemann du second ordre à quatre points de ramification. (191-179).

La série hypergéométrique de Gauss a été maintes fois généralisée. Ou bien on a augmenté le nombre des paramètres et l'on est arrivé à des fonctions qui satisfont à des équations différentielles du troisième ordre ou d'ordre supérieur, ou bien l'on a introduit à la place des éléments originaux des quantités exponentielles et les fonctions ainsi définies satisfont à des équations aux différences du second ordre. C'est là la voie qui avait été ouverte par Heine. Appell a marché dans un sens différent; il a introduit au lieu du quatrième élément plusieurs variables indépendantes et augmenté en même temps le nombre des paramètres. Les fonctions que l'on obtient alors satisfont à des équations aux dérivées partielles du second ordre. L'auteur examine ici les fonctions de Riemann à quatre ramifications qui deviennent des fonctions hypergéométriques

de Gauss lorsque l'on fait coïncider deux des points de ramification et que l'on attribue à un certain paramètre une valeur particulière.

L'auteur est ainsi conduit à étudier les fonctions définies par l'équation différentielle

$$x(x-1)(x-a)\frac{d^2y}{dx^2}$$
$$+\{(\alpha+\beta+1)x^2-[\alpha+\beta-a\gamma-(a-1)\delta+1]x+ay\}\frac{dy}{dx}+\alpha\beta(x-q)y=0.$$

Le premier membre de cette équation devient, lorsque l'on y fait $a=1$ et $q=1$ divisible par $x-1$ et fournit alors l'équation qui définit la série hypergéométrique de Gauss, $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

Si l'on y fait $a=0$, $q=0$, on obtient, après avoir divisé par x l'équation,

$$x(x-1)\frac{d^2y}{dx^2}+[(\alpha+\beta+1)x-(\alpha+\beta+\delta+1)]\frac{dy}{dx}+\alpha\beta y=0,$$

qui est satisfaite par la fonction $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta-\delta+1, x)$.

L'auteur étudie la série $F(a, q; \alpha, \beta, \gamma, \delta; x)$ qui satisfait à l'équation différentielle généralisée; il établit ses conditions de convergence, il donne toute une série d'intégrales de l'équation différentielle exprimées au moyen de cette fonction et montre enfin les relations qui existent entre cette fonction remarquable et les fonctions de Riemann à quatre points de ramification.

Heun (*K.*). — Contributions à la théorie des fonctions de Lamé. (180-196).

Les fonctions de Lamé sont des fonctions particularisées de Riemann du second ordre à quatre points de ramification, les paramètres de la fonction générale de Riemann ayant alors pris des valeurs spéciales. L'auteur applique les résultats trouvés dans le Mémoire précédent à l'étude plus approfondie de ce cas particulier. Il arrive par exemple à cette propriété : toute fonction de Lamé peut être mise sous la forme

$$x^{\frac{1-\varepsilon_1}{4}}(x-1)^{\frac{1-\varepsilon_2}{4}}(x-a)^{\frac{1-\varepsilon_3}{4}}x^m$$
$$\times F\left(\frac{1}{a}, \bar{q}; -m, -m+\frac{\varepsilon_1}{2}, -2m+\sigma-1, 1-\frac{\varepsilon_2}{2}; \frac{1}{x}\right),$$

où $\bar{q}$ est une des $m+1$ racines d'une certaine équation $G(\bar{q})=0$ de degré $m+1$. L'auteur étudie particulièrement les développements en fractions continues analogues à ceux qui ont fait l'objet des travaux de Heine.

Gall (*v.*). — Les syzygants de deux formes simultanées binaires biquadratiques. (197-222).

On sait que le système complet des formes fondamentales relatives à deux formes binaires biquadratiques simultanées est constitué par 28 formes. On peut représenter l'une de ces formes par le symbole (ikl) qui désigne un covariant du $i^{\text{ième}}$ degré et du $k^{\text{ième}}$ degré relativement aux coefficients des deux formes biquadratiques données f et φ et d'ordre l par rapport aux variables x.

Les 28 formes fondamentales sont alors

$$\begin{array}{llllllll}
(020), & (030), & (110), & (120), & (200), & (210), & (220), & (300), \\
(112), & (122), & (132), & (212), & (222), & (232), & (312), & (322), \\
(014), & (024), & (104), & (114), & (124), & (204), & (214), & \\
(036), & (116), & (126), & (216), & (306). & & &
\end{array}$$

Les identités données par Gordan dans sa *Théorie des formes binaires* se prêtent assez difficilement à la résolution de toutes les transvections qui ne figurent pas dans le système complet. La réduction se présente beaucoup plus simplement si l'on a recours aux deux opérations d et δ définies comme l'on sait par les équations

$$d\Psi = \Sigma a_i \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i}, \qquad \delta\Psi = \Delta_i \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i}.$$

Après avoir montré l'application au système complet des opérations d et δ, l'auteur arrive à la détermination des relations (syzygants) qui existent entre les formes de ce système. Il applique une méthode présentée par M. Stephanos dans le tome XCVI des *Comptes rendus* « Sur les relations qui existent entre les covariants de caractère pair d'une forme binaire a_x » et procède dans le présent Mémoire au calcul des transvections qui dans le cas présent, comme dans celui étudié par Stephanos, constituent la partie la plus importante dans une recherche de cette nature.

Hilbert (*D.*). — Le système des invariants pour les formes binaires fondamentales est en nombre fini. (223-226).

Gordan a démontré le premier que le nombre des invariants pour un système donné de formes fondamentales est fini. L'auteur donne ici une nouvelle démonstration de cette propriété remarquable, qui présente quelques analogies avec celle de Gordan (*Vorlesungen über Invariantentheorie,* t. II, p. 231), mais se rapproche d'autre part de celle due à Mertens (*Journal de Crelle,* t. 100, p. 223).

Hilbert (*D.*). — Sur les faisceaux de formes binaires ayant un déterminant fonctionnel donné. (227-236).

Un faisceau de formes binaires d'ordre ν relativement aux variables homogènes x et y

$$x\varphi + \mu\psi$$

dépend de $2\nu - 2$ constantes différentes et ce nombre est précisément celui du déterminant fonctionnel

$$f = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\frac{\partial\psi}{\partial y} - \frac{\partial\varphi}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial x} = (\varphi, \psi).$$

Si f est donc fonction donnée, on est conduit à se demander quelles sont les formes qui admettent f comme déterminant fonctionnel, ou bien, en d'autres termes, la question revient à déterminer les involutions d'ordre ν qui ont $2\nu - 2$ éléments doubles donnés. Les cas les plus simples où $\nu = 3$ et $\nu = 4$ ont été étudiés par Stephanos dans son Mémoire *Sur les faisceaux de formes binaires ayant une même jacobienne* (*Mémoire présenté à l'Académie des Sciences,*

t. XXVII) et par Brill : *Ueber binäre Formen und die Gleichung* 6ten *Grades* (*Math. Ann.*, t. XX). L'auteur étudie ici le cas général.

Stolz (*O.*). — Généralisation d'un théorème de Cauchy. (237-245).

Hurwitz (*A.*). — Sur les zéros des fonctions de Bessel. (246-266).

Les points où la fonction de Bessel

$$J_n(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^n \sum \frac{(-1)^r \left(\frac{z}{2}\right)^r}{\Gamma(n+r+1)\,\Gamma(r+1)}$$

s'annule sont de grande importance en Physique mathématique. On sait que ces zéros sont tous réels si l'indice n a une valeur réelle qui n'est pas plus petite que -1 [*voir* Poisson, *Théorie de la chaleur*, p. 178; Sturm, *Journal de Liouville*, t. I, p. 384, etc.; Stern, *Ueber die Auflösung der transcendenten Gleichungen* (*Journal de Crelle*, t. 22, p. 1, ...); Schläfli, *Math. Ann.*, t. X, p. 137). Ce dernier a montré que, si l'on considère un zéro comme fonction $\psi(n)$ de l'indice n, la fonction $\psi(n)$ croît d'une façon continue lorsque n augmente à partir de zéro d'une façon continue.

Dans le présent travail l'auteur étudie les zéros dans le cas plus général où n a une valeur réelle quelconque. Il examine également les valeurs imaginaires de n dont la partie réelle est positive.

Wiltheiss (*E.*). — Les équations aux dérivées partielles des fonctions thêta hyperelliptiques. (267-290).

L'auteur avait déjà étudié dans plusieurs Mémoires (*Journal de Crelle*, t. XCIX, p. 236; *Math. Ann.*, t. XXIX, p. 272, t. XXXI, p. 134 et p. 151) les équations aux dérivées partielles des fonctions thêta hyperelliptiques, et dans le cas où l'on prend les dérivées par rapport aux arguments, et dans celui où on les prend par rapport aux paramètres. Il revient ici sur la formation par un nouveau procédé de quelques-unes de ces équations.

Stahl (*H.*). — Sur la représentation des fonctions univoques, qui se reproduisent par des substitutions linéaires, à l'aide de produits infinis. (291-309).

§ 1. Remarques préliminaires sur les groupes fuchsiens, les fonctions fuchsiennes et les fonctions thêtafuchsiennes.

§ 2. Le théorème d'Abel pour les fonctions fuchsiennes.

§ 3. Représentation des fonctions fuchsiennes par des intégrales de troisième espèce.

§ 4 et 5. Formations de certaines expressions $Q(z)$, $P(z)$ et $P(z, z_1, \zeta_1)$ à l'aide des fonctions fuchsiennes. Leur représentation au moyen des séries thêtafuchsiennes.

§ 6. Représentation des fonctions fuchsiennes par des produits.

§ 7. Remarque finale. Relation entre le procédé de l'auteur et les méthodes de Weierstrass et Mittag-Leffler.

Horn (*J.*). — Sur les positions singulières des intégrales d'une équation linéaire aux dérivées partielles. (310-314).

Schlesinger (*O.*). — Note sur le Mémoire sur les courbes conjuguées. (*Math. Ann.*, t. XXX, p. 454). (315-316).

L'auteur n'avait pas connaissance, à l'époque de la publication de son Mémoire, du travail de M. de Paolis, *Quelques applications de la théorie générale des courbes polaires,* publié en juin 1886 dans la *R. Acc. dei Lincei.*

Maschke (*H.*). — Établissement du système complet de formes d'un groupe quaternaire de 51840 substitutions linéaires. (317-344).

Hurwitz (*A.*). — Sur les équations différentielles du troisième ordre auxquelles satisfont les formes qui se reproduisent par des transformations linéaires. (345-352).

Toute forme $\varphi(\omega, \omega_2) = \omega_2^n f(\omega)$, où l'on pose $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ qui ne change pas lorsque l'on effectue les substitutions

$$\omega' = \frac{a_i\omega + b_i}{c_i\omega + d_i},$$
$$a_i d_i - b_i c_i = 1,$$

que l'on suppose former un groupe, satisfait à une équation différentielle du troisième ordre dont les coefficients sont indépendants de ω_1 et ω_2.

L'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction

$$\vartheta_3(0) = 1 + 2q + 2q^4 + 2q^{16} + \ldots$$

se présente comme cas particulier du théorème général.

Pochhammer (*L.*). — Sur certaines équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont des intégrales hypergéométriques. (353-371).

L'auteur forme les équations aux dérivées partielles auxquelles satisfont les intégrales de la forme

$$y = \int_g^h (u - a_1)^{b_1 - 1} \ldots (u - a_m)^{b_m - 1} (u - v)^{x-1} (u - x)^{\lambda - 1} du,$$

x et v étant les variables indépendantes. La question avait déjà été résolue par des procédés différents pour $m = 2$ par M. Appell et par MM. Picard et Goursat.

Gordan (*P.*). — Le système de formes étendu. (372-389).

Le système simultané pour un certain nombre de formes quadratiques binaires $f_1, f_2, \ldots, f_k$ est formé des formes

$$f_i; \quad (f_i, f_i), \quad [(f_i, f_x), f_k]^2, \quad (f_i, f_x)^2.$$

Ces formes sont des types

$$(1) \qquad f; \quad (f, f), \quad [(f, f), f]^2, \quad (f, f)^2,$$

où l'on attribue aux f des indices. On peut appeler le système (1) le système *étendu* pour une seule forme quadratique f, en opposition avec le système complet simple, qui ne comprend que les deux formes

$$f, \quad (f, f)^2.$$

L'auteur a établi pour les formes binaires de degré quelconque le système étendu qui leur correspond, en suivant la voie qui lui avait servi à établir le système simple. De tels systèmes étendus permettent de construire des systèmes de formes binaires contenant des variables qui sont soumises à des substitutions linéaires indépendantes.

Weber (*H.*). — Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques. (390-410).

Suite des travaux de l'auteur, publiés dans deux Mémoires sur la *Théorie des fonctions elliptiques* dans les *Acta mathematica*, t. VI, p. 329, et t. XI, p. 333. L'auteur cite sur ce sujet les travaux récents de Sylow *Sur la multiplication complexe des fonctions elliptiques* (*Journal de Liouville*, t. III_4) et de Greenhill (*Quart. Journ. of Math.*, 1887).

La méthode précédemment employée n'est pas applicable en général, mais l'application des résultats obtenus par Kronecker dans ses recherches *Sur la solution de l'équation de Pell au moyen des fonctions elliptiques* (*Monatsb. Berl. Ak.*, 1863) conduisent rapidement et sans grand calcul au but cherché.

Schlesinger (*O.*). — Sur les résultants et les discriminants des fonctions $\mathfrak{I}$ de degré supérieur. (411-443).

Schlesinger (*O.*). — Sur les courbes elliptiques dans le plan. (444-469).

Kober (*G.*). — Sur le groupe des huit surfaces du second degré harmoniques. (470-473).

Exposé des principaux résultats contenus dans la dissertation inaugurale de l'auteur *Les surfaces du second degré harmonique*, Halle, 1888.

Küpper (*G.*). — Le théorème de Pohlke. (474-475).

Démonstration simple du théorème connu :

« Trois segments oa', ob', oc' situés dans un plan peuvent toujours être regardés comme les projections parallèles de trois segments égaux oa, ob, oc, portés sur les arêtes d'un trièdre trirectangle. »

Cantor (*G.*). — Remarque sur la Note relative à la théorie des nombres irrationnels de Weierstrass-Cantor. (*Math. Ann.*, t. XXXIII, p. 154). (476).

Szütz (*N. v.*). — Sur la théorie des déterminants. (477-492).

Muth (*P.*). — Sur la signification géométrique des invariants des collinéations et des réciprocités dans l'espace. (493-510).

Meyer (*F.*). — Sur la résolution des équations. (511-524).

Le problème posé est le suivant :

« Déterminer μ séries de quantités rationnellement déterminables

$$R_1, R_2, \ldots, R_4, \ldots,$$

telles que la valeur limite de R_n fournisse une racine déterminée d'une équation donnée.

On sait que ce problème a déjà été posé maintes fois, par Cayley par exemple (*Desiderata and Suggestions*), que Schröder a essayé d'y répondre. Il a même été avancé, un peu vite peut-être, que la question était insoluble. L'auteur remarque ici que l'on peut transformer la série des quantités R en une série convergente qui fournit un exemple nouveau de fonctions représentant dans des portions différentes des plans des fonctions différentes (des constantes dans le cas présent). L'exemple bien connu dû à M. Schröder et à M. Tannery d'une fonction ayant la valeur $+1$ ou la valeur -1 correspond à l'équation du second degré ayant pour racine ± 1.

Noether (*M.*). — Sur une classe de plans doubles applicables sur un plan simple. (525-545).

Tous les plans doubles qui peuvent être appliqués rationnellement et d'une façon univoque sur le plan simple peuvent par des transformations planes univoques de Cremona se ramener à trois classes essentiellement distinctes suivant qu'ils présentent :

I. Une courbe de passage d'ordre $2m$ possédant un point $(2m-2)^{\text{uple}}$;

II. Une courbe de passage du quatrième ordre;

III. Une courbe de passage du sixième ordre possédant deux points triples infiniment voisins.

Clebsch (*Math. Ann.*, t. III; 1870) et de Paolis (*Mem. R. Acc. dei Lincei*, t. I_3 et II_3; 1877 et 1878) ont étudié les deux premiers cas. Le troisième cas a déjà fait l'objet d'une Note de l'auteur parue dans les *Sitzb. ph. med. S. Erlangen* (1878). Il revient ici d'une façon plus approfondie sur son examen et le soumet à une étude détaillée.

Noether (*M.*). — Sur les surfaces rationnelles du quatrième ordre. (546-571).

Parmi les surfaces du quatrième ordre dont les coordonnées peuvent s'exprimer en fonctions rationnelles de deux paramètres, on connaissait jusqu'ici, outre les surfaces à courbes multiples, la surface

$$F_4^{(1)} = x_4^2 x_1^2 + x_4 x_1 f_2(x_1, x_2, x_3) + f_4(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

La représentation de cette surface sur le plan se fait à l'aide des ∞^1 courbes du sixième ordre

$$C_6(a_1^2, a_2^2, \ldots, a_7^2, b_1, \ldots, b_4),$$

où les points $a_1, \ldots, a_7, b_1, \ldots, b_4$ sont sur une courbe de troisième ordre.

L'auteur a trouvé qu'il y avait en outre deux autres espèces, et deux seulement, de surfaces rationnelles du quatrième ordre possédant un seul point singulier. L'une d'elles $F_4^{(2)}$ est appliquée sur le plan au moyen de ∞^3 courbes du septième ordre

$$C_7(a^2, b_1^2, b_2^2, \ldots, b_9^2),$$

où les points $a, b_1, \ldots, b_9$ sont des points d'une C_3 possédant une position particulière. L'autre $F_4^{(3)}$ admet une représentation plane à l'aide de ∞^3 courbes du neuvième ordre

$$C_9(a_1^3, a_2^3, \ldots, a_8^3, b_1^2, b),$$

les points a et b étant ici encore sur une C_3. Le Mémoire est consacré à la démonstration de cette proposition et au développement de ses conséquences.

Bochert (*A.*). — Sur la limite de transitivité des groupes de substitution qui ne contiennent pas le groupe alterne. (572-583).

Suite du Mémoire paru dans le tome XXIX des *Math. Ann.*

Bochert (*A.*). — Sur le nombre des valeurs différentes que prend une fonction lorsque l'on permute les lettres qui y apparaissent. (584-590).

Quelques remarques importantes sur cette question difficile.

Krazer (*A.*). — Sur la formation des fonctions σ générales. (591-599).

Résultats obtenus par l'auteur relativement aux questions soulevées par M. Klein dans ses recherches sur les fonctions σ générales des t. XXVII et XXXII des *Math. Ann.*

Ptaszycky. — Sur la réduction de certaines intégrales abéliennes à la forme normale. (600-604).

M. Hermite a montré (*Bull. des Sc. Math.*, 1883) que la réduction des intégrales hyperelliptiques à la forme normale peut être effectuée à l'aide des seules opérations arithmétiques. L'auteur se propose ici de montrer que ce résultat s'étend à l'intégrale qui dépend d'une racine quelconque d'un polynôme entier [le travail de M. Pick (*Math. Ann.*, t. XXXII, p. 443) avait été publié sans que l'auteur eût connaissance de la Note de M. Hermite].

Tome XXXIV; 1889.

Segre (*C.*). — Recherches générales sur les courbes et les surfaces réglées algébriques. IIe Partie. — Surfaces réglées algébriques. (1-25).

La première Partie de ce travail a paru dans le tome XXX des *Math. Ann.*

L'auteur emploie la méthode si féconde de la projection étendue aux espaces supérieurs.

Propositions fondamentales sur les surfaces réglées et sur les courbes qui sont tracées sur elles.

Sur les courbes directrices des surfaces réglées : courbes minima.

Surfaces réglées spéciales.

Cônes et autres surfaces réglées particulières.

Hölder (*O.*). — Réduction d'une équation algébrique quelconque à une chaîne d'équations. (26-56).

L'auteur se propose de généraliser le théorème suivant fondamental dans la démonstration par la méthode d'Abel de l'impossibilité de résoudre les équations générales de degré supérieur au quatrième : « Si une équation peut être résolue par radicaux, on peut toujours donner à la solution une forme telle que tous les radicaux qui s'y présentent soient des fonctions rationnelles des racines de l'équation donnée ».

Le Mémoire nous paraît constituer une application remarquable des idées et des résultats de Kronecker (*Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Knoten,* Berlin; 1882) et de Klein (*Vorlesungen über das Icosaeder und die Auflösung der Gleichungen von* 5ten *Grade*, Leipzig; 1884) et une extension importante des propositions établies par Jordan dans son *Traité des substitutions et des équations algébriques.*

Killing (*W.*). — La composition des groupes de transformation finis et continus. Troisième Partie. (57-122).

Le présent Travail a pour objet de déterminer la comparaison de tous les groupes qui sont leurs propres sous-groupes fondamentaux, groupes pour lesquels le groupe déterminé par les expressions $(X_i X_x)$ est identique à celui déterminé par les expressions $X_i f$. Le résultat de ces recherches est des plus simples; l'autre montre en effet comment tous les groupes composés qui satisfont à la condition énoncée se réduisent tout simplement et tout naturellement à des groupes simples. Il y a lieu de distinguer entre les groupes décomposables et les groupes non décomposables. Supposons qu'un groupe G contienne les sous-groupes $G_1, \ldots, G_2, \ldots, G_x, \ldots, G_m$, si à toute transformation de G répond un de ces sous-groupes et un seul, le groupe identique étant exclu, et si toute transformation de G_1 est permutable avec toute transformation de G_x, on dit que G se décompose en $G_1, \ldots, G_m$. Alors, si un groupe à r termes est son propre sous-groupe, sans qu'il soit décomposable, on peut toujours choisir les r transformations infinitésimales $X_1, \ldots, X_r$, en sorte que les r_1 premières transforma-

tions $X_1, \ldots, X_{r_1}$ déterminent un groupe simple, tandis que les transformations $X_{r_1+1}, \ldots, X_r$ fournissent un groupe de rang nul qui, pour le groupe à r termes, est un sous-groupe invariant. Lorsqu'un groupe de la nature indiquée est au contraire décomposable, il faut tout d'abord effectuer cette décomposition; ensuite chaque groupe partiel possède la propriété énoncée précédemment.

Kötter (*E.*). — La courbe hessienne traitée d'une façon purement géométrique. (123-149).

La hessienne forme l'objet fondamental de ce Travail, mais l'auteur complète tout d'abord quelques-uns des résultats qu'il avait obtenus dans le Mémoire paru dans les *Abhand. d. Berl. Ak.* en 1887 (*Grundzüge einer rein geometrischen Theorie der algebraischen ebenen Curven*).

Les deux premières Sections sont consacrées à l'étude plus approfondie des propriétés bien connues relatives aux courbes possédant des points multiples et à la façon dont se comportent les courbes polaires en ces points multiples. Dans la troisième Section, l'auteur étudie la jacobienne d'un réseau de courbes du second échelon et, en conformité avec sa définition par l'équation

$$0 = \Sigma \pm \varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_2} \frac{\partial \chi}{\partial x_3},$$

il la considère comme le lieu des points où deux courbes qui proviennent de deux faisceaux fixes du réseau présentent entre elles un contact. Cette considération conduit à la détermination de deux faisceaux projectifs de courbes, qui engendrent la jacobienne en même temps qu'une droite auxiliaire et la courbe fixe commune aux deux faisceaux du réseau. En choisissant convenablement les deux faisceaux, on peut étudier la façon dont se comporte la jacobienne d'un réseau dans le voisinage d'un point quelconque.

Le Travail se termine par l'examen de la hessienne. L'auteur retrouve les théorèmes déjà établis par Geiser (*Brioschi Ann.*, t. IX_2, p. 35-41) et par Del Pezzo (*Nap. Rend.*, p. 203-218; 1883) relativement à la façon dont se comporte cette courbe en dehors des points multiples et, de plus, il précise ce qui arrive en ces points. Nous devons signaler la détermination élégante des conditions sous lesquelles une courbe et sa hessienne présentent des points d'inflexion en commun.

Wiltheiss (*E.*). — Équations différentielles linéaires entre les périodes des intégrales hyperelliptiques de première espèce. (150-157).

Les fonctions thêta générales à ρ arguments contiennent $\frac{1}{2}\rho(\rho+1)$ paramètres essentiels. Si l'on veut employer ces fonctions thêta à l'inversion des équations différentielles hyperelliptiques, les paramètres s'expriment à l'aide de $2\rho^2$ systèmes de périodes des intégrales hyperelliptiques de première espèce

$$(1) \qquad \begin{cases} 2\omega_{1\alpha}, & 2\omega_{2\alpha}, & \ldots, & 2\omega_{\rho\alpha}, \\ 2\omega'_{1\alpha}, & 2\omega'_{2\alpha}, & \ldots, & 2\omega'_{\rho\alpha}, \end{cases}$$

entre lesquelles existent les $\frac{1}{2}\rho(\rho-1)$ conditions exprimées par les formules

$$(2) \qquad \sum_{\gamma=1}^{\rho}(\omega_{\alpha\gamma}\omega'_{\beta\gamma}-\omega'_{\alpha\gamma}\omega_{\beta\gamma})=0.$$

Or les intégrales hyperelliptiques ne contiennent que $2\rho-1$ constantes essentielles, et par suite les $\frac{1}{2}\rho(\rho+1)$ paramètres des fonctions thêta ne dépendent que de $2\rho-1$ quantités. Il existe donc entre ces paramètres

$$\frac{1}{2}\rho(\rho+1)-(2\rho-1)=\frac{1}{2}(\rho-1)(\rho-2)$$

conditions. Il doit donc nécessairement, puisque les périodes $2\omega_{\alpha\beta}$, $2\omega'_{\alpha\beta}$ peuvent servir à exprimer les paramètres des fonctions thêta, exister entre ces périodes, outre les relations (2), un nombre égal à $\frac{1}{2}(\rho-1)(\rho-2)$ de relations nouvelles.

Les équations aux dérivées partielles établies par l'auteur (*Math. Ann.*, t. XXXI, p. 134; t. XXXIII, p. 267) peuvent facilement être transformées en sorte de faire disparaître les constantes des intégrales et les périodes des intégrales de seconde espèce. On obtient alors $\frac{1}{2}(\rho-1)(\rho-2)$ équations linéaires aux dérivées partielles du premier ordre entre les périodes des intégrales hyperelliptiques de première espèce.

Dalwigk (*F. v.*). — Sur la démonstration de Gordan du théorème fondamental de l'Algèbre. (158-160).

Gordan avait donné dans le tome X des *Math. Ann.* une simplification de la seconde démonstration de Gauss. L'auteur y signale une inadvertance et la répare dans cette Note.

Köpcke (*A.*). — Sur une fonction continue, admettant une dérivée et présentant des oscillations dans tout intervalle, si petit qu'il soit. (161-171).

Schönflies (*A.*). — Sur les groupes de transformations de l'espace sur lui-même. (172-203).

Les groupes de transformations considérés par l'auteur sont les groupes de transformations finies de l'espace sur lui-même dans lesquelles une figure quelconque de l'espace est changée en une figure congrue à la première, ou symétrique de la première.

Si la figure de l'espace reste constamment congrue à elle-même, le groupe correspondant est un groupe de mouvements. Les groupes de mouvements ont déjà été étudiés d'une façon suivie.

Les groupes qui contiennent des transformations symétriques n'avaient point

fait l'objet d'un examen systématique. L'auteur appelle ces groupes *groupes étendus*, et il consacre son travail à la détermination de leur ensemble. Les groupes ainsi examinés présentent un intérêt tout d'abord à cause de leur simplicité même et aussi par suite de la connexion qui existe entre la question de leur détermination et celles de la division régulière de l'espace d'une part et de la théorie de la structure cristalline d'autre part.

Kneser (*A.*). — Théorèmes généraux sur les singularités apparentes des courbes gauches quelconques. (204-226).

Dans un travail publié dans le tome XXXI des *Math. Ann.* et intitulé : *Recherches synthétiques sur les plans d'osculation des courbes gauches quelconques,* l'auteur s'était déjà occupé de questions de cette nature.

Dans les recherches sur les différentes formes apparentes d'une courbe gauche donnée, que l'on projette de différents points, il y a à considérer d'une façon toute spéciale les déplacements des centres de projection pour lesquels les singularités apparentes de la courbe gauche, c'est-à-dire les singularités des projections de cette courbe, se modifient. Cela n'a lieu, en général, que si le centre de projection se trouve placé sur certaines surfaces, et il y a lieu alors de voir ce qui se passe lorsque le centre de projection se déplace à partir d'un point de la surface dans une direction donnée.

De Vries (*J.*). — Sur des configurations polyédrales. (227-246).

Les droites et les plans (arêtes et faces) d'un n — èdre complet sont coupés par un plan quelconque suivant une configuration

$$\left[\binom{n}{2}_{n-2}, \binom{n}{3}_{3}\right],$$

que M. Jung appelle *configuration polyédrale d'ordre n.* [*Sopra una classe di configurazioni d'indice* 3 (*Rend. R. I. lomb.,* t. XVIII_2)]. [*Voir* aussi le Mémoire de ce même auteur *Sur l'équilibre des polygones articulés et la relation entre cette question et l'étude des configurations* (*Ann. di Mat.,* t. XII_2).] L'auteur développe ici les résultats qu'il avait déjà publiés sur cette question dans les *Comptes rendus de l'Ac. holland. des Sc.,* t. V_3, p. 9.

Papperitz (*E.*). — Sur la représentation des transcendantes hypergéométriques par des fonctions univoques. (247-296).

L'auteur appelle *fonction hypergéométrique* la fonction de Riemann

$$\mathrm{P}\left\{\begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ \alpha & \beta & \gamma & x \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix}\right\}.$$

Cette fonction est donc une solution de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$\frac{d^2\mathrm{P}}{dx^2} - \frac{(\alpha+\alpha'-1)+(\beta+\beta'+1)x}{x(1-x)}\frac{d\mathrm{P}}{dx} - \frac{\alpha\alpha'-(\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma')x+\beta\beta'x^2}{x^2(1-x)^2}\mathrm{P} = 0,$$

où les coefficients sont des quantités réelles satisfaisant à la condition

$$\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1.$$

La possibilité d'une représentation des transcendantes hypergéométriques par des fonctions univoques a été énoncée pour la première fois par M. Klein dans son Mémoire sur la transformation des fonctions elliptiques et sur la résolution de l'équation du cinquième degré (*Math. Ann.*, t. XIV, p. 159).

La proposition en question peut également être considérée comme un cas particulier des résultats fournis par la théorie de M. Poincaré. Les procédés de ce mathématicien peuvent conduire aux conséquences établies dans le présent Travail, mais l'auteur a préféré prendre un mode d'exposition différent, analogue dans quelques cas, mais en général bien distinct.

L'auteur parvient à exprimer les fonctions hypergéométriques à l'aide de deux fonctions transcendantes univoques $Z_1(\tau)$ et $Z_2(\tau)$, définissant un système de fonctions zéta dans le sens de M. Poincaré.

Brill (*A.*). — Détermination des surfaces d'onde optiques à l'aide d'une seule section centrale plane. (297-305).

Par une section plane d'une surface des ondes passant par le centre de la surface passe toujours une et une seule surface des ondes réelles autre que la surface donnée. Il y a en outre deux surfaces des ondes imaginaires qui sont déterminées par cette même section.

Stroh (*E.*). — Les syzygants fondamentaux des formes binaires du sixième ordre. (306-318).

La théorie des syzygants des formes des ordres supérieurs avait déjà fait l'objet des Travaux de

Brioschi, *Sulle relazione esistendi fra covarianti ed invarianti di una stessa forma binaria* (*Ann. di Math.*, t. XI, p. 291-304.)

Stephanos, *Sur les relations qui existent entre les covariants et les invariants de la forme binaire du sixième ordre* (*Comptes rendus*, t. XCVI, p. 232, 1564.)

Perrin, *Sur les relations qui existent entre, etc.* (*Comptes rendus*, t. XCVI, p. 426, 479, 1717, 1776.)

Hammond, *Amer. J.*, t. VII, p. 327; t. VIII, p. 126.

V. Gall, *Math. Ann.*, t. XXXI, p. 424.

L'auteur, dans le volume XXXIII des *Math. Ann.*, a donné le moyen de trouver tous les syzygants fondamentaux correspondant à une forme binaire. Il appliquait alors son procédé au cas le plus simple, aux formes binaires du cinquième ordre. Il détermine de la même façon dans le présent Travail les syzygants fondamentaux des formes binaires du sixième ordre. Ces syzygants fondamentaux permettent de déduire par un simple procédé d'élimination tous les autres syzygants de première espèce.

Cayley (*A.*). — Sur le nombre fini des covariants d'une forme binaire. (319-320).

Le procédé de Hilbert (*Math. Ann.*, t. XXXIII, p. 223-226) donné pour les invariants d'une forme binaire se simplifie considérablement si on l'applique aux covariants, ou, ce qui revient au même, aux semi-invariants de la forme binaire.

Stroh (*E.*). — Sur le système complet des combinants de deux formes binaires. (321-331).

Pour obtenir le système complet des combinants de deux formes binaires du $m^{\text{ième}}$ ordre φ et ψ, il suffit, d'après un théorème de Gordan, d'établir le système simultané des transvections impaires

$$(1) \qquad (\varphi\psi)^1, \quad (\varphi\psi)^3, \quad (\varphi\psi)^5, \quad \ldots,$$

et alors tous les combinants s'expriment sous forme rationnelle et entière à l'aide des formes fondamentales de ce système. Mais la dépendance qui existe entre les formes (1) fait que leur système simultané n'est point le plus général de son espèce; il y a des réductions, et il ne reste en somme qu'un nombre minimum de combinants, au moyen desquels tous les autres peuvent s'exprimer. On suppose connu le système simultané des formes pour les formes d'ordre $2m-2$, $2m-6$, $2m-10$, ... Mais l'auteur montre que cela n'est pas nécessaire et il arrive à cette conclusion des plus remarquables que le système complet des combinants pour deux formes binaires n'est autre que le système relatif à une seule forme binaire d'ordre supérieur.

Gall (*V.*). — Les syzygants fondamentaux de deux formes binaires simultanées biquadratiques. (332-353).

Suite du Mémoire paru dans le tome XXXIII des *Math. Ann.*

Stroh (*E.*). — Développement des syzygants fondamentaux des formes binaires du cinquième ordre. (354-370).

Dans le huitième Volume de l'*American Journal of Mathematics*, Hammond a donné une table des syzygants fondamentaux pour la forme binaire du cinquième ordre. D'après une remarque insérée au tome VII, p. 243, cette table a été construite en partie à l'aide des tables de Cayley, en partie par des procédés d'élimination dont l'idée première est simple et a déjà été employée par Cayley. L'auteur se propose ici de montrer que les méthodes symboliques de Clebsch et de Gordan se prêtent simplement à la détermination effective de tous ces syzygants et, qui plus est, permettent de construire chaque syzygant indépendamment des autres, ce qui fournit des moyens de contrôle bien utiles.

Bäcklund (*A.-V.*). — Sur la théorie des ondes dans les milieux gazéiformes. (371-446).

Bertini (*E.*). — Sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions algébriques. (447-449).

Noether (*M.*). — Sur le théorème fondamental de la théorie des fonctions algébriques. (450-453).

Hölder (*O.*). — Sur la démonstration de Söderberg du théorème fondamental de Galois. (454-462).

Dans le Mémoire publié par l'auteur dans le même volume (p. 42) des *Math. Ann.*, il avait manifesté quelque doute sur la valeur de la démonstration donnée par Söderberg (*Acta math.*, t. XI) du théorème de Galois. Le défaut qu'il signalait était celui-ci : La démonstration de Söderberg supposerait que toutes les substitutions qui laissent invariable la valeur numérique d'une fonction des racines forment un groupe et cette supposition n'est pas admissible. En fait, la démonstration de Söderberg est exacte, elle ne s'appuie pas, comme le croyait l'auteur, sur une interprétation fâcheuse d'une portion d'un théorème de Lagrange.

Schlesinger (*O.*). — Sur les courbes elliptiques. (463-464).

Complément au Mémoire de l'auteur (*Math. Ann.*, t. XXXIII, p. 444). M. Humbert avait déjà corrigé dans son Travail sur les courbes de genre un une inadvertance que l'auteur avait remarquée dans une Note des *Comptes rendus* (p. 1136; 1883).

Scheibner (*W.*). — La multiplication complexe des fonctions thêta. (465-472).

Dans le tome III du *Journal de Crelle,* Abel et Jacobi ont remarqué presque en même temps que, pour certaines valeurs du module, l'équation différentielle elliptique

$$\frac{dy}{\sqrt{f\left(\begin{smallmatrix}4\\y\end{smallmatrix}\right)}} = m\,\frac{dx}{\sqrt{f\left(\begin{smallmatrix}4\\x\end{smallmatrix}\right)}}$$

s'intégrait algébriquement, même lorsque le multiplicateur m a une valeur complexe de la forme $a + b\sqrt{-D}$. La question de la multiplication complexe a fait depuis cette époque des progrès sans nombre. Ne citons que les noms de M. Hermite et de Kronecker. L'auteur a simplement pour but ici de montrer comment la multiplication complexe des fonctions thêta elliptiques peut se déduire simplement de la considération simultanée de deux équations quadratiques correspondant à la même irrationnelle.

Scheibner (*W.*). — Sur la réduction des intégrales elliptiques, hyperelliptiques et abéliennes. Le théorème d'Abel pour les intégrales simples et pour les intégrales doubles. (473-493).

Lorsque l'on a à réduire une intégrale générale elliptique ou hyperelliptique à la forme normale, il est essentiel de pouvoir en séparer les portions qui sont intégrables au moyen des fonctions élémentaires.

L'auteur se propose ici de donner un procédé pour résoudre la question de

se débarrasser sans résoudre d'équations algébriques des racines multiples qui existent sous le signe d'intégration. Il arrive de la sorte à établir une liaison étroite avec les théorèmes généraux découverts par Abel sur les intégrales algébriques.

Scheibner (*W.*). — Sur la connexion entre les fonctions thêta et les intégrales elliptiques. (494-543).

Horn (*J.*). — Sur la convergence des séries hypergéométriques à deux et à trois variables. (544-600).

La série hypergéométrique de Gauss est importante, pour la théorie des équations différentielles linéaires, en ce que la théorie de cette fonction prépare à la théorie des équations différentielles générales et que, d'autre part, on peut avec elle intégrer complètement une équation différentielle linéaire particulière du second ordre. On a considéré sous le nom de *séries hypergéométriques supérieures* des séries ordonnées suivant les puissances de la variable

$$\Sigma A_\lambda x^\lambda,$$

pour lesquelles le quotient $\frac{A_{\lambda+1}}{A_\lambda}$ est une fonction rationnelle de λ d'ordre supérieur, alors que ce quotient était du second ordre pour la série de Gauss. Thomæ, Goursat, Pochhammer ont étudié ces fonctions qui satisfont à des équations différentielles linéaires homogènes.

Appell (*J. de Liouv.*, 1882) a introduit des séries de puissances de deux variables, qui constituent une autre généralisation de la série de Gauss. Ce sont les séries

$$\Sigma A_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu,$$

où les deux quotients

$$\frac{A_{\lambda+1,\mu}}{A_{\lambda\mu}}, \quad \frac{A_{\lambda,\mu+1}}{A_{\lambda\mu}}$$

sont des fonctions rationnelles du second degré de λ et μ. Ces séries satisfont à un système d'équations aux dérivées partielles simultanées de la forme

$$a_{11}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + a_{12}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + a_{22}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + a_1\frac{\partial z}{\partial x} + a_2\frac{\partial z}{\partial y} + a_0 z = 0,$$

$$b_{11}\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + b_{12}\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} + b_{22}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + b_1\frac{\partial z}{\partial x} + b_2\frac{\partial z}{\partial y} + b_0 z = 0,$$

les coefficients a et b étant des fonctions rationnelles de x et de y. L'auteur examine dans ce Mémoire une série de puissances de deux variables

$$H(x, y) = \Sigma A_{\lambda\mu} x^\lambda y^\mu,$$

qu'il appelle *série hypergéométrique* lorsque les deux quotients

$$f(\lambda, \mu) = \frac{A_{\lambda+1,\mu}}{A_{\lambda\mu}}, \qquad g(\lambda, \mu) = \frac{A_{\lambda,\mu+1}}{A_{\lambda\mu}}$$

sont des fonctions rationnelles de λ et μ.

Il considère également le cas de trois variables. Il étudie dans les deux cas les conditions auxquelles doivent satisfaire les fonctions

$$f(\lambda, \mu), \quad g(\lambda, \mu)$$

ou bien

$$f(\lambda, \mu, \nu), \quad g(\lambda, \mu, \nu), \quad h(\lambda, \mu, \nu)$$

pour que les séries $H(x, y)$ et $H(x, y, z)$ convergent. Il détermine ensuite le domaine de convergence pour chacune de ces séries.

ANNALES DES PONTS ET CHAUSSÉES (1).

6e série, t. XVII; 1er semestre 1889.

Collignon (*E.*). — Note sur la flexion des pièces droites comprimées. (98-124, 11 fig., 1 pl., 3 tabl.).

A l'équation différentielle approximative de la fibre fléchie, considérée habituellement dans les études de résistance des matériaux, et de la forme

$$b\frac{d^2y}{dx^2} = -y,$$

l'auteur propose de substituer l'équation rigoureuse

$$-a^2 = \rho y,$$

ρ désignant le rayon de courbure.

φ représentant l'angle que fait la tangente à la courbe avec l'axe des x, l'équation cherchée résulterait de l'élimination de φ entre les deux équations

$$x = -\frac{a}{\sqrt{2}}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0}},$$

$$y = a\sqrt{2}\sqrt{\cos\varphi - \cos\varphi_0},$$

et la courbe pourra être construite par points en se servant des tables de fonctions elliptiques.

Application de ces formules à la compression des tiges.

Comparaison des limites usuelles qu'on vient de trouver avec celle que fournit la formule de Rankine.

Dans ce dernier article la formule de Rankine est discutée sous la forme très simple de la courbe représentée par l'équation

$$y = \frac{Ax^2}{x^2 + B}.$$

(1) Voir *Bulletin*, XI, 259; II_2, 106; IV_2, 211; VII_3, 116 et 185; VIII_2, 71; XI_2, 17 et XIV_2, 5-26.

Collignon (*E.*). — Note sur la détermination des limites de l'effort tranchant dans les poutres droites. (125-147, 10 fig., 2 tabl.).

Dans l'étude du projet d'une poutre droite, on admet généralement l'hypothèse simplificative d'une charge uniformément répartie.

L'objet de cette Note est d'établir que la même hypothèse peut servir à déterminer des limites des efforts tranchants dus à des charges discontinues, tout aussi bien que les plus grandes valeurs des moments fléchissants que ces charges produisent.

Pelletreau (*A.*). — Mémoire sur la répartition des pressions par transmission horizontale dans un massif de maçonnerie appareillé. (513-564, 1 pl.).

Les maçonneries dont il est ici question sont formées d'éléments ayant généralement la forme de parallélépipèdes rectangles, que l'auteur désigne sous le nom de *prismes* pour abréger le langage.

Dans l'étude de la déformation de ces prismes, on rencontre deux coefficients d'élasticité : tension et compression. Ces coefficients sont mal déterminés. On est amené à les supposer inégaux et variables avec la pression. On admet aussi deux autres hypothèses : la non-déformation des sections planes, et la proportionnalité des efforts aux déformations qu'ils ont produites.

En présence de ces incertitudes multiples, il serait inutile de chercher à se rendre compte des efforts qui peuvent se développer dans un massif, si l'on voulait demander à la théorie autre chose que ce qu'elle peut donner, c'est-à-dire des indications de tendance. Mais, en réduisant la théorie à ce rôle modeste, elle a encore son utilité.

Jusqu'à présent, on s'est préoccupé surtout du coefficient de compression. Cela se comprend, puisque les compressions ont paru pendant longtemps devoir seules être examinées. Mais aujourd'hui que bien des ingénieurs commencent à croire au rôle souvent prépondérant des tensions, il serait à désirer que l'on fît des recherches expérimentales sur le coefficient de traction et aussi sur le coefficient d'adhérence des pierres avec le mortier.

Pelletreau (*A.*). — Note sur la détermination des moments fléchissants dans une poutre droite au passage d'un système roulant. (565-589, 2 fig., 1 pl.).

L'auteur a saisi avec empressement la publication du *Traité de Statique graphique* de M. Maurice Lévy pour étudier comparativement les résultats de la nouvelle méthode avec ceux qu'il avait obtenus par l'emploi de ses méthodes personnelles, exposées dans un Mémoire inséré aux *Annales* en 1886.

De Boulongne (*L.*). — Note sur la conservation des câbles en fil de fer dans les ponts suspendus. (590-624, 5 fig. 1 pl.).

Remarques diverses au sujet de la théorie des efforts supportés par les câbles.

Imbeaux. — Note sur les entretoises des ponts métalliques avec voûtes en briques pour voies de terre. (686-709, 19 fig.).

Démonstration de la nécessité, dans le calcul des entretoises d'un pont métallique avec voûtes en briques, de tenir compte des poussées horizontales produites par ces voûtes chargées.

Tourtay. — Note sur la variation de la pression avec l'épaisseur à la clef dans les voûtes. (710-722, 2 fig., 1 pl.).

L'auteur a indiqué, dans un Mémoire inséré aux *Annales* de 1888, au sujet des voûtes en chaînette, qu'on ne pourrait diminuer indéfiniment la pression, dans une voûte donnée, en augmentant l'épaisseur à la clef. Il étudie à nouveau ce principe important et il montre que la même conclusion s'applique aux voûtes en arc de cercle.

Tome XVIII, 2e semestre 1889.

Flamant. — Des ondes liquides non périodiques et, en particulier, de l'onde solitaire. (5-48, 4 fig.).

L'accueil favorable qu'a reçu le précédent Mémoire de l'auteur (*Annales*, 1888, voir *Bulletin* XIV_2, 21) relatif à la théorie actuelle des ondes périodiques, l'a engagé à le compléter par un travail analogue sur les ondes non périodiques, ou intumescences, ou encore ondes de remous, dont une forme particulière a été étudiée d'abord par M. J. Scott Russel, sous le nom d'*onde solitaire,* et qui a fait l'objet, sous des formes diverses, de nombreuses observations et expériences de la part de M. Bazin.

La théorie complète de ces ondes se trouve dans l'*Essai sur la théorie des eaux courantes* de M. Boussinesq où elle occupe les § XXIX à XXXIII, p. 348-411; mais la lecture de ces paragraphes suppose celle des précédents où se trouvent établies les équations qui servent de base au raisonnement, et il est désirable d'avoir, des lois générales qui régissent ces phénomènes, un exposé moins complet certainement, mais plus simple. C'est ce que l'auteur du présent Mémoire a essayé de faire avec l'aide des conseils de M. Boussinesq, et l'on ne trouvera, dit-il, dans son travail, rien qui ne soit déjà explicitement ou implicitement dans l'Ouvrage qui vient d'être cité.

Luneau. — Notice sur les écluses et le barrage de Suresnes. (49-128, 29 fig., 11 pl.).

Mémoire descriptif, terminé par l'indication des calculs de stabilité des fermettes de la passe navigable.

Durand-Claye (*L.*). — Nouvelle table graphique pour l'évaluation des profils en travers. (129-131, 1 fig., 1 pl.).

Description du principe et du tracé de tables graphiques imaginées par M. H. Paulin pour l'évaluation de l'aire et de la largeur d'emprise des profils en travers.

Soient l la largeur du demi-profil au niveau de la plate-forme des terrassements, p la déclivité du talus, y la cote rouge, $\pm x$ la déclivité transversale

ascendante ou descendante du terrain, e la largeur d'emprise, Z l'aire du demi-profil, K une constante $\left(\frac{pl^2}{2}\right.$ pour les remblais, $\frac{pl^2}{2} - f$ pour les déblais d'un fossé de section $\left.f\right)$, on a les expressions

$$e = \frac{y + lp}{p \pm x}, \qquad Z = \frac{e(y + lp)}{2} - K.$$

Ces deux relations, en posant

$$m = p \pm x, \qquad n = lp, \qquad m' = \frac{y + lp}{2},$$

peuvent se mettre sous la forme $y = me - n$ et $z = m'e - K$.

Elles représentent alors deux lignes droites ayant pour abscisses communes les valeurs de e, et dont les coefficients angulaires sont m et m'.

On en déduit une construction graphique très simple, et de nature à faciliter des opérations qui se présentent très fréquemment.

Heude. — Note sur une formule simple, donnant de suite le moment fléchissant maximum dû au passage de deux voitures sur une entretoise ou une poutrelle. (252-256, 2 fig.).

Exposé d'une simplification très pratique, et dont l'expérience justifie l'emploi.

Lancelin. — Note sur la forme du prisme de poussée des terres. (257-286, 16 fig.).

Les *Annales* contiennent de nombreux Mémoires sur la poussée des terres et les auteurs ne sont pas d'accord sur la direction que prend cette force contre un mur dont le parement intérieur est vertical.

La manière dont la pression se propage et les conséquences qui en dérivent pour l'intensité de la poussée ont fait l'objet de recherches analytiques d'un ordre très élevé. La présente Note n'a pour but que d'indiquer les résultats approximatifs auxquels on est conduit par des considérations élémentaires.

De Préaudeau. — Remarques sur les calculs de résistance des ponts de chemins de fer. (331-338, 2 fig. 3 tabl.).

A propos des Tableaux donnés par M. Collignon dans le précédent Volume, l'auteur est amené à conclure que, si les poutres sont supérieures à 10^m, pour évaluer avec une approximation suffisante dans la pratique les poids uniformément répartis qu'on peut substituer dans les calculs de résistance aux charges d'épreuves, il suffit de diviser la somme de ces charges par la portée, en augmentant le résultat de 5 pour 100 pour les portées comprises entre 50^m et 100^m.

Souleyre. — Action dynamique des charges roulantes sur les poutres rigides qui ne travaillent qu'à la flexion. (341-441, 34 fig., 1 pl.).

Les effets dynamiques décroissent avec les portées, mais moins rapidement qu'on ne serait tenté de le croire pour des portées de 30^m à 100^m.

Ils sont très variables selon la région considérée sur la poutre. Il en résulte que, pour les ponts calculés selon les errements actuels, la matière est souvent loin d'être rationnellement distribuée. Pour les ponts à travées solidaires surtout, les méthodes de calcul des moments statiques généralement usitées donnent une idée très inexacte de la répartition des moments dynamiques.

Souleyre. — Déformation des barrages en maçonnerie qui ferment des gorges étroites. (442-451), 9 fig.).

En général, quand on étudie un barrage en maçonnerie, on détermine son profil comme si le mur avait une longueur indéfinie. Mais il arrive très souvent que cette hypothèse est tout à fait gratuite et que la longueur du mur, à mi-hauteur, est à peine supérieure à la hauteur totale. En ce cas, dans la réalité, la résistance des appuis latéraux ne saurait être négligeable.

La présente Note a pour but d'examiner s'il n'est pas possible de déterminer approximativement la manière dont se répartissent les efforts sur un barrage fermant une gorge de section rectangulaire, la hauteur et la largeur étant des dimensions du même ordre de grandeur. Par induction on passera au cas, qui se présente fréquemment, d'une gorge à section triangulaire.

Tavernier (*R.*). — Note sur les principes de tarification et d'exploitation du trafic voyageurs. (559-654, 3 pl.).

Suite à une Communication du même auteur parue aux *Annales* en 1888, et complément à des développements exposés par différents ingénieurs.

Des études de ce genre, en corrélation intime avec la statistique, peuvent retirer quelque avantage de la représentation graphique et de l'interprétation géométrique des résultats ou des formules.

Tome XIX, 1er semestre 1890.

Bazin (*H.*). — Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir. (9-82, 4 fig., 4 pl., 38 tabl.).

Suite de l'étude exposée en 1888 (voir *Bulletin,* XIV_2, 26).

La surface supérieure des nappes a été étudiée par quelques expérimentateurs, mais la surface inférieure, moins facile à observer, présente peut-être au point de vue théorique plus d'intérêt, car sa forme accuse nettement une contraction sur le seuil; par suite de cette contraction, la face inférieure de la nappe se détache du seuil sous un certain angle et commence par se relever, avant de devenir horizontale, puis descendante. Ce relèvement, à peine remarqué jusqu'à présent, constitue cependant une des données fondamentales du phénomène et M. Boussinesq en a fait le point de départ d'une théorie nouvelle de l'écoulement en déversoir (*Comptes rendus,* juillet 1887). L'auteur de ce Mémoire ayant eu, un an auparavant, communication de la nouvelle formule de M. Boussinesq, s'est proposé la détermination exacte du relèvement de la nappe inférieure, et il l'a mesuré avec précision, non seulement sur les déversoirs verticaux, mais encore sur les déversoirs inclinés.

Beghin. — Méthode d'approximation pour calculer le moment d'inertie et la position du centre de gravité d'une aire plane. (241-243, 1 fig.).

Une courbe étant supposée tracée, on tirera une simplification de la méthode de Thomas Simpson en prenant pour ordonnées, dans la recherche du moment d'inertie, les racines cubiques de nombres en progression arithmétique, et dans la recherche du centre de gravité, les racines carrées de nombres pareillement en progression arithmétique.

Chacune de ces deux échelles peut être faite une fois pour toutes sur du papier à calquer que l'on applique sur le dessin. Dès lors le calcul ne présente pas plus de difficultés que celui d'une aire plane.

Clavenad et *Bussy.* — Mémoire sur la filtration. (265-312, 17 fig., 1 pl.).

Étude systématique des résultats de nombreuses expériences au sujet du fonctionnement de filtres remplis de sable et de gravier.

Collignon (*E.*). — Note sur la résistance des arcs paraboliques surbaissés. (385-473, 26 fig., 2 pl. 8 tabl.).

Étude de la résistance des pièces courbes, dans le cas particulier où la pièce dont il s'agit a pour ligne moyenne un arc parabolique surbaissé, et repose sur deux appuis de niveau. Les formules générales des pièces courbes se prêtent alors à des simplifications importantes.

Par arc surbaissé, on désigne ici un arc pour lequel le rapport de la flèche à l'ouverture est moindre que 0,25.

Subdivision de l'étude : Détermination de la poussée; effets des charges uniformément réparties; effets des charges isolées; détermination approximative du poids propre d'un arc parabolique surbaissé; détermination de la section de l'arc.

Fossa-Mancini. — Sur le débit des puits dans les terrains perméables. (823-854, 6 fig., 1 pl.).

Considérations théoriques et résultats d'expériences sur l'alimentation des puits.

Cette Note a été publiée pour la première fois dans le journal italien *Ingegneria civile di Torino* (1889).

Tome XX, 2e semestre 1890.

Mussy. — Note sur les dimensions et les profils des rails. (5-117, 2 pl., 3 tabl.).

Discussion sur le poids et le profil des rails à adopter, notamment sur les lignes parcourues par des trains rapides.

D'Ocagne (*M.*). — Note sur le calcul d'une pièce droite inclinée. (131-132).

On peut simplifier l'expression du travail maximum R par unité de section en observant qu'on peut faire abstraction de l'inclinaison α et réduire la longueur de la poutre à celle de sa projection horizontale a, en conservant les autres données : section normale Ω et charge uniformément répartie, p.

En d'autres termes, on peut réduire à son premier terme seulement l'expression

$$R = \frac{pna^2}{8I} + \frac{p}{2}\,\frac{\sin^2\alpha}{\Omega}\,\frac{I}{n},$$

n désignant la demi-hauteur de la poutre, I le moment d'inertie de la section.

Dubois (*H.*) et *Gossot* (*F.*). — Théorie et tracé des courbes d'intrados en anse de panier. (145-230, 7 fig., 8 tabl.).

L'anse de panier étant admise comme courbe d'intrados au lieu de l'ellipse, sa construction a été jusqu'ici résolue par trois méthodes : celles de Lerouge et de Michal, qui dérivent de la construction d'Huygens et se différencient par le choix de la loi de variation des rayons, et celle de Perronnet perfectionnée par M. Revellat.

Le principe de la méthode de construction d'Huygens, qui consiste à admettre des angles égaux entre les rayons successifs, est, sans contredit, le plus simple et le plus parfait.

La nécessité de l'égalité des angles étant admise, il est aisé de conclure de cette égalité qu'il existe deux relations fondamentales entre tous les rayons. Ces deux relations proviennent de la double condition imposée à la courbe de passer par deux points donnés sur les axes.

Le nombre de centres étant impair et égal à $(2n+1)$, il reste $(n-1)$ rayons arbitraires; il est naturel de les supposer croissants et de les assujettir à une loi.

M. Lerouge a supposé la loi la plus simple, à savoir que les différences entre rayons sont constantes, et tous les rayons y satisfont rigoureusement. Les deux constantes sont : le premier rayon et la raison de la progression.

Les auteurs du présent Mémoire ont été amenés à adopter une loi plus générale, qui comprend trois constantes au lieu de deux.

Cette surabondance donne une grande élasticité à la méthode : elle permet de construire une anse de panier possédant, au choix du constructeur, diverses propriétés.

7e série, tome I, 1er semestre 1891.

Gaudard (*J.*). — Note sur les types fondamentaux de poutres métalliques et sur le système cantilever. (326-392, 1 pl.).

Le système cantilever ou à consoles se présentant comme un concurrent des poutres continues à travées multiples, dont il ne diffère essentiellement que par des coupures ou articulations rendant fixes certains points d'inflexion, la discussion économique consiste à chercher s'il est susceptible de réduire davantage l'ordonnée moyenne du contour enveloppe des moments fléchissants.

Ce qui reste de plus caractérisé à l'actif du cantilever, c'est qu'il est d'un calcul simple et sûr et que la liberté de mouvement de ses charnières l'affranchit des perturbations éventuelles de résistance, fléau des poutres continues en cas de tassement discordant des appuis ou du calage mal réglé.

D'Ocagne (*M.*). — Note sur la méthode de M. Delocre pour le calcul des grands barrages de réservoirs. (443-444).

Dans un Mémoire déjà ancien, publié aux *Annales* en 1866, M. Delocre a montré que ce problème revenait à la résolution de l'une ou l'autre des équations

$$(1) \qquad x^2 + \frac{a^2}{\theta} x - \frac{a^2}{\theta'} \lambda = 0,$$

$$(2) \qquad x^2 + \frac{4a^2}{\theta\lambda} x - \frac{3a^2}{\theta} = 0,$$

suivant que x^2 est $< \frac{a^2}{\theta}$ ou $> \frac{a^2}{\theta}$.

Le but de cette Note est de montrer que l'on peut traduire ces conditions au moyen des données de façon à déterminer *a priori* le choix de l'équation (1) ou (2) (dont il paraît peu utile de définir ici les notations).

Schœndœrffer. — Note sur un appareil enregistrant automatiquement les profondeurs du thalweg d'une rivière. (485-487, 2 fig.).

Cet appareil, de l'invention de M. Stecher, est basé sur une propriété de la développante du cercle. Il a permis de faire en dix jours le sondage de l'Elbe sur 480^{km} de longueur.

Collignon (*E.*). — Remarque sur les chaudières cylindriques. (871-872).

Le corps cylindrique d'une chaudière à vapeur est généralement terminé à chaque bout par une calotte sphérique qui coupe le cylindre sous un angle α (variable de 0° à 60°). Les constructeurs donnent souvent à ces fonds un surcroît d'épaisseur, mais un calcul très simple fait voir que l'excès d'épaisseur attribué au fond donne à cette partie de l'enveloppe une raideur qui entraîne la variation de l'angle α et la fatigue du métal au point le plus faible de la chaudière.

Jozan (*A.*). — Notice sur le nouveau barrage de la machine de Marly. (960-980, 5 fig., 1 pl.).

Description du barrage et aperçu des calculs de résistance de ses pièces.

Tome II. 2e semestre 1891.

Massieu. — Nouveaux ordres généraux de la Compagnie de l'Ouest. (113-205, 1 fig., 8 tabl.).

Examen des motifs qui ont conduit à adopter les dispositions qui font l'objet de trois ordres généraux relatifs :

1° A la limitation de la vitesse des trains;

2° A la distance à réserver entre les signaux avancés et leurs poteaux de limite de protection;

3° Au nombre de freins à placer dans les trains.

Collignon (*E.*). — Nomographie, par M. d'Ocagne. Paris, Gauthier-Villars et fils; 1891. (210-211).

Compte rendu bibliographique d'un Ouvrage récemment publié par M. d'Ocagne et qui se recommande à l'attention des ingénieurs.

Bricka. — Note sur la mesure des flèches et sur l'influence de la température dans la flexion des poutres droites. (325-339, 7 fig.).

Les méthodes en usage pour la détermination des flèches des poutres droites exigent des calculs longs et souvent compliqués, lorsqu'on veut tenir compte de l'inégale répartition des charges, mais on pourra faire cette détermination aussi exactement que possible au moyen d'une série dont il suffira, en général, de calculer quatre à cinq termes.

Quant aux variations de température, dont on ne tient généralement pas compte, elles peuvent, dans certains cas, fausser entièrement les résultats de l'observation des flèches.

Bazin (*H.*). — Expériences nouvelles sur l'écoulement en déversoir. (445-520, 1 fig., 4 pl., 35 tabl.).

Exposé des résultats des intéressantes observations et recherches auxquelles donne lieu l'étude de l'écoulement en déversoir. Les données numériques ainsi obtenues pourront servir de bases nouvelles à une théorie définitive.

Decœur (*P.*). — Bélier hydraulique à pulsations rapides. (646-652, 1 pl.).

Indication de quelques résultats d'expériences faites sur un petit modèle, dont les dispositions avaient reçu divers perfectionnements ayant pour objet, notamment, d'amortir les chocs violents qui se produisent habituellement lorsque l'appareil est actionné par une grande élévation d'eau.

Tome III, 1er semestre, 1892.

Considère. — Utilité des chemins de fer d'intérêt local. (217-485, 17 fig., 5 tabl., 2 pl.).

Cette importante étude appartient plus naturellement au domaine de la Statistique, mais elle emprunte à certaines notions mathématiques, d'ailleurs très

élémentaires, les moyens de démonstration et de vérification nécessaires à une discussion contradictoire que la nature de ces questions est appelée à soulever.

Locherer. — Note sur un profilomètre. (631-632, 2 fig.).

Modification proposée pour les études d'avant-projets de routes, et qui paraît d'un usage plus simple que celui des abaques de M. Lalanne, du profilomètre de M. Siegler ou de la règle à calcul de M. Toulon.

Widmer (*M.*). — Notice sur le canal du Havre à Tancarville. (633-801, 9 fig., 13 pl.).

Cette Notice est essentiellement descriptive, mais elle est complétée par des renseignements techniques relatifs aux écluses et aux machines élévatoires.

Ritter (*C.*). — Instruments nouveaux et procédés auxiliaires de jaugeage des eaux courantes. (805-879, 16 fig., 2 pl.).

L'auteur propose l'emploi d'un instrument de son invention, l'hydro-tachymètre, qu'il croit destiné à remplacer les types antérieurs du tube de Pitot dont il dérive.

Il étudie ensuite quelques procédés auxiliaires, comme la constatation des rides à la surface de l'eau ou les essais thermométriques et hydrotimétriques, auxquels on peut recourir dans les cas où les instruments proprement dits cessent d'être applicables, soit à cause de la faiblesse ou du caractère tumultueux des courants, soit en raison de l'exiguïté ou de l'irrégularité de leur section.

Cet ensemble de recherches a longuement occupé l'auteur; on en trouvera le développement dans plusieurs Mémoires antérieurs (*Annales*, 1880, 1885, 1886).

Tome IV, 2e semestre 1892.

D'Ocagne (*M.*). — Sur un abaque destiné au calcul des profils de terrassements. (168).

Simple remarque destinée à compléter la corrélation du profilomètre de M. Locherer avec les procédés de la Nomographie. Cette corrélation avait d'ailleurs été signalée par M. Locherer.

Chemin (*O.*). — Note sur un ellipsographe de M. Franz-Schromm. (279-280, 1 fig.).

La plupart des instruments construits pour tracer des ellipses reposent sur le principe suivant : Les deux extrémités d'un segment de longueur invariable se déplacent sur deux droites fixes; un point quelconque de ce segment décrit une ellipse.

Le dispositif adopté donne lieu toutefois à des frottements considérables qui nuisent beaucoup à la précision du tracé et permettent difficilement de dessiner des ellipses de grandes dimensions.

Le nouvel appareil ici décrit est affranchi de ces imperfections. Il se compose

de deux règles rectangulaires le long desquelles on peut amener et fixer deux réciprocateurs ou inverseurs Peaucellier. Le segment invariable est articulé aux extrémités de ces deux réciprocateurs, et un crayon, placé en un point convenable de ce segment, trace l'ellipse qu'il s'agit de dessiner.

Flamant. — Étude sur les formules de l'écoulement de l'eau dans les tuyaux de conduite (301-346, 3 pl., 20 tabl.).

L'auteur a été amené à proposer une nouvelle formule, en apparence plus compliquée, mais dont la forme lui semble s'accorder mieux que les autres avec le plus grand nombre des observations connues. Elle est d'ailleurs monôme et se prête plus facilement aux calculs par logarithmes que celles de Prony et de Darcy.

Galliot (*F.*). — Note sur le calcul des efforts dans les corps cylindriques en contact. (391-401).

Interprétation de formules établies par M. Boussinesq dans son Ouvrage : *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques.*

Raynaud (*A.*). — Note sur la détermination de la limite d'emploi des matériaux de deux carrières données. (442-444, 1 fig.).

Remarque sur l'application d'une formule préconisée par l'Administration.

Piton-Bressant (*L.*). — Note sur la mesure des polygones plans fermés et en particulier des profils en travers. (498-526, 32 fig.).

L'étude et la préparation des projets de travaux comprennent une partie de calculs matériels dont la mesure des aires planes irrégulières constitue un des principaux éléments; ce problème se rencontre si souvent qu'il a toujours stimulé la sagacité des chercheurs et provoqué les méthodes expéditives.

Celles-ci peuvent se diviser en trois groupes :

Les Tables, qui manquent de généralité;

Les planimètres, dont le prix élevé a malheureusement pu restreindre l'usage;

Les procédés graphiques, dont plusieurs, non basés sur des vérités géométriques élémentaires ou nécessitant des tracés compliqués, ne sont plus d'un usage familier.

On peut donc chercher à y substituer un moyen plus simple, empruntant à la Géométrie des formules ou des constructions usuelles.

Un polygone étant supposé partagé en triangles ayant pour bases les côtés du polygone et pour sommet commun un point donné dans le polygone, on peut ensuite transformer chacun des triangles en un autre triangle de même sommet et de même surface, mais ayant sa base sur une droite quelconque choisie dans le plan.

Ce procédé conduirait, pareillement, à la détermination graphique du centre de gravité d'un polygone ainsi qu'à une solution graphique du partage d'un polygone.

Théry (*P.*). — Note sur un procédé de représentation graphique des enclenchements. (527-547, 12 fig., 2 pl.).

L'emploi des appareils d'enclenchements est devenu aujourd'hui d'un usage courant sur les lignes de chemins de fer.

L'importance de ces nouveaux appareils justifie la recherche des simplifications que peut procurer leur représentation par une construction graphique.

Beghin. — Abaque de la vitesse d'un train sur un profil donné. (548-550, pl.).

Application au problème ci-dessus de la méthode des points isopléthes, exposée dans la *Nomographie* de M. d'Ocagne.

Colson. — La formule d'exploitation de M. Considère. (561-616).

Quelques réflexions, à ce sujet, sur l'utilité des chemins de fer secondaires et sur les tarifs.

Dans le Mémoire inséré au tome III, M. Considère a indiqué une formule nouvelle, appelée par lui *formule à six termes*, qu'il propose d'appliquer au calcul des sommes allouées, en vue de couvrir leurs frais d'exploitation, aux concessionnaires des chemins de fer d'intérêt local pour l'établissement desquels le concours financier des départements et de l'État est nécessaire.

Cette formule peut s'écrire

$$F = 1000 + 0,15\,R^{(v)} + 0,25\,R^{(m)} + 0,004\,V^{(k)} + 0,012\,M^{(k)} + 0,40\,K,$$

$R^{(v)}$ désignant la recette voyageurs, $R^{(m)}$ la recette marchandises, $V^{(k)}$ le nombre de voyageurs kilométriques, $M^{(k)}$ le nombre de tonnes kilométriques de marchandises, K le nombre de kilomètres parcourus par les trains.

Elle paraît susceptible de simplifications, soit par suppression du quatrième terme, soit encore par modification des coefficients restants

$$F = 300 + 0,5\,R + 0,005\,M + 0,30\,R.$$

Quoi qu'il en soit, la formule de M. Considère paraît conduire, dans tous les cas, à une solution satisfaisante d'un problème qui avait jusqu'ici paru insoluble, et sa découverte est un vrai service rendu à tous ceux qui ont à préparer des conventions pour l'établissement de chemins de fer secondaires.

De Boulongne (*L.*). — Note sur les ponts suspendus avec poutres raidissantes articulées en leurs milieux. (667-753, 14 fig., 2 pl., 1 tabl.).

On a cherché depuis longtemps à rendre rigides les tabliers des ponts suspendus, et le procédé le plus généralement adopté consiste à remplacer les garde-corps ordinaires qui dans les anciens ponts suspendus servaient uniquement à assurer la sécurité de la circulation, par de véritables poutres armées occupant toute la longueur de chaque travée et donnant une certaine rigidité aux tabliers.

Mais cette solution présente un inconvénient sérieux qui est la grande diffi-

culté que l'on éprouve à calculer les efforts supportés par les différentes pièces d'un pareil pont.

Pour obtenir des simplifications, il faut user d'un artifice de construction qui change peu le mode d'action des poutres raidissantes et qui permet de faire les calculs avec la plus grande facilité.

Cet artifice consiste à couper chaque poutre raidissante en son milieu en réunissant les deux moitiés par une articulation et à fixer en même temps les extrémités des poutres sur les piles, de façon à empêcher tout déplacement vertical de ces extrémités.

Bernis. — Note sur le raccordement parabolique entre deux arcs de cercle contigus de même sens. (754-756, 3 fig.).

Simplification des épures employées par M. Nordling pour le raccordement d'un alignement droit et d'une courbe circulaire, et pour le raccordement parabolique doublement osculateur de deux courbes circulaires, en adoptant, pour ces deux tracés, la parabole du troisième degré.

Deslandres. — Action des chocs rythmés sur les travées métalliques. (765-782, 1 fig., 1 pl.).

On connaît depuis le terrible accident du pont de la Basse-Chaîne à Angers l'action considérable que les chocs rythmés peuvent avoir sur les ponts suspendus; mais il est admis d'une façon assez générale que, pour les travées ordinaires, on n'a pas à se préoccuper de ce genre de chocs.

L'objet du présent article est d'établir que, contrairement à cette opinion, des chocs légers mais bien rythmés pouvaient avoir une action très énergique sur certaines travées à poutre droite.

Collignon (*E.*). — Remarque sur la manière de trouver le débit d'un tuyau de conduite. (845-847).

Exposé d'une méthode de résolution d'une équation particulière du deuxième degré rencontrée en Hydraulique.

H. B.

ASSOCIATION FRANÇAISE POUR L'AVANCEMENT DES SCIENCES; COMPTES RENDUS DES SESSIONS [1].

10e session (Alger); 1881.

Laisant. — Régions d'un plan et de l'espace (71-76).

Laquière. — Observations sur l'origine naturelle et géométrique du calcul des équipollences. (76-84).

---

[1] Voir *Bulletin*, VI_1, 159.

Laisant. — Sur les développements de certains produits algébriques. (84-108).

Villaret (*E.*). — Sur le dodécaèdre régulier. (109).

Poincaré (*H.*). — Sur les invariants arithmétiques. (109-117).

Oltramare. — Note sur la série qui résulte des développements de $\frac{x}{e^x - 1}$ suivant les puissances de x. (117-127).

Fiedler. — De la Géométrie des systèmes des cercles, développée par une méthode nouvelle de représentation. (127-132).

Poincaré (*H.*). — Sur les applications de la Géométrie non euclidienne à la théorie des formes quadratiques. (132-138).

Brocard (*H.*). — Étude d'un nouveau cercle du plan du triangle. (138-159).

Pellet (*A.-E.*). — Exemples d'équations numériques non résolubles par radicaux. (160-162).

Laquière (*E.*). — Quelques réflexions sur les origines des idées géométriques. (162-169).

Liguine. — Sur les axes des courbes anallagmatiques. (169).

Schoute. — Sur une enveloppe qui se présente dans le mouvement élémentaire d'une conique dans son plan. (170).

Pellet (*A.-E.*). — Sur les tétraèdres. (170-174).

Lemoine (*E.*). — Quelques questions de Géométrie de position sur les figures qui peuvent se tracer d'un seul trait. (175-180).

Trépied. — Remarques sur la méthode de Cauchy pour le calcul des irrégularités des planètes. (180-183).

Laisant. — Sur certaines questions de limites. (184-196).

Collignon (*E.*). — Sur la cubature des solides de révolution. (196-225).

Jaubert. — Nouveaux systèmes de grandes lunettes. Présentation de photographies. (225).

Trépied. — Projet d'un observatoire à Alger. (226).

Laquière. — Démonstration rationnelle des premiers principes des déterminants. (226-230).

Pellet. — Sur les déterminants. (231).

Liguine (*V.*). — Sur les aires des courbes anallagmatiques. (231-242).

11e session (La Rochelle); 1882.

Tchebicheff (*P.*). — Sur la rectification des courbes. (63-64).

Parmentier (*Général*). — Nouvelles formules de quadrature. (64-68).

Prompt (*P.-Y*). — Des propriétés mathématiques de l'Atlantide de Platon. (68).

Iung (*G.*). — Détermination des centres de gravité des solides ou des surfaces de révolution. (68-69).

Collignon (*E.*). — Problème de Géométrie. (69-85).

Ragona (*D.*). — Sur la détermination de la déclinaison magnétique absolue. (86).

Ferrero (*A.*). — Avancement des travaux géodésiques en Italie. (86-91).

Betocchi (*A.*). — Des marégraphes existant en Italie et des observations maréographiques italiennes. (91).

Tchebicheff (*P.*). — Sur une nouvelle machine arithmétique. (91-92).

Baehr. — Sur les intégrales d'un système d'équations différentielles linéaires du premier ordre, à coefficients constants et sans second membre, dans le cas où l'équation caractéristique a des racines égales. (92-96).

Andréef. — Sur les polygones de Poncelet. (96-101).

Stephanos (*C.*). — Sur le mouvement d'une figure de forme invariable. (101-102).

Deprez (*Marcel*). — Sur le dynamomètre hydraulique de M. Froude. (102).

Laisant. — Théorème d'Algèbre. (102-103).

Laisant. — Simple remarque sur les podaires. (104-106).

Laisant. — Propriétés du mouvement d'une figure plane qui reste semblable à elle-même. (106-108).

Tchebicheff (*P.*). — Sur le choix du rayon dans les intégrales définies prises le long d'un cercle, par lesquelles on exprime les probabilités d'après leurs fonctions génératrices. (108).

Lemoine (*E.*). — Étude sur de nouveaux points remarquables du plan d'un triangle. (108-121).

Lemoine (*E.*). — Théorèmes sur les droites menées par un point du plan d'un triangle, parallèlement à ses côtés. (122-127).

Collignon (*E.*). — Problème de Mécanique. (127-144).

Casalonga. — Sur la transformation de la chaleur en travail mécanique et réciproquement. (144).

Guébhard (*A.*). — Sur un procédé expérimental pour la résolution du problème des isothermes dans le plan. (145).

Baehr. — Questions d'Optique. (145-149).

Hennessy. — Une question de Géodésie. (149).

Tchebicheff (*P.*). — Sur les fonctions dont la dérivée d'un certain ordre s'écarte le moins possible de zéro. (150).

Bouquet de la Grye. — Sur l'intensité de la pesanteur. (150).

Stephanos (*C.*). — Sur les invariants des formes binaires du cinquième et du sixième ordre. (150-151).

Ferrero (*A.*). — Sur la nécessité de coordonner les travaux cartographiques et géométriques de toutes les administrations de l'État, et sur l'institution, dans ce but, d'un Conseil central. (151).

12e session (Rouen); 1883.

Lucas (*Ed.*). — Sur l'Arithmétique figurative; les permutations. (83-97).

Longchamps (*de*). — Sur les nombres pseudo-Bernoulliens et ultra-Bernoulliens. (97).

Catalan. — Notes d'Algèbre et d'Arithmétique. (98-101).

Leveau. — Sur les comètes périodiques; comète de d'Arrest. (102).

Collignon (*E.*). — Sur la chaînette d'égale résistance. (102-112).

Perrier (Colonel). — Le passage de Vénus sur le Soleil. (112).

Desboves. — Sur la résolution complète d'une équation biquadratique $8x^4 - 8y^4 = 5z^2$. (113).

Lemoine (*E.*). — Sur les nombres formés des mêmes chiffres écrits en sens inverse. (113-122).

Lemoine (*E.*). — Sur les quatre groupes de deux points d'un triangle ABC qui sont en même temps les foyers d'une conique inscrite et d'une conique circonscrite à ce triangle. (122-126).

Leveau. — Théorie du mouvement de Vesta. (126).

Lechalas. — De l'emploi de l'hypothèse dans les sciences mathématiques. (127).

Vanecek (*J.-S.*). — Explications de la transformation par rayons vecteurs réciproques. (127-131).

Schoute (*P.-H.*). — Sur deux transformations géométriques uniformes. (131-152).

Jung (*G.*). — Sur les systèmes de points qui n'ont pas de barycentre. (152-155).

Collignon (*E.*). — Quelques problèmes sur le mouvement relatif. (156-169).

Lucas (*Ed.*). — Le saut du cavalier. (170).

Stephanos (*C.*). — Sur la décomposition en fractions simples d'une fraction rationnelle homogène. (170-171).

Mantel. — Sur les combinaisons d'éléments dispersés dans un plan. (171-175).

Longchamps (*G. de*). — Transformations unicursales et réciproques. (175).

Stephanos (*C.*). — Sur un système remarquable de six positions d'une figure plane sur un plan. (175-176).

Genaille (*H.*). — Machine à calculer. (177-178).

Laisant (*C.-A.*). — Sur un système de figures semblables dans un même plan. (178-181).

Laisant (*C.-A.*). — Remarque sur les intégrales définies. (181).

Lucas (*Ed.*). — Sur un Mémoire de Cauchy et sur les nombres de Bernoulli. (182).

Royer (Mme *Cl.*). — Critique de l'hypothèse de Laplace et détermination de l'orbite solaire. (182-188).

Brocard (*H.*). — Nouvelles propriétés du triangle. (188-196).

Parmentier (Général). — Problème des *n* reines. (197-213).

Genaille (*H.*). — Graphiques de résistance des matériaux. (214).

Lucas (*Ed.*). — Calendrier perpétuel julien et grégorien. (215-217).

13e session (Blois); 1884 [1].

Lucas (*Ed.*). — Le calcul et les machines à calculer (Conférence). (111-141).

Collignon (*E.*). — Problème de Mécanique. (143, 1*-11*).

Longchamps (*G. de*). — Transformation plane des quadriques. (143-144).

Catalan. — Sur les formules relatives aux intégrales eulériennes. (144, 11*-14*).

---

[1] Le volume des *Comptes rendus de l'Association* se subdivise pour la session 1884 en deux Parties : 1° Assemblées générales, Conférences, Procès-Verbaux des séances de sections; 2° Notes et Mémoires, — présentant chacun une pagination distincte.

Nos renvois se rapportent à la première Partie. S'il y a lieu de signaler des Communications insérées avec développements dans la seconde Partie, la pagination de celle-ci sera indiquée par des astérisques.

Collignon (*E.*). — Mesure, sur une carte plane, des lignes tracées sur la sphère terrestre. (144, 15*-36*).

Catalan (*E.*). — Problèmes et théorèmes de probabilités. (144-145).

Polignac (*C. de*). — Remarques sur la notation d'éléments liés entre eux par l'une ou l'autre de deux relations réciproques. (145, 37*-42*).

Schoute (*P.-H.*). — Quelques théorèmes géométriques. (145, 42*-47*).

Trouvelot. — Sur la structure intime de l'enveloppe solaire. (146).

Rabourdin (*L.*). — Théorie mathématique de la valeur. (146).

Rateau. — Sur les centres des accélérations dans le mouvement d'une figure plane invariable se déplaçant dans un plan fixe. (146-147).

Lemoine (*E.*). — Nouvelle solution d'un problème d'arpentage. (147, 47*-49*).

Lemoine (*E.*). — Sur les points associés du plan d'un triangle ABC (147, 49*-57*).

Lemoine (*E.*). — Divers théorèmes sur les propriétés de la somme d'un nombre et de ce nombre renversé. (147-148, 58*-63*).

Lecornu. — Sur les forces analytiques. (148-149).

West (*E.*). — Intégrations des équations aux différences finies linéaires et à coefficients variables. (149, 64*-73*).

14e session (Grenoble); 1885 (1).

Commines de Marsilly (Général *de*). — Note sur la possibilité

(1) A partir de la session 1885 inclusivement, les *Comptes rendus* sont publiés en deux volumes, correspondant aux deux Parties indiquées à la session précédente. Nous rappelons que les renvois sans astérisques s'appliquent au premier volume, et que les astérisques indiquent qu'il s'agit de la pagination du second volume.

d'expliquer les actions moléculaires par la gravitation universelle. (87, 1*-6*).

Collignon (*E.*). — Problème de Géométrie. (87-88, 6*-23*).

Lemoine (*E.*). — Propriétés relatives à deux points ω, ω' du plan d'un triangle ABC qui se déduisent d'un point K quelconque du plan comme les points de Brocard se déduisent du point de Lemoine. (88, 23*-49*).

Lemoine (*E.*). — Divers problèmes de probabilité. (88-89, 50*-67*).

Oltramare. — Généralisation des identités. (89).

Cerruti (*V.*). — Sur la déformation d'une sphère homogène isotrope (89, 68*-79*).

Neuberg (*J.*). — Sur les surfaces anallagmatiques. (79*-88*).

Neuberg (*J.*). — Sur le point de Steiner. (90, 89*-90*).

Zenger (*C.-V.*). — Solution logarithmique des équations numériques. (90-91, 91*-94*).

Longchamps (*G. de*). — Intégration de certaines suites récurrentes. (91, 94*-100*).

Lucas (*Ed.*). — Le calendrier en bâtons. (91).

Pillet. — Équilibre du cerf-volant. (91, 101*-107*).

Collignon. — Une remarque sur la Dynamique. (91-92, 107*-123*).

Rindi (*S.*). — Quelques théorèmes d'énumération géométrique. (92, 123*-127*).

Oltramare (*G.*). — Note sur la valeur de l'expression

$$\varphi(x+y\sqrt{-1})+\varphi(x-y\sqrt{-1}).$$

(92, 127*-131*).

Longchamps (*G. de*). — Construction par points et tangentes des cubiques circulaires unicursales. (92-93, 131*-135*).

Aubel (*Van*). — Quelques notes sur le problème de Pell. (93, 135*-155*).

Schoute (*P.-H.*). — Sur les carrés magiques à enceinte (93, 152*-155*).

Lucas (*Ed.*). — Construction des carrés magiques. (93).

Schoute (*P.-H.*). — Sur une généralisation d'un problème de Steiner. (93-94).

Schlegel (*V.*). — Sur le système des coordonnées réciproques à celui des coordonnées polaires. (94, 156*-168*).

Lucas (*Ed.*). — Figuration géométrique des formules d'Algèbre. (94).

Genaille. — Nouveaux appareils à calculer. (94).

Arnoux (*G.*). — Solution des carrés de magie diverse de tous les nombres entiers sans exception. (94).

Schoute (*P.-H.*). — Sur la construction des cubiques unicursales. (94, 169*-179*).

Oltramare (*G.*). — Nouvelle application du calcul de généralisation à l'intégration des équations aux différentielles partielles. (94).

15e session (Nancy); 1886.

Mathieu (*Em.*). — Mouvement permanent de l'électricité dans une plaque rectangulaire. (79, 1*-5*).

Dormoy (*Em.*). — Théorie mathématique des jeux de Bourse. (79-80).

Longchamps (*G. de*). — Les points d'inflexion dans les cubiques circulaires unicursales droites. (80, 5*-11*).

Tarry (*G.*) et *Neuberg* (*J.*). — Sur les polygones et les polyèdres harmoniques. (80, 12*-26*).

Collignon (*E.*). — Rendre tautochrone une courbe qui ne l'est pas (Rectification). (80, 27*-28*).

Collignon (*E.*). — Examen de certains cas-limites de la loi de l'attraction newtonienne. (80-81, 27*-42*).

Catalan. — Sur les nombres de Segner. (81).

Roberts (*S.*). — Sur le 25e problème du 5e Livre de Diophante et la solution par Fermat. (81, 43*-49*).

Tarry. — Géométrie de situation : nombre de manières distinctes de parcourir en une seule course toutes les allées d'un labyrinthe rentrant, en ne passant qu'une seule fois par chacune des allées. (81, 49*-53*).

Collignon (*E.*). — Problème de Géométrie. (81-82, 53*-68*).

Longchamps (*G. de*). — Une conique remarquable du plan d'un triangle. (82, 69*-83*).

Lemoine (*E.*). — Questions diverses sur la Géométrie du triangle. (82, 83*-100*).

Dormoy (*Ém.*). — Théorie mathématique du jeu de l'écarté. (83).

Leveau. — Détermination des éléments du Soleil. (83).

Lucas (*Ed.*). — Sur l'emploi des criteriums cubiques, biquadratiques et octiques, suivant un module premier (83, 101*-103*).

Berdellé (*Ch.*). — L'Arithmétique des directions et des rotations. (83, 103*-110*).

Commines de Marsilly (Général *de*). — Énumération des lignes courbes planes du troisième degré. (84, 110*-130*).

Dumiot. — Pratique de la résistance des matériaux. (84).

Arnaudeau. — Étude sur π (84).

Coccoz. — Carrés magiques impairs à enceintes successives. (84, 130*-134*).

Dupuis (*J.*). — Le nombre géométrique de Platon. (84, 135*-140*).

Féret (*J.*). — Application du Calcul des probabilités à l'étude d'un jeu forain. (84).

Jamet (*V.*). — Note sur les lignes asymptotiques d'une catégorie de surfaces. (84-85, 140*-148*).

Chenevier. — Le triangle à calcul; le triangle articulé à calcul. (85).

Catalan. — Sur une classe d'équations différentielles. (85).

Catalan. — Théorème sur des intégrales définies équivalentes. (85).

Catalan. — Sur une formule d'Eisenstein. (86).

Fouret. — Sur une généralisation du théorème de Kœnig, relatif à la force vive d'un système matériel. (86).

Fouret. — Sur un mode de génération de la spirale de Poinsot. (86).

Escary. — Sur la convergence de certaines séries doubles, rencontrées par Lamé dans la théorie analytique de la chaleur, à l'occasion de la sphère et des ellipsoïdes de révolution. (86-87, 149*-170*).

Frolov (Général). — Nouvelles recherches sur les carrés magiques. (87, 170*-183*).

Delannoy. — Emploi de l'échiquier pour la solution de problèmes arithmétiques. (87, 183*-188*).

A. L.

NOUVELLES ANNALES DE MATHÉMATIQUES, rédigées par MM. CH. BRISSE et E. ROUCHÉ [1]. — 3e série.

Tome VI, 1892.

Laurent (*H.*). — Sur l'élimination. (5-7).

Méthode permettant d'écrire explicitement la résultante de deux équations, sans même qu'il soit nécessaire de faire intervenir les coefficients.

---

[1] Voir *Bulletin*, XVI, p. 169.

Carvallo (*E.*). — La méthode de Grassmann. (8-37).

Dans le même Recueil (1891, p. 219 et 341), l'auteur a déjà publié deux Notes sur l'application de cette méthode à la théorie des déterminants. Il se propose ici de faire connaître les principes essentiels de cette théorie, et y parvient avec une remarquable clarté d'exposition. Cet article lui a été suggéré par les travaux de M. Caspary et par l'excellent livre de M. Peano, *Calcolo geometrico*, sur le même sujet.

L'étude de M. Carvallo, dans le détail de laquelle nous ne pouvons entrer, présente les grandes divisions suivantes :

I. Formes géométriques; Définitions et règles de calcul. — II. Vecteurs. — III. Discussion des trois formes. — IV. Coordonnées; Déterminants; Homographie; Dualité; Produits d'ordre quelconque.

Il est à espérer que ce travail contribuera à répandre la connaissance de la méthode de Grassmann, méthode déjà ancienne, et dont les applications sont en nombre infini.

Farjon (*F.*). — Sur le quadrilatère. (41-47).

Propriétés du quadrilatère gauche, fondées sur la considération d'un plan remarquable, que M. Farjon appelle *plan orthique* du quadrilatère. Le cas particulier du quadrilatère inscriptible conduit notamment à des propositions intéressantes.

Amigues (*E.*). — Démonstration analytique du théorème de M. Rouché, relatif à un système d'équations algébriques du premier degré. (47-48).

Cette démonstration d'un théorème classique paraît remarquable, dans sa brièveté.

Lemaire (*J.*). — Solution géométrique de la question de Mathématiques du Concours de l'École Polytechnique en 1891. (49-60).

Malo (le Capitaine). — Autre solution géométrique de la même question (61-70).

Par chaque point d'une parabole on porte parallèlement à une direction fixe Δ, et dans les deux sens, des longueurs égales à la distance du point au foyer : 1° Lieu des extrémités; il se compose de deux paraboles P_1, P_2; 2° Les axes de P_1, P_2 sont rectangulaires, et pivotent autour d'un point indépendant de Δ; la somme des carrés des paramètres de P_1, P_2 est constante; 3° Lieu des sommets des paraboles P_1, P_2.

D'Ocagne (*M.*). — Sur la corrélation entre les systèmes de coordonnées ponctuelles et les systèmes de coordonnées tangentielles. (70-75).

L'auteur, en même temps qu'il fournit sur la question de précieuses indica-

tions bibliographiques, fait ressortir la parfaite corrélation qui existe entre son système de *coordonnées parallèles* et le système des coordonnées cartésiennes. Le Chapitre IV de sa *Nomographie* lui avait déjà offert l'occasion d'insister sur ce point. Il montre ici, en outre, la correspondance entre les coordonnées parallèles ponctuelles et les coordonnées pluckériennes.

Malo (le Capitaine). — Solution de la question de Mathématiques proposée au Concours d'admission à l'École Normale supérieure en 1891. (75-77).

Problème relatif à une ellipse et à la circonférence passant par un point du plan et par les points de contact des tangentes à l'ellipse, issues de ce point.

Peano (*G.*). — Sur le théorème général relatif à l'existence des intégrales des équations différentielles ordinaires. (79-82).

L'auteur rappelle une Note publiée par M. Picard sur le même sujet, et montre que, en faisant les hypothèses admises par M. Picard, on peut établir, non seulement que les intégrales existent, mais encore qu'elles sont uniques.

Fouret (*G.*). — Sur le théorème de Budan et Fourier. (82-88).

M. Fouret donne une démonstration simplifiée de ce célèbre théorème, dont il fait avec raison ressortir la grande importance pédagogique. Il montre aussi comment le théorème de Descartes n'est qu'une conséquence de celui de Budan et Fourier, et combien ce dernier s'applique heureusement à la détermination des limites des racines.

Saint-Germain (*A. de*). — Mouvement d'un point pesant attiré par un point fixe suivant la loi de Newton. (89-97).

Application des équations d'Hamilton et de Jacobi à un problème sur lequel une étude posthume de Cellerier a été publiée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques* (juin 1891). L'analyse en est ainsi de beaucoup simplifiée.

Lemaire. — Sur le centre de courbure de la parabole. (98-99).

Construction très simple, fondée sur la remarque géométrique suivante : si une circonférence passe par le sommet d'une parabole, les normales aux trois autres points d'intersection passent par un même point.

Jamet (*V.*). — Sur les séries à termes positifs. (99-103).

Nouveau criterium de convergence pour les séries de cette nature; la série sera convergente s'il existe un nombre positif p, tel que $u_n^{\frac{1}{np}}$ tende vers une limite supérieure à 1.

Moutard. — Sur les courbes du troisième degré. (113-115).

Étude du problème suivant : « Trouver deux faisceaux de trois droites concourantes dont les neuf points communs soient situés sur une courbe donnée du troisième degré ».

Appell (*P.*). — Sur les courbes dont les tangentes appartiennent à un complexe linéaire. (115-119).

M. Appell donne les formules générales des coordonnées d'un point d'une telle courbe, dont les cubiques gauches sont un cas particulier. L'emploi des coordonnées tétraédriques lui permet de traiter la question avec une grande élégance.

Laurent (*H.*). — Démonstration simple des formules qui servent au calcul des Tables de logarithmes sinus. (119-120).

Les formules dont il s'agit sont

$$\log \sin x = \log x + \log\left(1 - \frac{x^2}{\pi^2}\right) + \ldots + \log\left(1 - \frac{x^2}{x^2 \pi^2}\right) + \ldots,$$

et une autre analogue pour les cosinus.

Molenbroch. — Sur quelques propriétés du triangle. (121-147, 179-199).

Cette étude débute par l'intéressante proposition que voici : « Deux triangles étant homologiques, si l'on prend l'intersection de chaque côté de l'un avec les deux côtés non homologues de l'autre, les six points ainsi obtenus sont sur une conique ». Il y a un théorème corrélatif, facile à énoncer. Ce point de départ permet à l'auteur, à l'aide de quelques calculs, d'établir en outre d'assez nombreuses propriétés sur les triangles homologiques.

Lévy (*L.*). — Extrait d'une lettre adressée à M. Rouché. (147-148).

Communication d'une démonstration de M. Picard, concernant un théorème de M. Meyer sur les équations algébriques. Voir *Bulletin*, t. XVI, p. 171.

Vogt. — Sur les angles et sur les distances en coordonnées trilinéaires. (148-158).

Cette étude, qui fait suite aux travaux de Laguerre et de M. Klein, sera utilement consultée par tous ceux qui s'intéressent aux coordonnées trilinéaires et qui en font usage. Elle se divise ainsi :

Des coordonnées de points et de droites; Des points cycliques et des angles; Des distances.

Boulanger (*A.*). — Note sur les surfaces à génératrice circulaire. (159-163).

L'auteur se propose de déterminer les surfaces à génératrice circulaire telles que les plans tangents menés par les points de chaque génératrice enveloppent un cône. Il établit en même temps plusieurs propriétés de ces surfaces.

Amigues (*E.*). — Théorème sur les foyers d'une courbe quelconque. (163-167).

M. Amigues énonce avec plus de précision un théorème sur les foyers qui

figure notamment dans l'Ouvrage de Salmon : *A treatise on the higher plane curves*, et que nous ne saurions reproduire ici. Il en donne en même temps une démonstration simplifiée.

Malo (*E.*). — Sur le calcul par approximation des racines des équations numériques. Modification de la formule de Newton. (169-178).

Exposé d'une méthode de M. Zenger publiée dans le t. XI du *Journal de Mathématiques et de Physique de Prague*, et résumée dans le *Bulletin des Sciences mathématiques*, t. XIII, p. 211. M. Malo y ajoute de très intéressantes remarques.

Roubaudi. — Solution de la question de Géométrie descriptive proposée au Concours d'agrégation (enseignement spécial) en 1891. (199-208).

Surface engendrée par un cercle tournant autour d'une droite. A la solution géométrique, M. Roubaudi joint une étude analytique qui la complète.

Laisant (*C.-A.*). — Constructions et formules relatives au triangle. (209-212).

Conséquences de deux équipollences symétriques remarquables, qui fournissent un procédé simple de construction de certains éléments du triangle, ainsi que d'assez nombreuses propositions de Trigonométrie.

Antomari (*X.*). — Sur un théorème de Géométrie analytique. (212-216).

Ce théorème est le suivant : « Par cinq points donnés, tels qu'il n'y en ait pas quatre en ligne droite, on peut faire passer une conique et une seule ». Démonstration analytique simple, fondée sur l'emploi des déterminants.

Tresse (*A.*). — Sur l'intersection de deux quadriques, dans le cas où elle se décompose. (216-227).

Cette question, qui figure au programme de l'Agrégation, a déjà été traitée par M. Kœnigs. M. Tresse la reprend en employant un mode de représentation plane, dû à Clebsch (*Vorlesungen über Geometrie*). Il ramène ainsi le problème à l'étude des courbes planes du quatrième degré ayant deux points doubles donnés. La discussion des diverses hypothèses possibles l'amène à plusieurs propositions dignes d'intérêt.

Fouché (*M.*). — Sur les cercles qui touchent trois cercles donnés ou qui les coupent sous un angle donné. (227-244, 331-349, 404-424).

Dans ce Mémoire, l'auteur développe une méthode qui présente sur celle de Gergonne plusieurs avantages énumérés par lui. Cette méthode repose sur l'emploi des cercles isogonaux, c'est-à-dire coupant sous un même angle les trois cercles donnés. Plusieurs théorèmes sur les cercles isogonaux le conduisent au

problème du cercle tangent, dont la solution est accompagnée de plusieurs remarques intéressantes. Il applique ensuite la méthode aux cas particuliers où les cercles se trouvent remplacés par des droites ou des points. Vient ensuite une discussion générale, portant sur les positions relatives des cercles donnés. Puis M. Fouché traite divers problèmes sur les cercles isogonaux, et auxquels s'applique heureusement sa méthode. La suite du Mémoire comprend les divisions ci-après :

Des familles de cercles qui sont coupés sous un même angle par chaque cercle d'un faisceau. — Application aux coniques. — Extension de la théorie précédente aux cercles tracés sur la sphère. — Extension aux sphères.

Amigues (*E.*). — Note sur un problème d'Algèbre. (245-249).

Ce problème, qui ne figure dans aucun ouvrage d'Algèbre, est le suivant : « x et z étant deux racines quelconques d'une équation algébrique, former une équation ayant pour racines les valeurs $\frac{\psi(x, z)}{F(x, z)}$, ψ et F étant deux polynômes en x et en z, n'admettant pas de diviseur commun ».

Valdès (*E.*). — Sur la Géométrie du triangle. (249-250).

Propriétés nouvelles de la symédiane, du point de Lemoine et de la droite de Simson.

Tarry (*G.*). — Sur les figures équipollentes. (251-259).

M. Tarry appelle ainsi deux figures planes où le rapport anharmonique généralisé de quatre points d'une figure est le même que celui des quatre points correspondants de l'autre. Il établit plusieurs propriétés des figures directement ou inversement équipollentes, et applique cette théorie à des figures sphériques. On peut, sur le même sujet, consulter les travaux de Bellavitis. *Voir* notamment : C.-A. Laisant, *Théorie et applications des équipollences*, Ch. VI, p. 168-177.

Concours d'admission a l'École Polytechnique en 1892. — Énoncés des compositions. (259-261).

Laisant (*C.-A.*). — Solution de la composition de Mathématiques donnée au Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1892. (262-265).

Larose. — Autre solution de la même question. (266-267).

Propriétés et lieux géométriques, relatifs à l'hyperbole équilatère. La solution de M. Laisant est exclusivement basée sur l'emploi des équipollences. Celle de M. Larose est purement géométrique.

Saint-Germain (*de*). — Sur la convergence des séries. (267-268).

Remarque concernant un criterium indiqué par M. Jamet dans un article du même Recueil (*voir* plus haut).

Speckel (*Ch.*). — Sur la Géométrie cinématique. (268-276).

L'auteur reprend une question étudiée par M. d'Ocagne : trajectoires des points marqués sur une droite qui se déplace en touchant constamment par l'un d'eux une courbe donnée. Il y applique les méthodes de la Géométrie cinématique, et complète sur quelques points les résultats obtenus par M. d'Ocagne.

Astor. — Sur quelques propriétés des courbes planes unicursales du troisième ordre. (276-288).

Étude, par un procédé élémentaire, des points d'inflexion réels des cubiques gauches unicursales. L'auteur est ainsi conduit à plusieurs théorèmes qui paraissent nouveaux.

Correspondance. — M. Peano (Extrait d'une lettre à M. Brisse) : rectification d'une démonstration de M. Laurent, publiée dans le même Recueil, p. 119 [*voir* plus haut (289)].

Ravier (*L.*). — Construction du dixième point d'une quadrique. (289-291).

Démonstration nouvelle du théorème de Pascal, et extension aux quadriques.

Worontzoff. — Sur l'élimination. (291-299).

Il s'agit de l'élimination entre deux équations de degrés entiers m et n. Les calculs de l'auteur l'amènent à une discussion qui lui permet de retomber sur les méthodes de Bézout, d'Euler ou de M. Sylvester.

Séguier (*J. de*). — Sur la série de Fourier. (299-301).

L'auteur établit, sur la série de Fourier, plusieurs formules qui permettent de retrouver des développements de Fourier et de Laurent, obtenus ordinairement par le théorème de Cauchy.

Concours d'admission a l'École Normale supérieure en 1892. — Énoncés des compositions de Mathématiques et de Physique. (301-302).

Lefèvre (*J.*). — La symétrie en coordonnées polaires. (302-314, 353-374).

Dans une première Partie, M. Lefèvre indique les différentes combinaisons des symétries qui peuvent se présenter, soit par rapport au pôle, soit par rapport à une droite passant par le pôle. Dans une seconde Partie, il recherche la forme analytique de l'équation d'une courbe possédant telle ou telle symétrie. L'étude dont il s'agit présente les divisions principales que voici :

Première Partie. — Axes de symétrie. — Centre de symétrie. — Centre et axes.

Seconde Partie. — Axes de symétrie : équations générales des courbes pos-

sédant m axes de symétrie d'espèce donnée. — Centre de symétrie. — Centre et axes. — Équation cartésienne des courbes ayant m axes de symétrie passant par l'origine.

Agrégation des Sciences mathématiques (Concours de 1892). — Énoncés des compositions. (314-317).

Bruyère (*G.*). — Solution géométrique du problème donné au Concours général en 1891. (317-320).

Propriétés d'un faisceau de quadriques.

Ravier (*L.*). — Note sur une construction du centre de courbure de l'ellipse. (324-326).

Une droite enveloppant un cercle, et le point de contact étant fixe sur la droite, tous ses points décrivent des circonférences. C'est en faisant une perspective cavalière de cette figure mobile que M. Ravier obtient la construction simple qui fait l'objet de sa Note.

D'Ocagne (*M.*). — Sur la construction de la parabole osculatrice en un point d'une courbe donnée. (326-330).

La construction est ramenée au problème suivant : Construire une parabole, connaissant un de ses points A, le diamètre passant par A, et le centre de courbure Ω répondant à ce point; problème que M. d'Ocagne résout simplement, à l'aide de quelques propriétés préliminaires.

Correspondance. — M. Barisien (extrait d'une lettre à M. Rouché) : Propriété de l'hyperbole équilatère, figurant dans la composition de l'École Polytechnique; démonstration très simple par la Géométrie analytique. (330-331).

Ravier (*L.*). — Sur un théorème analogue à celui de Carnot, ou généralisation du théorème de Jean de Ceva. (349-352).

En employant les équations tangentielles en coordonnées rectangulaires, l'auteur obtient une proposition sur les courbes algébriques, qui généralise le théorème de Jean de Ceva, et montre ensuite comment cette généralisation peut s'appliquer à des exemples particuliers.

Loucheur. — Sur le lieu des sommets des angles constants circonscrits ou normaux à une épicycloïde. Application à la démonstration purement géométrique de propriétés de la cycloïde, de la cardioïde et des hypocycloïdes à trois et quatre rebroussements. (374-384).

Démonstration d'une proposition énoncée par Chasles (*Aperçu historique*, 2e édition, p. 125). Le titre qui précède indique d'ailleurs suffisamment le sujet de l'article.

Pilleux (*H.*). — Sur les centres de courbure. (384-386).

Solution de ce problème : « Un angle droit tournant autour de son sommet intercepte sur deux courbes une sécante variable ; trouver le point où cette sécante touche son enveloppe ». Applications aux centres de courbure.

D'Ocagne (*M.*). — Sur la construction des cubiques cuspidales par points et tangentes. (386-394).

L'auteur considère le point d'inflexion I, le point de rebroussement R, et le point de rencontre T des tangentes en I et en R. Il montre comment la courbe peut être construite quand on connaît le triangle IRT, et en outre un élément simple de la courbe (point ou tangente).

Barisien (*E.-N.*). — Solution de la composition du Concours d'admission à l'École Normale supérieure en 1891 (394-403).

Propriétés d'une ellipse et du cercle passant par un point du plan et par les points de contact des tangentes à la courbe, issues de ce point.

Servais (*Cl.*). — Sur la courbure dans les sections coniques. (424-428).

En se servant du théorème de Brianchon, l'auteur établit des propositions intéressantes, et retrouve des résultats obtenus déjà par M. Mannheim et par M. Ribaucour.

Correspondance. — M. Mannheim (extrait d'une lettre) : Solution géométrique de la question 1625 proposée dans le même Recueil. (431-433).

Concours d'admission a l'École Centrale en 1892 (Première session). — Énoncés des compositions (433-436).

Audibert. — Solution de la question de Mathématiques spéciales proposée au Concours d'agrégation de 1891. (436-440).

Problème relatif à deux coniques.

Barisien. — Solution analytique de la question de Mathématiques proposée au Concours d'admission à l'École Polytechnique en 1892. (441-446).

Des solutions géométriques ont été précédemment publiées, p. 262, 267. *Voir* plus haut.

Barisien (*E.-N.*). — Solution de la composition du Concours d'admission à l'Ecole Normale supérieure en 1892. (446-453).

Sur les coniques doublement tangentes à un cercle.

Lemoine (*E.*). — Application d'une méthode d'évaluation de la

simplicité des constructions à la comparaison de quelques solutions du problème d'Apollonius. (453-474).

M. Lemoine rappelle brièvement les principes de sa méthode d'évaluation de la simplicité et de l'exactitude d'une construction géométrique. Puis, prenant texte de l'article de M. Fouché paru précédemment (p. 227), sur le célèbre problème d'Apollonius (*voir* plus haut), il se livre à une comparaison des plus intéressantes entre quelques-unes des constructions connues : celles de Viète, de Gergonne et Bobillier, de M. Fouché et de M. Mannheim. C'est cette dernière qui l'emporte de beaucoup, qu'il s'agisse de la simplicité ou de l'exactitude.

Méray (*Ch.*). — Sur la discussion et la classification des surfaces du deuxième degré. (474-509).

L'auteur entreprend de traiter cette question classique avec plus d'uniformité et de précision qu'on ne le fait généralement, et de déterminer des fonctions des coefficients, dont le signe ou la nullité indiquent immédiatement la nature de la surface. Il propose en même temps un perfectionnement de la classification. Sa méthode repose, comme on le pressent d'avance, sur la théorie des formes. Voici les divisions essentielles de cette étude, qui sera consultée avec grand fruit par les professeurs de Mathématiques spéciales :

Préliminaires sur les formes quadratiques. — Points doubles, pôles et plans polaires dans les surfaces du deuxième degré. Absence ou existence de points simples réels. — Génératrices rectilignes. — Points à l'infini. — Classification.

Marchand. — Solution de la question de Mathématiques proposée au Concours général de 1892. (509-518).

Propriétés d'une quadrique circonscrite à un ellipsoïde donné.

Mangeot (*S.*). — Sur l'intersection d'un tore et d'une quadrique. (519-526).

L'auteur se propose de résoudre la question suivante : Quelles sont les quadriques qui coupent le tore suivant deux courbes sphériques? Construire ces deux courbes. Il obtient, au cours de son étude, un assez grand nombre de propriétés nouvelles et intéressantes.

D'Ocagne (*M.*). — Sur une classe particulière de séries. (526-532).

Il s'agit des séries récurrentes; M. d'Ocagne, dans le présent article, se propose surtout de rectifier sur certains points l'une de ses études antérieures. *Voir* même Recueil, 3e série, t. III, p. 21-23; 1884.

D'Ocagne (*M.*). — Note sur le centre de courbure des podaires et antipodaires. (532-534).

Remarques à l'occasion d'une Note de M. H. Pilleux, antérieurement publiée, p. 384 (*voir* plus haut).

Farjon (*F.*). — Solution d'une question de Géométrie donnée au Concours général en 1887. (535-537).

Il s'agit de trouver la condition à laquelle doivent satisfaire deux coniques F et *f* pour qu'un quadrilatère puisse être à la fois circonscrit dans la première et inscrit dans la seconde.

Correspondance. — M. Méray (extrait d'une lettre) : A propos d'un article de lui, publié p. 474 (*voir* plus haut) : restitution de priorité à M. Darboux. (537).

Rouché (*E.*). — Notice sur C. Gerono. (538-542).

Exercices.

Questions proposées : 1621 à 1623. (1*).

Renon (*A.*). — Solution de la question 1574. (1*-2*).

Lieu relatif à l'ellipse.

Barisien. — Solution de la question 1604. (2*-4*).

Propriété d'une ellipse et d'une parabole.

Brocard. — Solution de la question 1545. (4*-10*).

Propriétés relatives aux trois normales menées d'un point à la parabole.

Audibert. — Solution de la question 1622. (10*-11*).

Propriété d'un faisceau de coniques.

Audibert. — Solution de la question 1623. (11*).

Barisien. — Remarques sur la même question. (11*-12*).

Les milieux des six cordes d'intersection de deux coniques et les centres des deux coniques sont sur une même conique.

Questions proposées : 1624 à 1632. (12*-14*).

Barisien, Loucheur (*L.*). — Solutions de la question 1621. (14*-19*).

Propriété d'une ellipse doublement tangente à une ellipse donnée et passant par ses foyers.

Valdès (*E.*). — Solution géométrique de la question 1622. (19*).

Propriété d'un faisceau de coniques.

Greenstreet (*W.-J.*). — Solution de la question 1618. (20*).

Construction d'un triangle, connaissant trois points divisant les côtés dans des rapports donnés.

Greenstreet (*W.-J.*). — Solution de la question 1620. (20*-22*).

Propriétés et lieux relatifs à l'ellipse.

Genty. — Solution de la question 1624. (22*-23*).

Propriété de lignes tracées sur une surface.

Barisien. — Solution de la question 1625. (23*-26*).

Propriété focale d'une conique et de deux de ses tangentes.

Audibert. — Solution de la question 1627. (26*-27*).

Propriété des points racines d'une équation algébrique.

Genty. — Solution de la question 1619. (27*-28*).

Propriétés de deux surfaces se correspondant point par point.

Questions proposées : 1633 à 1648. (29*-32*).

Droz Farny (*A.*). — Solution de la question 1513. (33*).

Propriété d'un triangle et d'une conique.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 1561. (33*-34*).

Propriété de la parabole.

Lemaire (*J.*). — Solution de la question 1568. (34*-35*).

Aire de la cissoïde de Dioclès.

Audibert. — Solution de la question 1583. (35*-37*).

Propriété d'une suite calculée d'après la loi $u_{n+1} = \log \frac{e^{u_n} - 1}{u_n}$.

Leinekugel (*G.*). — Solution de la question 1589. (37*-39*).

Formule relative à un quadrilatère inscriptible.

Léry. — Solution de la question 1644. (39*).

Propriété d'une normale à la parabole.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 1645. (39*-40*).

Propriété d'une lemniscate de Bernoulli et d'une hyperbole équilatère.

Dewulf (*N.*). — Solution de la question 1648. (40*-42*).

Sur les cercles de courbure d'une ellipse en deux points.

Crès (*de*). — Solution de la question 1559. (42*-43*).

Problème relatif à une pyramide régulière.

Brocard (*H.*). — Solution de la question 1569. (43*-45*).

Enveloppe et lieu relatifs à une conique et à l'une de ses tangentes.

Barisien. — Solution de la question 1643 (45*-46*).

Propriété d'un quadrilatère normal circonscrit à une ellipse.

Brocard. — Solution géométrique de la question 1641. (46*-47*).

Intersection d'une circonférence et d'une hyperbole équilatère.

Tarry. — Solution de la question 1601. (47*).

Inscription dans une sphère d'un polygone dont chaque côté passe par un point donné.

Signalons, en terminant, la très heureuse innovation introduite dans la Table des matières, où les rédacteurs ont fait figurer des indications qui correspondent à la classification adoptée par le Congrès de Bibliographie mathématique de 1889.

A. L.

FIN DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XVII.

217

TABLES

DES

MATIÈRES ET NOMS D'AUTEURS.

TOME XVII; 1893. — SECONDE PARTIE.

TABLE ALPHABÉTIQUE

DES MATIÈRES.

RECUEILS ACADÉMIQUES ET PÉRIODIQUES DONT LES ARTICLES ONT ÉTÉ ANALYSÉS DANS CE VOLUME.

Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse. T. III, année 1889. — 128-152.

Annales des Ponts et Chaussées. 6e série. T. XVII, 1er semestre; 1889. — T. XVIII, 2e semestre; 1889. — T. XIX, 1er semestre; 1890. — T. XX, 2e semestre; 1890. — 7e série. T. I, 1er semestre; 1891. — T. II, 2e semestre; 1891. — T. III, 1er semestre; 1892. — T. IV, 2e semestre; 1892. — 182-194.

Annales scientifiques de l'École Normale supérieure. 3e série, T. VIII, 1891. — 20-30.

Association française pour l'avancement des Sciences; comptes rendus des sessions. — 10e session (Alger); 1881. — 11e session (La Rochelle); 1882. — 12e session (Rouen); 1883. — 13e session (Blois); 1884. — 14e session (Grenoble); 1885. — 15e session (Nancy); 1886. — 194-204.

Atti della Reale Accademia dei Lincei. 4e série, Rendiconti. Vol. V, 1889; 1er semestre. — 2e semestre. — 57-75.

Bulletin de la Société Mathématique de France. T. XVIII, 1890. — T. XIX, 1891. — 5-10; 89-99.

Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences. T. CXII, 1891. — T. CXIII, 1891. — 30-57; 76-89.

Journal für die reine und angewandte Mathematik. T. CI, 1887. — 10-20.

Mathematische Annalen. T. XXXII, 1888. — T. XXXIII, 1889. — T. XXXIV; 1889. — 152-182.

Nouvelles Annales de Mathématiques. 3e série. T. VI, 1892. — 204-216.

Sitzungsberichte der königlich preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 1er semestre 1890. — 99-128.

TABLE DES NOMS D'AUTEURS

PAR ORDRE ALPHABÉTIQUE.

Amigues (E.). 33, 205, 207-209.
Andoyer. 134.
Andrade. 35.
Andréef. 196.
Antomari (X.). 98, 208.
Appell (P.). 30, 95, 96, 97, 145, 207.
Arnaudeau. 203.
Arnoux (G.). 202.
Arzela (C.). 62.
Astor. 210.
Aubel (Van). 202.
Audibert. 212, 214, 215.
Autonne. 36, 83.
Bäcklund (A.-V.). 179.
Baehr. 196, 197.
Barisien (E.-N.). 212, 214, 215, 216.
Baur (L.). 154.
Bazin (H.). 186, 190.
Béghin. 9, 10, 90, 187, 193.
Beltrami (E.). 63, 73.
Berdellé (Ch.). 203.
Bernis. 194.
Bertini (E.). 179.
Betocchi (A.). 196.
Bianchi (L.). 62, 66, 73.
Bigiavi (C.). 72.
Bioche. 7, 92, 93, 96, 97, 146.
Bochert (A.). 173.
Bartolotti (E.). 75.
Bougaief. 88.
Boulanger (A.). 207.
Boulongne (L.). 183, 193.
Bouquet de la Grye. 197.
Bourlet. 28.
Boussinesq. 50, 54, 76.
Braunmühl (A. von). 162.
Bricka. 190.
Brill (A.). 178.
Brillouin. 50, 57.
Brioschi (F.). 24, 30, 72.
Brocard (H.). 195, 199, 214, 215, 216.
Bruns (H.). 127.
Bruyère (G.). 211.
Burkhardt (H.). 160.
Bussy. 187.
Cantor (G.). 172.
Cardinaal (J.). 12.
Carvallo (E.). 6, 149, 205.
Casalonga. 197.
Caspary (F.). 51, 53, 90.
Castelnuovo (G.). 73, 74.
Catalan (E.). 98, 198, 199, 200, 203, 204.
Cavalli (E.). 75.
Cayley (A.). 13, 178.
Cels. 26, 47.
Cerruti (V.). 74-201.
Cerulli (V.). 72.
Cesàro (E.). 60, 74, 75.
Chemin (O.). 191.
Chenevier. 204.
Chistoni (C.). 58.
Clavenade. 187.
Coccoz. 203.
Collet. 52.
Collignon (E.). 182, 183, 187, 189, 190, 194, 195, 196, 197, 198, 199, 200, 201, 202, 203.
Colson. 193.
Commines de Marsilly (Général). 200, 203.
Considère. 190.
Cosserat (E.). 79, 81, 134, 145.
Crès (R. de). 216.
Crescini (E.). 61.
Dalwigk (F.). 176.
Decœur (P.). 190.
Defforges. 34.
Delannoy. 204.
Deprez (Marcel). 196.
Desboves. 198.
Deslandres. 194.
Dewulf (N.). 216.
Dormoy (Em.). 202, 203.
Droz-Farny (A.). 215.
Dubois (H.). 188.
Dumiot. 203.

Dupuis (J.). 203.
Durand-Claye (L.). 184.
Dyck (W.). 162.
Elliot. 80.
Escary. 204.
Farjon (F.). 205, 214.
Feret (J.). 204.
Ferrero (A.). 196, 197.
Fiedler. 195.
Flamant. 184, 192.
Fossa-Mancini. 187.
Fouché (M.). 9, 10, 208.
Fouret. 94, 97, 204, 206.
Frobenius (G.). 17.
Frolov (Général). 204.
Fuchs (L.). 99, 113.
Gall (v.). 167, 179.
Galliot (F.). 192.
Garibaldi (P.-M.). 58.
Gaudard (J.). 188.
Genaille (H.). 199, 202.
Genty. 95, 215.
Godefroy. 96.
Gordan (P.). 170.
Gossot (F.). 188.
Goursat. 41, 50.
Govi (G.). 58, 62.
Greenstreet (W.-J.). 215.
Gross (W.). 154.
Guccia (G.-B.). 58, 62, 64, 65.
Guébhard (A.). 197.
Guichard. 55.
Guimaraës. 95.
Gutzmer (A.). 163.
Harnack (A.). 156.
Haton de la Goupillière. 47.
Hennessy. 197.
Hensel (Kurt). 11.
Heude. 185.
Heun (K.). 166, 167.
Hilbert (D.). 159, 168.
Hölder (O.). 174, 180.
Horn (J.). 170, 181.
Hürwitz (A.). 158, 163, 169, 170.
Illigens (M.). 166.
Imbeaux. 183.
Iung (G.). 196, 198.
Jamet (V.). 204, 206.
Jaubert. 195.
Jozan (A.). 189.
Kiepert (L.). 152.
Killing (G.). 164.
Killing (W.). 174.
Klein (F.). 24, 159.
Kneser (A.). 158, 177.
Kobb. 89.
Kober (G.). 171.
Kœnigs (G.). 8, 88, 150.
Königsberger (Léo). 10, 163.
Köpcke (A.). 176.
Kötter (E.). 175.
Krause (M.). 158, 165.
Krazer (A.). 173.
Kronecker (L.). 20, 87, 101, 107, 108, 111, 124.
Küpper (C.). 157, 171.
Lagerbog (Mlle). 8.
Laisant. 8, 9, 10, 50, 89, 90, 93, 96, 97, 98, 194, 195, 197, 199, 208, 209.
Lancelin. 185.
Laquière. 194, 195, 196.
Larose. 209.
Laurent (H.). 204, 207.
Léauté. 31, 49.
Lechalas. 198.
Lecornu. 200.
Ledieu. 46.
Lefèvre (J.). 210.
Legoux (A.). 128, 141.
Leinekugel (G.). 215.
Lelieuvre. 84.
Lemaire (J.). 205, 206, 215.
Lemoine (E.). 98, 195, 197, 198, 200, 201, 203, 212.
Lerch. 132.
Léry. 215.
Leveau. 198, 203.
Lévy (L.). 207.
Lie (S.). 157.
Liguine. 195, 196.
Lilienthal (R.-V.). 162.
Liouville (R.). 42, 87.
Lipschitz (R.). 14, 118.
Locherer. 191.
Longchamps (de). 198, 199, 201, 202, 203.
Loucheur. 211, 214.
Lucas (Ed.). 197, 198, 199, 201, 202, 203.
Lucas (F.). 10, 50, 95, 96, 98.
Luneau. 184.
Malo (Capitaine). 205, 206, 208.
Mangeot. 56, 213.
Mannheim. 10, 34, 36.
Mantel. 198.
Marchand. 213.
Marcolongo (R.). 75.
Markoff. 45, 50, 52, 85, 86, 88.
Maschke (H.). 170.
Massieu. 189.
Mathieu (Ém.). 202.
Méray (Ch.). 213.
Meyer (F.). 172.
Millosévich (E.). 57, 63, 66, 72.

Minkowski (H.). 13, 33.
Mohrmann. 158.
Molenbroch. 207.
Montesano (D.). 65, 74.
Morera (G.). 67.
Moutard. 206.
Mussy. 187.
Muth (P.). 172.
Neuberg (J.). 201, 202.
Nœther (M.). 172, 180.
Ocagne (d'). 8, 35, 90, 91, 96, 188, 189, 191, 205, 211, 212, 213.
Oltramare. 195, 201, 202.
Padé. 43, 48.
Padova (E.). 59, 73.
Painlevé. 20, 39, 52, 86.
Papperitz (E.). 177.
Parmentier (Général). 196, 199.
Pasch (M.). 154.
Peano (G.). 161, 206.
Pellet (A.-C.). 53, 89, 93, 195, 196.
Pelletreau (A.). 183.
Petot. 56, 87.
Perrier (Colonel). 198.
Perrin. 5.
Phillips 32.
Picard. 32, 40, 53, 79, 85, 87, 94.
Pick (G.). 161.
Pillet. 201.
Pilleux (H.). 212.
Pincherle (S.). 57, 62, 71.
Piton-Bressant (L.). 192.
Pizzetti (P.). 60, 72.
Pochhammer (L.). 170.
Poincaré (H.). 34, 43, 46, 81, 86, 195.
Polignac (C. de). 200.
Potier. 34.
Préaudeau (de). 185.
Presle (de). 96.
Pringsheim (A.). 166.
Prompt (P.-Y.). 196.
Ptaszycky. 173.
Pucci (E.). 65.
Rabourdin (L.). 200.
Raffy. 35, 36, 45, 54, 91, 93, 94, 99.
Ragona (D.). 196.
Rateau. 200.
Ratner (E.). 162.
Ravier (L.). 210, 211.
Raynaud (A.). 192.
Reina (V.). 64, 73.
Renou (A.). 214.
Resal. 46.
Ribaucour. 77, 78.
Ricci (G.). 58, 71.
Ricco (A.). 63.
Riecke (E.). 157.
Rindi (S.). 201.
Riquier. 24.
Ritter (C.). 191.
Roberts (S.). 203.
Roubaudi. 208.
Rouché (E.). 214.
Rouquet (V.). 144.
Royer (Mme Cl.). 199.
Saint-Germain (de). 33, 206, 209.
Sauvage. 24.
Scheibner (W.). 180, 181.
Schlegel (V.). 202.
Schlesinger (O.). 170, 171, 180.
Schœndœrfer. 189.
Schœnflies. 36, 176.
Schottky. 14.
Schoute (P.-H.). 12, 195, 198, 200, 202.
Schur (F.). 164.
Séguier (J. de). 210.
Segre (C.). 174.
Serret (P.). 78.
Servais (Cl.). 212.
Siacci (F.). 68.
Sire. 32, 39.
Souleyre. 185, 186.
Speckel (Ch.). 210.
Stahl (H.). 169.
Stahl (W.). 11, 18.
Stéphanos (C.). 196, 197, 198, 199.
Stieltjes (T.-J.). 142.
Stolz (O.). 169.
Stouff (X.). 129.
Stroh (E.). 164, 178, 179.
Sturm (Rudolf). 12.
Szütz (N.-V.). 172.
Tacchini (P.). 62, 65, 72, 75.
Tarry (G.). 47, 202, 203, 209, 216.
Tavernier (R.). 186.
Tchebicheff (P.). 196, 197.
Théry (P.). 193.
Thomae (J.). 19.
Thomé (L.-W.). 13.
Tonelli (A.). 60, 65.
Tourtay. 184.
Trépied. 195.
Tresse (A.). 208.
Trouvelot. 200.
Valdès (E.). 209, 214.
Vanecek (J.-S.). 198.
Ventura Reyes y Prosper. 154.
Venturi (A.). 63.
Verschaffelt. 38.
Vessiot. 44.
Vicaire. 31, 93.
Villaret (E.). 195.

Vogt. 207.
Volterra (V.). 59, 61, 66, 69.
Voss (A.). 154.
Vriess (J. de). 177.
Weber (H.). 171.
Weill. 10.
Weingarten. 37, 41.
West (E.). 200.
Widmer (M.). 191.
Wiltheiss (E.). 169, 175.
Wolynski (A.). 66.
Worontzoff. 210.
Zenger (C.-W.). 201.

FIN DE LA TABLE DE LA SECONDE PARTIE DU TOME XVII.

19310 Paris. — Imprimerie GAUTHIER-VILLARS ET FILS, quai des Grands-Augustins, 55.

QA
1
B8
v. 28

Bulletin des sciences
mathématiques

Physical &
Applied Sci.
Serials
Math

PLEASE DO NOT REMOVE
CARDS OR SLIPS FROM THIS POCKET

UNIVERSITY OF TORONTO LIBRARY